

## 10.1 Einleitung

Sei

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad \tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x) dx.$$

Es gilt

$$|I - \tilde{I}| = \left| \int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \leq (b - a) \|f - \tilde{f}\|_\infty.$$

$$\frac{|I - \tilde{I}|}{|I|} \leq (b - a) \frac{\|f - \tilde{f}\|_\infty}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|} = \frac{\int_a^b \|f\|_\infty dx}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|} \cdot \frac{\|f - \tilde{f}\|_\infty}{\|f\|_\infty} =: \kappa_{\text{rel}} \frac{\|f - \tilde{f}\|_\infty}{\|f\|_\infty}.$$

Die gängige Strategie zur näherungsweise Berechnung von

$$\int_a^b f(x) dx$$

läßt sich folgendermaßen umreißen:

1. Man unterteile  $[a, b]$  in Teilintervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  z.B. mit  $t_j = a + jh$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ .
2. Approximiere  $f$  auf jedem Intervall  $[t_{k-1}, t_k]$  durch eine *einfach* zu integrierende Funktion  $g_k$ , und verwende

$$\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

als Näherung für das exakte Integral.

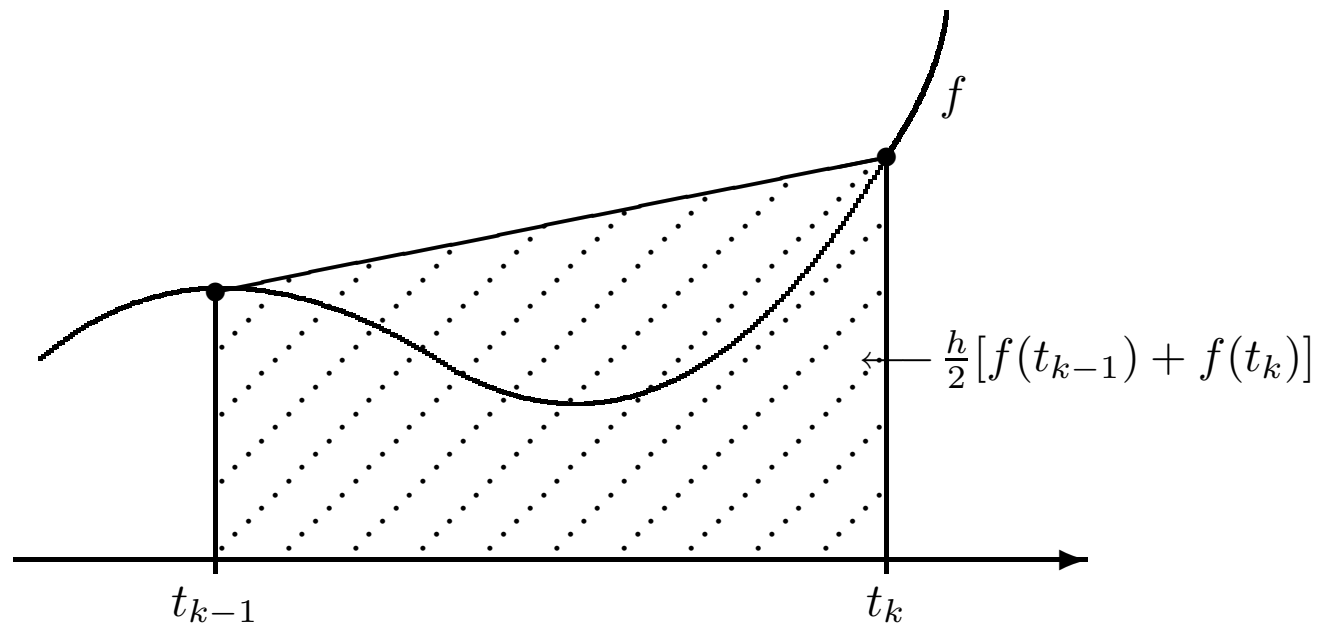
# Trapezregel

Dabei wählt man speziell

$$g_k(x) = \frac{x - t_{k-1}}{h} f(t_k) + \frac{t_k - x}{h} f(t_{k-1}),$$

d.h. die lineare Interpolation an den Intervallenden von  $[t_{k-1}, t_k]$ .  
Folglich ist  $\int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x) dx$  gerade die Fläche

$$\frac{h}{2} [f(t_{k-1}) + f(t_k)].$$



Dies liefert die

**summierte Trapezregel**

$$T(h) = h \left[ \frac{1}{2}f(a) + f(t_1) + \cdots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b) \right]$$

als Näherung für  $\int_a^b f(x) dx$ .

Für den Verfahrensfehler der Teilintegrale gilt folgende Darstellung:

**Lemma 10.1.** Sei  $f \in C^2([t_{k-1}, t_k])$ . Es gilt:

$$\frac{h}{2}[f(t_{k-1}) + f(t_k)] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx + \frac{f''(\xi_k)}{12}h^3, \quad \xi_k \in [t_{k-1}, t_k].$$

Für den Verfahrensfehler von  $T(h)$  ergibt sich damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3 \right| \\ &\leq \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^n |f''(\xi_k)| \leq \frac{h^3}{12} n \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| . \end{aligned}$$

Mit  $nh = b - a$  ergibt sich insgesamt die **Fehlerschranke**

$$\left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{h^2}{12} (b - a) \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| .$$

Ebenfalls erhält man wegen

$$E(h) := T(h) - \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3 = \frac{h^2}{12} \sum_{k=1}^n h f''(\xi_k)$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{h^2} = \frac{1}{12} \int_a^b f''(x) dx = \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a))$$

die **Fehlerschätzung**

$$E(h) \approx \hat{E}(h) := \frac{h^2}{12} (f'(b) - f'(a)) .$$

## Beispiel 10.2.

---

Zur näherungsweise Berechnung von

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

mit der Trapezregel ergeben sich die in folgender Tabelle angegebenen Näherungswerte, Verfahrensfehler und Fehlerschätzungen.

$n$	$T(h)$	$ E(h)  =  T(h) - I $	$ \hat{E}(h)  = \frac{h^2}{12}  f'(\frac{\pi}{2}) - f'(0) $
4	4.396928	1.57e-02	1.59e-02
8	4.385239	3.97e-03	3.98e-03
16	4.382268	9.95e-04	9.96e-04
32	4.381523	2.49e-04	2.49e-04



## 10.2 Newton-Cotes-Formeln

---

Für ein typisches Teilintervall  $[t_{k-1}, t_k]$  stehe der Einfachheit halber im Folgenden  $[c, d]$ . Seien nun

$$x_0, \dots, x_m \in [c, d]$$

verschiedene Punkte.

Integration des Interpolationspolynoms liefert die Quadraturformel

$$I_m(f) = \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx.$$

**Satz 10.3.** Sei  $I_m(f)$  wie oben. Für jedes Polynom  $Q \in \Pi_m$  gilt

$$I_m(Q) = \int_c^d Q(x) dx.$$

Man sagt, die Quadraturformel ist *exakt* vom Grade  $m$ .



**Lemma 10.4.** Es gibt Gewichte  $c_0, \dots, c_m$ , so daß  $I_m(f)$  die Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$$

hat, wobei wieder  $h = d - c$ . Die  $c_j$  sind durch

$$c_j = \frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^m \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx = \frac{1}{h} \int_c^d \ell_{jm}(x) dx$$

gegeben, wobei  $\ell_{jm}$  die Lagrange-Fundamentalpolynome zu den Stützstellen  $x_0, \dots, x_m$  sind.

Wählt man speziell die Stützstellen  $x_j$  äquidistant

$$x_0 = c + \frac{1}{2}h =: c + \xi_0 h, \quad \text{wenn } m = 0,$$

$$x_j = c + \frac{j}{m}h =: c + \xi_j h, \quad j = 0, \dots, m, \quad \text{wenn } m > 0,$$

erhält man die **Newton-Cotes-Formeln**.

Man kann dann die Quadraturformel in der Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^m c_j f(c + \xi_j h)$$

mit *normierten* Stützstellen  $\xi_j$  und Gewichten  $c_j$  schreiben, die jetzt unabhängig vom speziellen Intervall  $[c, d]$  sind. Gängige Beispiele:

$m$		$\xi_j$	$c_j$	$I_m(f) - \int_c^d f(x) dx$
0	Mittelpunktsregel	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{24}h^3 f^{(2)}(\xi)$
1	Trapezregel	0, 1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{90}(\frac{1}{2}h)^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$ -Regel	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{3}{80}(\frac{1}{3}h)^5 f^{(4)}(\xi)$
4	Milne-Regel	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	$\frac{8}{945}(\frac{1}{4}h)^7 f^{(6)}(\xi)$

## Summierte Newton-Cotes-Formeln

---

Als Beispiel behandeln wir die summierte Simpson-Regel.

$$S(h) = \int_a^b f(x) dx + E(h)$$

mit

$$S(h) = \frac{h}{6} \left[ f(t_0) + 4f\left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right) + 2f(t_1) + 4f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) + \right. \\ \left. 2f(t_2) + \dots + 2f(t_{n-1}) + 4f\left(\frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right) + f(t_n) \right]$$

und

$$E(h) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{90} \left(\frac{1}{2}h\right)^5 f^{(4)}(\xi_k) = \frac{h^4}{2880} \sum_{k=1}^n h f^{(4)}(\xi_k), \quad \xi_k \in [t_{k-1}, t_k].$$

Es gilt, wegen  $nh = b - a$ ,

$$|E(h)| \leq \frac{h^4}{2880} (b - a) \|f^{(4)}\|_\infty ,$$
$$E(h) \approx \frac{h^4}{2880} \int_a^b f^{(4)}(x) dx = \frac{h^4}{2880} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) .$$

Man beachte, daß beim Aufsummieren der einzelnen Teilintegrale,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx ,$$

im Fehler eine  $h$ -Potenz verloren geht.

## Beispiel 10.5

---

Für das Integral in Beispiel 10.2 ergeben sich die Resultate wie in folgender Tabelle.

$n$	$S(h)$	$ E(h) $	$\frac{h^4}{2880}  f^{(3)}(\frac{\pi}{2}) - f^{(3)}(0) $
4	4.381343022	6.93e-05	6.92e-05
8	4.381278035	4.33e-06	4.33e-06
16	4.381273978	2.70e-07	2.70e-07
32	4.381273725	1.69e-08	1.69e-08

Zielvorgaben:

Entwickle für  $m \in \mathbb{N}$  eine Formel

$$\sum_{i=0}^m w_i f(x_i) = \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx$$

mit:

- positiven Gewichten  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, m$ ;
- mit möglichst hohem Exaktheitsgrad  $n \geq m$ , d.h.,

$$\int_c^d Q(x) dx = \sum_{i=0}^m w_i Q(x_i), \quad \forall Q \in \Pi_n.$$

Der Exaktheitsgrad bei Newton-Cotes-Formeln  $I_m(f)$  ist entweder  $m$  oder  $m + 1$ . Es zeigt sich, daß man dies verbessern kann.

Allerdings sieht man leicht, daß man mit einer Formel dieses Typs *höchstens* den Exaktheitsgrad  $2m + 1$  realisieren kann.

Daß man jedoch den maximalen Exaktheitsgrad  $n = 2m + 1$  realisieren kann, zeigen die Gaußschen Quadraturformeln.

**Satz 10.6.** Sei  $m \geq 0$ . Es existieren Stützstellen  $x_0, \dots, x_m \in (c, d)$  und positive Gewichte  $w_0, \dots, w_m$ , so daß mit  $h = d - c$

$$h \sum_{i=0}^m w_i f(x_i) = \int_c^d f(x) dx + E_f(h)$$

und

$$E_Q = 0 \quad \text{für alle } Q \in \Pi_{2m+1}.$$

Ferner gilt für passendes  $\xi \in [c, d]$

$$|E_f(h)| = \frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3 (2m+3)} h^{2m+3} |f^{(2m+2)}(\xi)|.$$

Daß die Gewichte  $w_j$  tatsächlich positiv sind, ergibt sich aus der Exaktheit vom Grade  $2m + 1$  durch Anwendung auf das spezielle Polynom

$$q(x) := \prod_{i=0, i \neq k}^m (x - x_i)^2 \in \Pi_{2m} \subset \Pi_{2m+1},$$

denn

$$0 < \int_c^d q(x) dx = \sum_{i=0}^m w_i q(x_i) = w_k q(x_k) = w_k \prod_{i=0, i \neq k}^m (x_k - x_i)^2.$$



Wir untersuchen nun den in der Fehlerformel auftretenden Faktor

$$C_{k,h} := \frac{(k!)^4}{((2k)!)^3(2k+1)} h^{2k+1}$$

( $k = m + 1$ ). Für glatte Funktionen (d.h.,  $|f^{(2k)}|$  wird nicht allzu groß, wenn  $k$  größer wird) wird die Qualität der Gauß-Quadratur im Wesentlichen durch den Faktor  $C_{k,h}$  bestimmt.

$h$	$k = 2$	$k = 4$	$k = 8$
4	2.4e-01	1.5e-04	2.9e-13
2	7.4e-03	2.9e-07	2.2e-18
1	2.3e-04	5.6e-10	1.7e-23
0.5	7.2e-06	1.1e-12	1.3e-28

Sei

$$I_{k,n} \approx \int_a^b f(x) dx = I(f)$$

die Quadraturformel, wobei  $[a, b]$  in  $n$  Teilintervalle mit Länge  $\frac{b-a}{n} = h$  unterteilt wird und auf jedem Teilintervall eine Gauß-Quadratur mit  $k$  Stützstellen angewandt wird.

Sowohl für  $I_{2k,n}$  als auch für  $I_{k,2n}$  wird die Anzahl der Funktionsauswertungen etwa verdoppelt im Vergleich zu  $I_{k,n}$ .

In obiger Tabelle kann man sehen, daß man

$$\left| I - I_{2k,n} \right| \ll \left| I - I_{k,2n} \right|$$

erwarten darf.

Daher wird in der Praxis bei Gauß-Quadratur  $n$  in der Regel klein gewählt, oft sogar  $n = 1$ .

## Beispiel 10.7.

---

Die Gauß-Quadratur mit  $[c, d] = [0, \frac{\pi}{2}]$  (d.h.  $n = 1$ ) für das Integral in Beispiel 10.2 ergibt die Resultate:

$m$	$I_m$	$ I_m - I $
1	4.3690643196	1.22e-03
2	4.3813023502	2.86e-05
3	4.3812734352	2.73e-07
4	4.3812737083	5.18e-10

Man sieht, daß in diesem Beispiel die Genauigkeit der Gauß-Quadratur mit 5 Funktionswerten ( $m = 4$ ;  $k = 5$ ) besser ist als die der Simpson-Regel angewandt auf  $n = 32$  Teilintervalle (vgl. Tabelle 10.3), wobei insgesamt 65 Funktionswerte benötigt werden.

## Beispiel 10.8.

---

Es sei  $[c, d] = [-1, 1]$  und  $m = 1$ . Die Gauß-Quadraturformel

$$I_1(f) = 2(c_0f(x_0) + c_1f(x_1))$$

muß für  $p \in \Pi_3$  exakt sein, d.h.

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = 2(c_0p(x_0) + c_1p(x_1)) \quad \text{für } p(x) = x^k, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\text{Aus } \int_{-1}^1 x^k dx = 2(c_0x_0^k + c_1x_1^k), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= 2(c_0 + c_1) , & 0 &= 2(c_0x_0 + c_1x_1) , \\ \frac{2}{3} &= 2(c_0x_0^2 + c_1x_1^2) , & 0 &= 2(c_0x_0^3 + c_1x_1^3) . \end{aligned}$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem hat genau zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} c_0 = c_1 = \frac{1}{2}, \quad x_0 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \\ c_0 = c_1 = \frac{1}{2}, \quad x_0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

## 10.4 Extrapolation und Romberg-Quadratur

---

Zu berechnen sei das Integral

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Die Trapezsumme  $T(h)$  liefert eine Approximation der Ordnung  $h^2$ . Die wesentliche Grundlage für den Erfolg von Extrapolationstechniken bildet eine sogenannte *asymptotische Entwicklung* des Diskretisierungsfehlers:

$$T(h) - I = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots + c_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}).$$

Hieraus erhält man

$$T\left(\frac{1}{2}h\right) - I = c_1 \frac{1}{4} h^2 + \hat{c}_2 h^4 + \dots + \hat{c}_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

also

$$\left[ \frac{4}{3} T\left(\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{3} T(h) \right] - I = \tilde{c}_1 h^4 + \dots + \tilde{c}_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}).$$

Man kann diese Idee systematisch weitertreiben. Sei

$$T_1(h) = \frac{4T(\frac{1}{2}h) - T(h)}{3}.$$

Es gilt

$$T_1(h) - I = \tilde{c}_1 h^4 + \tilde{c}_2 h^6 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

und damit

$$T_1(\frac{1}{2}h) - I = \tilde{c}_1 \frac{1}{16} h^4 + \tilde{c}_2 \frac{1}{64} h^6 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

und

$$\begin{aligned} \frac{16}{15} \left( T_1(\frac{1}{2}h) - I \right) - \frac{1}{15} \left( T_1(h) - I \right) &= \frac{16T_1(\frac{1}{2}h) - T_1(h)}{15} - I \\ &= d_1 h^6 + d_2 h^8 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}). \end{aligned}$$

Man erkennt, daß die Entwicklung des Fehlers der Quadraturformel

$$T_2(h) := \frac{16T_1(\frac{1}{2}h) - T_1(h)}{15}$$

mit einem Glied der Ordnung  $h^6$  beginnt.

## Allgemeine Idee der Extrapolation

---

Die zugrunde liegende Idee ist folgende. Der gesuchte Wert ist

$$T(0) = \int_a^b f(x) dx = I.$$

Bestimmt man das *lineare Interpolationspolynom* der Funktion

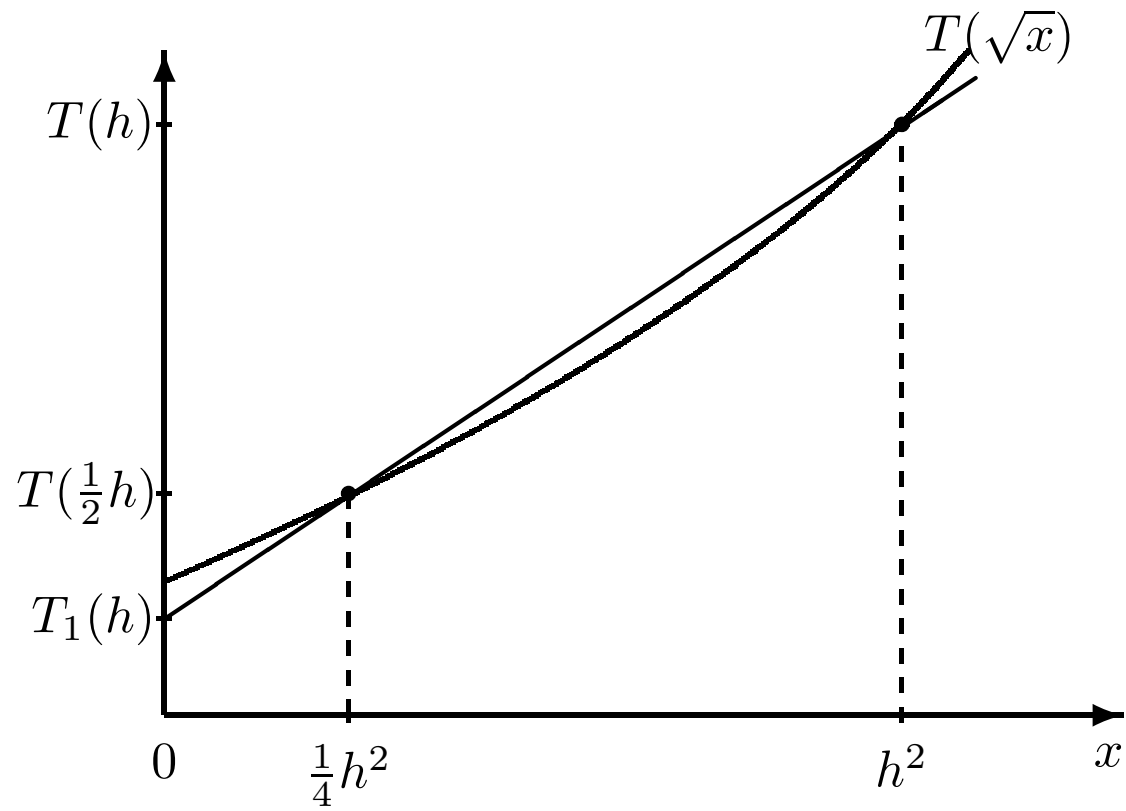
$$x \rightarrow g(x) = T(\sqrt{x}) = I + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_p x^p + \mathcal{O}(x^{p+1}), \quad (x \downarrow 0),$$

zu den Punkten  $(h^2, T(h))$  und  $(\frac{1}{4}h^2, T(\frac{1}{2}h))$ , ergibt sich

$$P(T(\sqrt{\cdot}) | h^2, \frac{1}{4}h^2)(x) = T(h) + \frac{T(\frac{1}{2}h) - T(h)}{\frac{1}{4}h^2 - h^2}(x - h^2).$$

Da man  $T(0)$  annähern will, **extrapoliert** man an der Stelle  $x = 0$ , d.h.

$$P(T(\sqrt{\cdot}) | h^2, \frac{1}{4}h^2)(0) = T(h) + \frac{4}{3} \left( T(\frac{1}{2}h) - T(h) \right) = T_1(h).$$





## Beispiel 10.9.

---

Sei

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

und  $T(h)$  die zugehörige Trapezregel. Die Extrapolation angewandt auf die Trapezregel liefert folgende Resultate:

$n$	$T(h)$	$T_1(h) = \frac{4}{3}T(h) - \frac{1}{3}T(2h)$	$ T_1(h) - I $
4	4.39692773		
8	4.38523920	4.38134302	6.93e-05
16	4.38226833	4.38127803	4.33e-06
32	4.38152257	4.38127398	2.70e-07

Die Näherung  $T_2(h)$  läßt sich wie  $T_1(h)$  ebenfalls über *Extrapolation* erklären. Es gilt

$$P(T(\sqrt{\cdot}) | h^2, \frac{1}{4}h^2, \frac{1}{16}h^2)(0) = T_2(h).$$

**Allgemeine Vorgehensweise.** Sei

$$T_{i,0} := T(2^{-i}h), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei  $h$  eine feste Anfangsschrittweite ist.

Es soll das Interpolationspolynom

$$P(T(\sqrt{\cdot}) | h^2, \dots, (2^{-k}h)^2)(x)$$

an der Stelle  $x = 0$  ausgewertet werden.

Anwendung des Neville-Aitken Schemas um den Wert

$$T_k(h) = T_{k,k} = P(T(\sqrt{\cdot}) | h^2, \dots, (2^{-k}h)^2)(0)$$

zu berechnen, liefert die Rekursion

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, i \geq j.$$

# Romberg-Schema

$$\begin{array}{ccccccc}
 T(h) & = & T_{0,0} & & & & \\
 & & \searrow & & & & \\
 T(\frac{1}{2}h) & = & T_{1,0} & \rightarrow & T_{1,1} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \\
 T(\frac{1}{4}h) & = & T_{2,0} & \rightarrow & T_{2,1} & \rightarrow & T_{2,2} \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 T(\frac{1}{8}h) & = & T_{3,0} & \rightarrow & T_{3,1} & \rightarrow & T_{3,2} & \rightarrow & T_{3,3} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 T_{i-1,j-1} & & \\
 & \searrow^{\frac{-1}{4^{j-1}}} & \\
 T_{i,j-1} & \xrightarrow{\frac{4^j}{4^j-1}} & T_{i,j}
 \end{array}$$

## Beispiel 10.10.

Sei

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2,$$

wie in Beispiel 10.2, und  $T_{i,0} = T(2^{-i}h)$ , wobei  $T(\cdot)$  die Trapezregel ist. Für die Anfangsschrittweite  $h = \frac{1}{4}\pi$  ergibt das Romberg-Schema folgende Werte:

$i$	$T_{i,0}$	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$
0	4.396927734684			
1	4.385239200472	4.381343022401		
2	4.382268326301	4.381278034910	4.381273702411	
3	4.381522565173	4.381273978130	4.381273706768	4.381273707762

Fehler:

$i$	$ I - T_{i,j} $			
0	1.57e-02			
1	3.97e-03	6.93e-05		
2	9.95e-04	4.33e-06	5.35e-09	
3	2.49e-04	2.70e-07	8.22e-11	1.42e-12

## 10.5 Zweidimensionale Integrale

---

### 10.5.1 Transformation von Integralen.

Eindimensionales Integral

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Sei

$$I_1 = [a, b], \quad I_2 = [c, d] \quad \text{und} \quad \psi : I_1 \rightarrow I_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung.

Es gilt die Transformationsformel

$$\int_{I_1} f(\psi(x)) |\psi'(x)| dx = \int_{I_2} f(y) dy.$$

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, falls  $\psi$  **affin** ist, d.h.

$$\hat{\psi} : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad \hat{\psi}(x) = \frac{x-a}{b-a}d + \frac{b-x}{b-a}c.$$

Wenn 
$$Q_m(g; I_1) = (b - a) \sum_{i=0}^m w_i g(x_i)$$

eine Formel zur Annäherung von  $\int_a^b g(x) dx$  ist, ergibt sich eine entsprechende Quadraturformel für das Intervall  $I_2 = [c, d]$ :

$$\begin{aligned} \int_{I_2} f(y) dy &= \int_a^b f(\hat{\psi}(x)) |\hat{\psi}'(x)| dx \\ &= \frac{d - c}{b - a} \int_a^b f(\hat{\psi}(x)) dx \approx (d - c) \sum_{i=0}^m w_i f(\hat{\psi}(x_i)) , \end{aligned}$$

also insgesamt:

$$\begin{aligned} Q_m(g; I_1) &= (b - a) \sum_{i=0}^m w_i g(x_i) \\ Q_m(f; I_2) &= (d - c) \sum_{i=0}^m \hat{w}_i f(\hat{x}_i), \quad \text{mit} \\ \hat{w}_i &= w_i, \quad \hat{x}_i = \frac{x_i - a}{b - a} d + \frac{b - x_i}{b - a} c . \end{aligned}$$

## Beispiel 10.11.

Gauß-Quadraturformeln werden oft für das Intervall  $[-1, 1]$  spezifiziert, z.B.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \left[ \frac{1}{2} f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \right]$$

aus Beispiel 10.8.

Die entsprechende Formel für ein beliebiges Intervall  $[c, d]$ :

$$\int_c^d f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[ f\left(c + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) + f\left(c + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \right], \quad h := d - c.$$

Analog kann man für die Gauß-Quadratur mit 4 Stützstellen

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \sum_{i=0}^3 w_i f(x_i),$$

$$w_0 = w_3 = 0.173928, \quad w_1 = w_2 = \frac{1}{2} - w_0,$$

$$-x_0 = x_3 = 0.861136, \quad -x_1 = x_2 = 0.339981,$$

eine Formel für ein beliebiges Intervall  $[c, d]$  herleiten. △

Wir betrachten nun die Transformation eines **zweidimensionalen** Integrals

$$\int_B f(x, y) \, dx \, dy, \quad B \subset \mathbb{R}^2.$$

Sei  $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$  und  $\psi : B_1 \rightarrow B_2$  eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung mit Jacobi-Matrix

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Es gilt folgende Verallgemeinerung von (10.38):

**Satz 10.12.** Falls  $\det J(x, y) \neq 0$  für alle  $(x, y) \in B_1$ , so gilt

$$\int_{B_1} f(\psi(x, y)) |\det J(x, y)| \, dx \, dy = \int_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) \, d\tilde{x} \, d\tilde{y}.$$



Für den Spezialfall, daß  $\psi$  **affin** ist,

$$\psi(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \det(A) \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^2,$$

ergibt sich daraus die Transformationsformel

$$|\det A| \int_{B_1} f\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b\right) dx dy = \int_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

Mit Hilfe dieser Transformationsformel kann man, wie im eindimensionalen Fall, eine Quadraturformel für einen Standardbereich (z.B. Einheitsquadrat, Einheitsdreieck) in eine Formel für einen **affin-äquivalenten Bereich** überführen.

Wichtiger Unterschied zwischen ein- und mehrdimensionaler Integration:

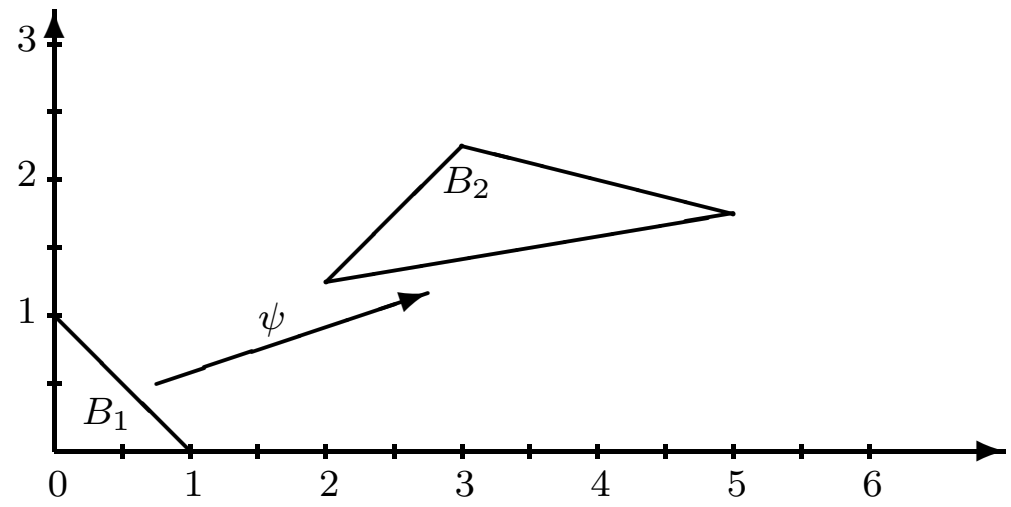
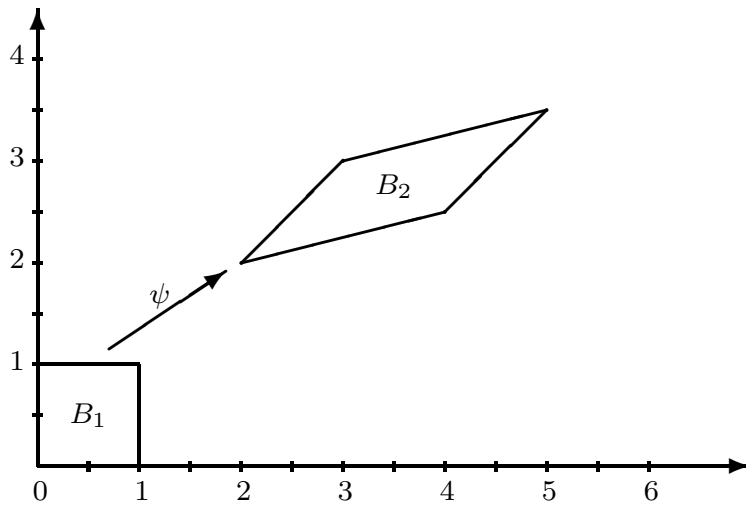
Zwei Intervalle  $[a, b]$  und  $[c, d]$  lassen sich stets durch *affine* Transformationen aufeinander abbilden. Hingegen ist es meistens *nicht* möglich, einfache Gebiete in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , durch eine *affine* Transformation ineinander zu überführen.

### **Beispiel 10.14.**

Sei  $B_1 = [0, 1] \times [0, 1]$  das Einheitsquadrat.

Jede affine Abbildung bildet  $B_1$  auf ein Parallelogramm ab. Eine affine Abbildung von  $B_1$  auf den Einheitskreis  $S = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2) \leq 1\}$  ist also nicht möglich. △

# Affine Transformationen



$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy.$$

Sei

$$Q_m(g) = \sum_{i=0}^m w_i g(x_i)$$

eine Quadraturformel für das **e**indimensionale Integral  $\int_0^1 g(x) dx$  und

$$F(y) := \int_0^1 f(x, y) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= \int_0^1 F(y) dy \approx \sum_{j=0}^m w_j F(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^m w_j \int_0^1 f(x, x_j) dx \approx \sum_{j=0}^m w_j \sum_{i=0}^m w_i f(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i,j=0}^m w_i w_j f(x_i, x_j) =: Q_m^{(2)}(f). \end{aligned}$$

## Beispiel 10.17.

---

Sei

$$Q_1(g) = \frac{1}{2}g(x_0) + \frac{1}{2}g(x_1), \quad x_0 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad x_1 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6},$$

die eindimensionale Gauß-Quadraturformel mit zwei Stützstellen für das Intervall  $[0, 1]$ .

Daraus ergibt sich die Produktregel

$$Q_1^{(2)}(f) = \frac{1}{4}f(x_0, x_0) + \frac{1}{4}f(x_0, x_1) + \frac{1}{4}f(x_1, x_0) + \frac{1}{4}f(x_1, x_1)$$

für den Bereich  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Diese Formel ist exakt für alle Linearkombinationen von Polynomen  $x^{k_1}y^{k_2}$ ,  $0 \leq k_1, k_2 \leq 3$ .  $\triangle$

### 10.5.3 Integration über dem Einheitsdreieck

---

Für Dreiecke ist es zweckmäßig, von den Monomen

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \text{ usw.}$$

auszugehen und die Frage nach solchen Quadraturformeln zu stellen, die alle Monome der Form  $x^{k_1}y^{k_2}$ ,  $0 \leq k_1 + k_2 \leq M$  exakt integrieren. Einige typische Beispiele:

$$(i) \quad Q(f) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$(ii) \quad Q(f) = \frac{1}{6}[f(0, 0) + f(1, 0) + f(0, 1)]$$

$$(iii) \quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$(iv) \quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)\right].$$

Die Monome  $1, x, y$  werden durch die Formeln in (i), (ii) exakt integriert.

Die Monome  $1, x, y, xy, x^2, y^2$  werden durch die Formeln in (iii), (iv) exakt integriert.