

11.1 Einführung

Gesucht wird eine Funktion $y = y(t)$ einer (Zeit-)Variablen t , die der Gleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) , \quad t \in [t_0, T] ,$$

und der Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y^0$$

genügen soll.

Man spricht von einer *gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung*. Diese Aufgabe heißt *Anfangswertproblem*.

Allgemeiner hat man mit *Systemen von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t))\end{aligned}$$

zu tun. Anfangsbedingungen:

$$y_i(t_0) = y_i^0, \quad i = 1, \dots, n,$$

Setzt man

$$y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t, y) := \begin{pmatrix} f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{pmatrix}, \quad y^0 := \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix},$$

kann dieses Anfangswertproblem kompakt wieder in der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y^0$$

geschrieben werden.

Beispiel 11.2.

Gesucht werden Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $t \geq 0$, für die

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 - y_2 \\ 2y_1 - 2y_2 + 3 \sin t \end{pmatrix} \quad (t \geq 0) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Durch Einsetzen kann man einfach nachprüfen, daß

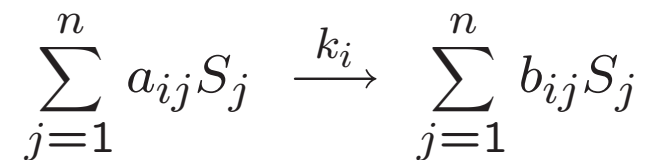
$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

die Lösung ist.

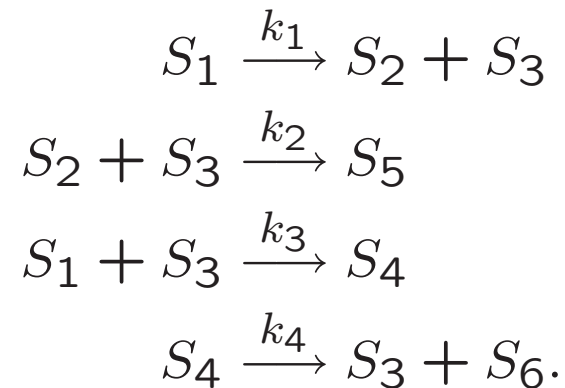


Beispiel 11.4.

Chemische Reaktionsprozesse werden oft mit gewöhnlichen Differentialgleichungen modelliert. Seien S_1, \dots, S_n chemische Stoffe, die bei konstanter Temperatur in einem abgeschlossenen System mit einander reagieren. Die i -te Reaktion wird durch



beschrieben. Als Beispiel betrachten wir die chemische Pyrolyse



Sei $y_i(t)$ die Konzentration der Komponente S_i zum Zeitpunkt t . Das zugehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das die Dynamik dieses Reaktionsprozesses beschreibt, ist

$$y_1' = -k_1 y_1 - k_3 y_1 y_3$$

$$y_2' = k_1 y_1 - k_2 y_2 y_3$$

$$y_3' = k_1 y_1 - k_2 y_2 y_3 - k_3 y_1 y_3 + k_4 y_4$$

$$y_4' = k_3 y_1 y_3 - k_4 y_4$$

$$y_5' = k_2 y_2 y_3$$

$$y_6' = k_4 y_4.$$



Beispiel 11.5.

Die Entwicklung der Temperatur $T(x, t)$ an der Stelle x eines Stabes zur Zeit t ergibt sich als Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell).$$

Die *Anfangswerte* seien $T(x, 0) = \Phi(x)$. Die *Randwerte* sind

$$T(0, t) = T(\ell, t) = 0.$$

Mit Hilfe der sogenannten *Linien-Methode* kann man die gesuchte Lösung $T(x, t)$ mit Hilfe eines *Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen* erster Ordnung annähern.

$$\kappa \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{\kappa}{h_x^2} (T(x + h_x, t) - 2T(x, t) + T(x - h_x, t)),$$

$$y_j(t) \approx T(x_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, n_x - 1,$$

$$y_j' = \frac{\kappa}{h_x^2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n_x - 1,$$

Mit $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_x-1})^T$ ergibt sich

$$y' = f(t, y) = Ay,$$

wobei A die Tridiagonalmatrix

$$A = -\frac{\kappa}{h_x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ \emptyset & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist.



Gewöhnliche Differentialgleichung m -ter Ordnung: in der Differentialgleichung kommen Ableitungen bis zur Ordnung m vor.

Beispiel 11.6. Das mathematische Pendel in Beispiel 1.2 wird durch die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\phi''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\phi(t))$$

und die Anfangsbedingungen

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \phi'(0) = 0$$

charakterisiert. △

Anfangswertaufgabe m -ter Ordnung: Bestimme eine skalare Funktion $y(t)$, so daß

$$y^{(m)} = g(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) , \quad t \in [t_0, T] ,$$
$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(t_0) = z_{m-1}.$$

11.2 Reduktion auf ein System 1. Ordnung

Setzt man

$$y_1(t) := y(t)$$

$$y_2(t) := y'(t) = y_1'(t)$$

$$y_3(t) := y''(t) = y_2'(t)$$

\vdots

$$y_m(t) := y^{(m-1)}(t) = y_{m-1}'(t),$$

so folgt aus (11.10) $y_m' = g(t, y_1, y_2, \dots, y_m)$, also

$$\left. \begin{array}{l} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ \vdots \\ y_{m-1}'(t) = y_m(t) \\ y_m'(t) = g(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \end{array} \right\} \text{ für } t \in [t_0, T]$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(t_0) = z_0, \quad \dots, \quad y_m(t_0) = z_{m-1}$$

Beispiel 11.8.

Die gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = -2y'' + y' + y^2 - e^t, \quad t \in [0, T],$$

mit Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0,$$

ergibt über

$$y_1(t) := y(t), \quad y_2(t) := y'(t), \quad y_3(t) := y''(t),$$

das äquivalente System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -2y_3 + y_2 + y_1^2 - e^t \end{pmatrix} \quad (t \in [0, T])$$

mit Anfangsbedingungen

$$(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (1, 0, 0).$$

△

11.3 Einige theoretische Grundlagen

Ein Problem heißt **korrekt gestellt**, falls

- 1.) eine Lösung *existiert*,
- 2.) diese Lösung *eindeutig* ist und
- 3.) *stetig* von den Daten abhängt.

Nach dem *Satz von Peano* existiert bereits unter sehr schwachen Anforderungen an die rechte Seite f , nämlich Stetigkeit in t und y , eine Lösung, zumindest für kleine Zeitintervalle.

Unter etwas stärkeren Voraussetzungen an f gilt allerdings der folgende *Existenz- und Eindeutigkeitssatz* von *Picard-Lindelöf*, der die Forderung 2.) sichert.

Satz 11.10. Sei f eine Funktion, die stetig in (t, y) und darüber hinaus im folgenden Sinne Lipschitz-stetig in y ist (wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige feste Norm auf \mathbb{R}^n ist):

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\|$$

für alle $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ mit $\delta > 0$ und für alle y, z aus einer Umgebung \mathcal{U} von y^0 .

Dann existiert eine eindeutige Lösung y von (11.3) in einer Umgebung von t_0 (die von δ , $\|f\|$ und von \mathcal{U} abhängt).

Beispiel 11.11.

Wir wählen $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, die Maximumnorm. Für das mathematische Pendel aus Beispiel 11.7 ergibt sich mit $c := -g/\ell$

$$\begin{aligned}\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} y_2 \\ c \sin y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_2 \\ c \sin z_1 \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &= \left\| \begin{pmatrix} y_2 - z_2 \\ c \cos(\xi)(y_1 - z_1) \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &= \max\{|y_2 - z_2|, |c| |\cos(\xi)| |y_1 - z_1|\} \\ &\leq \max\{1, |c|\} \|y - z\|_\infty,\end{aligned}$$

also gilt die Lipschitz-Bedingung mit $L = \max\{1, \frac{g}{\ell}\}$ für alle t, y, z . \triangle

Forderung 3.) der Korrektgestelltheit ist natürlich für numerische Zwecke besonders essentiell.

Im vorliegenden Zusammenhang betrachten wir den einfachsten Fall, daß unter „Daten“ lediglich die Anfangswerte y^0 verstanden werden.

Satz 11.12. Die Funktion f erfülle die Lipschitz-Bedingung (11.12) (bzgl. einer Umgebung \mathcal{U} von $y^0, z^0 \in \mathbb{R}^n$).

Seien $y(t), z(t)$ Lösungen von (11.3) bezüglich der Anfangsdaten $y^0, z^0 \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt für alle t aus einer Umgebung von t_0 die Abschätzung

$$\|y(t) - z(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|y^0 - z^0\|.$$

Bemerkung 11.14.

Die Funktion $y(t)$ löst

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y^0,$$

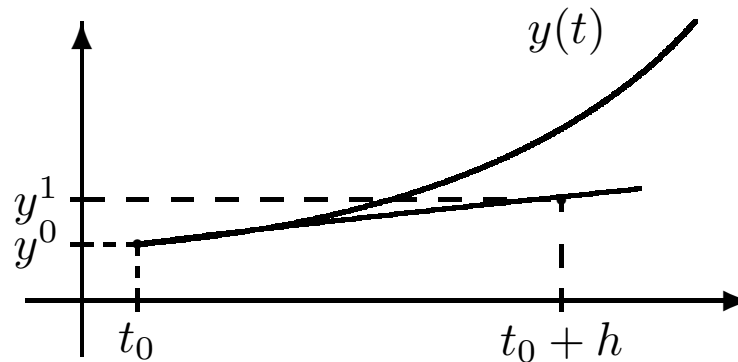
genau dann, wenn sie

$$y(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

löst.

11.4 Einfache Einschrittverfahren

Man verwendet $y^1 = y^0 + hf(t_0, y^0)$ als Näherung für $y(t_0 + h)$.



Dies führt auf das folgende Verfahren:

Algorithmus 11.16 (Euler-Verfahren)

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Berechne für $j = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned}t_{j+1} &= t_j + h \\ y^{j+1} &= y^j + hf(t_j, y^j).\end{aligned}$$

Bemerkung 11.17. Sei die Anfangsbedingung $(t_j, y^j) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Die Funktion $\tilde{y}(t)$ löst das lokale Anfangswertproblem

$$\tilde{y}' = f(t, \tilde{y}) \quad \text{für } t \in [t_j, T], \quad \tilde{y}(t_j) = y^j,$$

genau dann, wenn

$$\tilde{y}(t) = y^j + \int_{t_j}^t f(s, \tilde{y}(s)) ds, \quad t \in [t_j, T],$$

gilt. Insbesondere gilt für $t = t_{j+1}$:

$$\tilde{y}(t_{j+1}) = y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, \tilde{y}(s)) ds.$$

△

Das Euler-Verfahren erhält man dann über

$$\tilde{y}(t_{j+1}) = y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, \tilde{y}(s)) ds \approx y^j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, y^j) ds =: y^{j+1}.$$

Statt der Rechteckregel kann man auch die Mittelpunktsregel

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s) ds \approx hg\left(t_j + \frac{h}{2}\right)$$

einsetzen. Der Wert

$$g\left(t_j + \frac{h}{2}\right) = f\left(t_j + \frac{h}{2}, \tilde{y}\left(t_j + \frac{h}{2}\right)\right)$$

ist nicht bekannt. Diesen Wert kann man aber durch $f\left(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}}\right)$ mit $y^{j+\frac{1}{2}} := y^j + \frac{h}{2}f(t_j, y^j)$ annähern. Dies führt auf den

Algorithmus 11.18 (Verbessertes Euler-Verfahren)

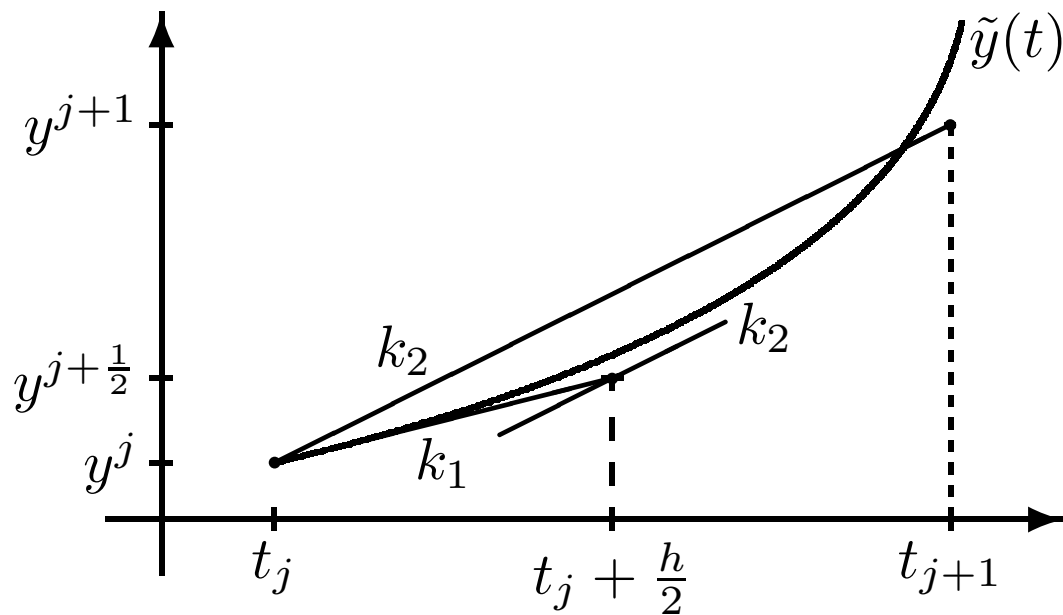
Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Berechne für $j = 0, \dots, n-1$:

$$t_{j+1} = t_j + h$$

$$y^{j+\frac{1}{2}} = y^j + \frac{h}{2}f(t_j, y^j)$$

$$y^{j+1} = y^j + hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}}\right).$$

Verbessertes Euler-Verfahren:



$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_j, y^j) \\y^{j+\frac{1}{2}} &= y^j + \frac{h}{2}k_1 \\k_2 &= f(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}}) \\y^{j+1} &= y^j + hk_2\end{aligned}$$

Falls man das Integral über die Trapezregel

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s) ds \approx \frac{h}{2}(g(t_j) + g(t_{j+1}))$$

annähert, ergibt sich die folgende Methode:

Algorithmus 11.19. (Trapezmethode)

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Berechne für $j = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} t_{j+1} &= t_j + h \\ y^{j+1} &= y^j + \frac{h}{2}(f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})). \end{aligned}$$

Die Trapezmethode ist ein Beispiel einer *impliziten* Methode.

Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'(t) &= y(t) - 2 \sin t, & t \in [0, 4], \\y(0) &= 1.\end{aligned}$$

Man rechnet einfach nach, daß $y(t) = \sin t + \cos t$ die Lösung dieses Problems ist.

- Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned}y^{j+1} &= y^j + hf(t_j, y^j) \\&= y^j + h(y^j - 2 \sin t_j) = (1 + h)y^j - 2h \sin t_j\end{aligned}$$

- Verbessertes Euler-Verfahren:

$$y^{j+\frac{1}{2}} = y^j + \frac{h}{2}f(t_j, y^j) = (1 + \frac{h}{2})y^j - h \sin t_j$$

$$\begin{aligned} y^{j+1} &= y^j + hf(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+\frac{1}{2}}) = y^j + h(y^{j+\frac{1}{2}} - 2 \sin(t_j + \frac{h}{2})) \\ &= (1 + h + \frac{1}{2}h^2)y^j - 2h \sin(t_j + \frac{h}{2}) - h^2 \sin t_j. \end{aligned}$$

- Trapezmethode:

$$\begin{aligned} y^{j+1} &= y^j + \frac{h}{2}(f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})) \\ &= y^j + \frac{h}{2}(y^j + y^{j+1} - 2 \sin t_j - 2 \sin t_{j+1}) \\ &= (1 + \frac{h}{2})y^j + \frac{h}{2}y^{j+1} - h(\sin t_j + \sin t_{j+1}). \end{aligned}$$

In diesem einfachen Fall kann man die implizite Gleichung für y^{j+1} in eine explizite umschreiben. △

Tabellen 11.1-3

Euler-Verfahren

h	$ y^{1/h} - y(1) $	$ y^{2/h} - y(2) $	$ y^{4/h} - y(4) $
2^{-4}	0.0647	0.2271	1.5101
2^{-5}	0.0332	0.1176	0.8063
2^{-6}	0.0168	0.0599	0.4170
2^{-7}	0.0085	0.0302	0.2121

Verbesstertes Euler-Verfahren

h	$ y^{1/h} - y(1) $	$ y^{2/h} - y(2) $	$ y^{4/h} - y(4) $
2^{-4}	0.001155	0.003824	0.025969
2^{-5}	0.000294	0.000973	0.006606
2^{-6}	0.000074	0.000245	0.001665
2^{-7}	0.000019	0.000062	0.000418

Trapezmethode

h	$ y^{1/h} - y(1) $	$ y^{2/h} - y(2) $	$ y^{4/h} - y(4) $
2^{-4}	0.0002739	0.0002956	0.0002493
2^{-5}	0.0000685	0.0000740	0.0000618
2^{-6}	0.0000171	0.0000185	0.0000154
2^{-7}	0.0000043	0.0000046	0.0000039

Beispiel 11.22.

Das verbesserte Euler-Verfahren, angewandt auf das System aus Beispiel 11.2 mit $t \in [0, T]$:

$$\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad h := \frac{T}{n}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n-1 :$$

$$\begin{pmatrix} y_1^{j+\frac{1}{2}} \\ y_2^{j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1^j - y_2^j \\ 2y_1^j - 2y_2^j + 3\sin(jh) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1^{j+1} \\ y_2^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1^{j+\frac{1}{2}} - y_2^{j+\frac{1}{2}} \\ 2y_1^{j+\frac{1}{2}} - 2y_2^{j+\frac{1}{2}} + 3\sin((j+\frac{1}{2})h) \end{pmatrix}.$$

In der Tabelle sind für $T = 1, 2, 4$ die Fehler

$$\|y^n - y(T)\|_\infty = \max\{|y_1^n - y_1(T)|, |y_2^n - y_2(T)|\}$$

für einige h -Werte dargestellt.

h	$\ y^{1/h} - y(1)\ _\infty$	$\ y^{2/h} - y(2)\ _\infty$	$\ y^{4/h} - y(4)\ _\infty$
2^{-4}	0.000749	0.002048	0.001140
2^{-5}	0.000188	0.000507	0.000289
2^{-6}	0.000047	0.000126	0.000073
2^{-7}	0.000012	0.000031	0.000018



Einschrittverfahren (ESV)

Bei allen bisher benutzten Verfahren hat man eine Vorschrift

$$\Psi_f : (t_j, y^j, h_j) \rightarrow y^{j+1}.$$

Bei der Trapezregel wird Ψ_f *nicht* durch eine explizite Funktion beschrieben. Diese Verfahren heißen *implizit*. Andere Form:

$$\begin{aligned} y^{j+1} &= \Psi_f(t_j, y^j, h_j) = y^j + h_j \left(\frac{\Psi_f(t_j, y^j, h_j) - y^j}{h_j} \right) \\ &=: y^j + h_j \Phi_f(t_j, y^j, h_j). \end{aligned}$$

Die Abbildung Φ_f heißt *Verfahrens-* oder *Inkrement-Vorschrift*.

Bei expliziten Verfahren kann Φ_f durch eine explizit bekannte Funktion beschrieben werden, und kann man $\Phi_f(t_j, y^j, h_j)$ durch einfaches Einsetzen von (t_j, y^j, h_j) in diese Funktion bestimmen. Bei impliziten Verfahren, hingegen, wird Φ_f *nicht* durch eine explizite Funktion beschrieben, sondern steht für eine *Vorschrift*, deren Ausführung die Lösung von Gleichungssystemen verlangt.

11.5 Fehlerbetrachtungen für Einschrittverfahren

Globaler Diskretisierungsfehler und Konvergenz

Es ist oft bequem, die Folge $\{y^j\}_{j=0}^n$ als Funktion auf dem Gitter $\mathcal{G}_h = \{t_0, \dots, t_n\}$ zu betrachten.

Diese Gitterfunktion wird mit $y_h(\cdot)$ notiert: $y_h(t_j) = y^j$, $j = 0, \dots, n$.

Globaler Diskretisierungsfehler: $e_h(t_j) = y(t_j) - y_h(t_j)$, $j = 0, \dots, n$.

Man ist letztlich am Verhalten von

$$\max_{j=0, \dots, n} \|e_h(t_j)\| =: \|y - y_h\|_\infty$$

für $h \rightarrow 0$ interessiert. Um dies quantifizieren zu können, benutzen wir wieder den Begriff der *Konvergenz(ordnung)* eines Verfahrens:

Ein Verfahren heißt *konvergent* von der Ordnung p , falls

$$\|e_h\|_\infty = \mathcal{O}(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

Der *globale* Fehler $e_h(t_j)$ entsteht durch eine Akkumulation von *lokalen* Fehlern an den Stellen t_0, t_1, \dots, t_{j-1} .

11.5.1 Lokaler Abbruchfehler und Konsistenz

Der lokale Abbruchfehler mißt, wie sehr der durch das numerische Verfahren gelieferte Wert nach *einem* Schritt von der exakten Lösung abweicht.

Sei $y(t; t_a, y^a)$ die Lösung des Problems

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_a) = y^a,$$

und

$$y_h(t_a + h; t_a, y^a) = \Psi_f(t_a, y^a, h) = y^a + h\Phi_f(t_a, y^a, h)$$

das Resultat, das das Einschrittverfahren nach einem Schritt zum Startwert (t_a, y^a) liefert. Dann heißt die Differenz der Werte

$$\delta(t_a, y^a, h) = y(t_a + h; t_a, y^a) - y_h(t_a + h; t_a, y^a)$$

der *lokale Abbruchfehler* (im Intervall $[t_a, t_a + h]$).

Man wählt oft

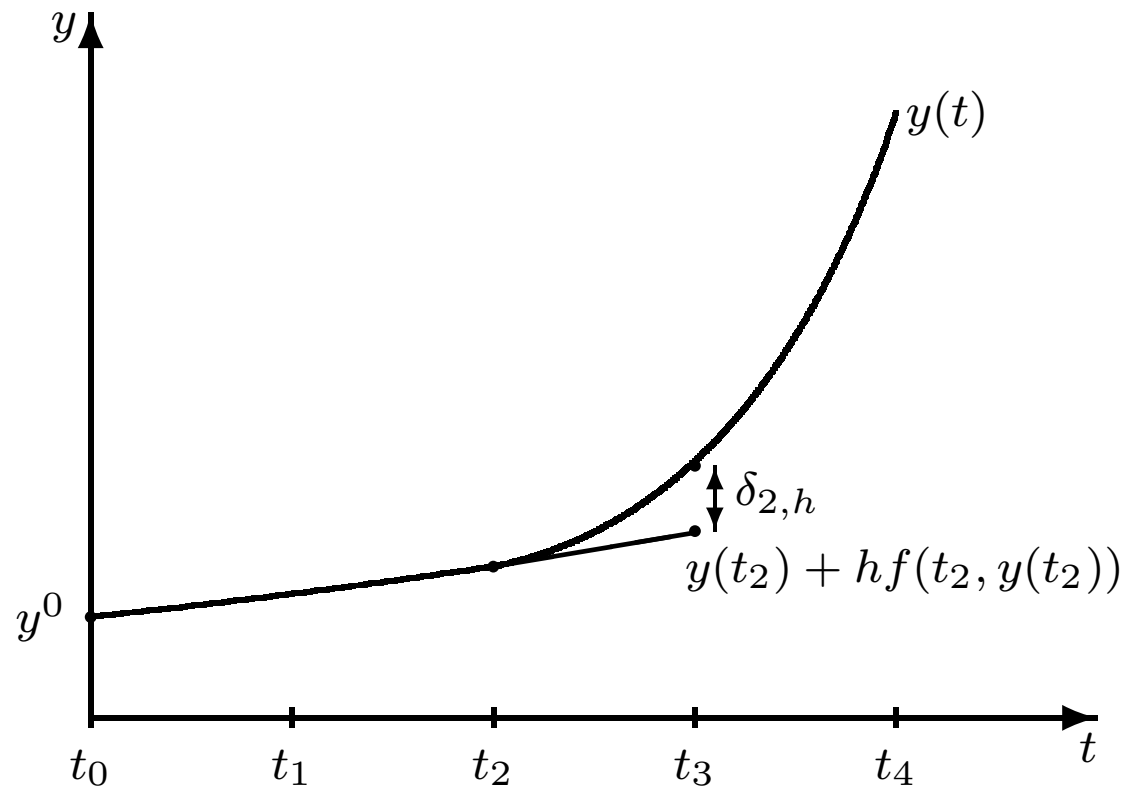
$$(t_a, y^a) = (t_j, y(t_j)).$$

Dann gilt $y(t + h; t_j, y(t_j)) = y(t_{j+1})$ und ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta_{j,h} &:= \delta(t_j, y(t_j), h) = y(t_{j+1}; t_j, y(t_j)) - y_h(t_{j+1}; t_j, y(t_j)) \\ &= y(t_{j+1}) - y(t_j) - h\Phi_f(t_j, y(t_j), h) \end{aligned}$$

Der lokale Abbruchfehler ist also für diese Wahl die Differenz zwischen dem exakten Wert $y(t_{j+1})$ und dem berechneten Wert, falls an der Stelle t_j vom exakten Wert $y(t_j)$ (der globalen Lösung) ausgegangen wird.

Lokaler Abbruchfehler beim Euler-Verfahren:



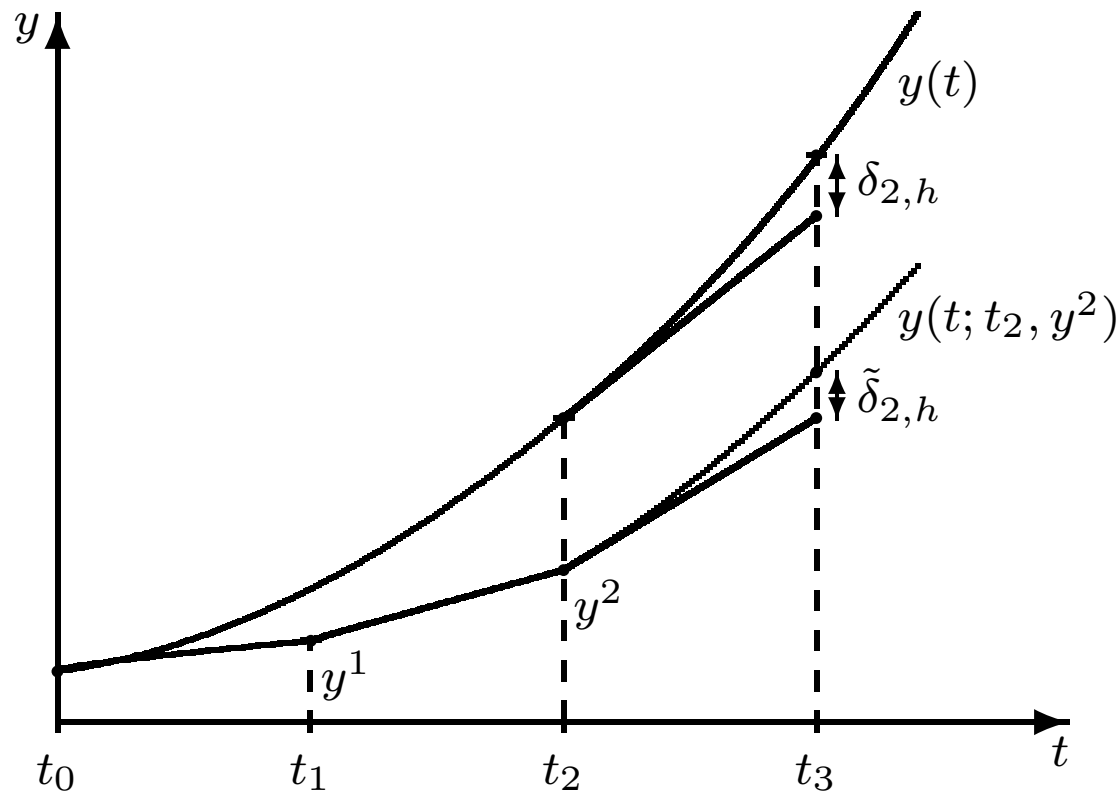
Eine ebenfalls häufig vorkommende Variante ist die Wahl

$$(t_a, y^a) = (t_j, y^j),$$

d.h., als Referenzpunkt wird ein Punkt der diskreten Näherungslösung gewählt.

Für den lokalen Fehler ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_{j,h} &:= \delta(t_j, y^j, h) := y(t_{j+1}; t_j, y^j) - y^{j+1} \\ &= y(t_{j+1}; t_j, y^j) - y^j - h\Phi_f(t_j, y^j, h).\end{aligned}$$



Für eine theoretische Konvergenzanalyse ist die Größe $\delta_{j,h}$ sehr bequem, während für Schätzungen des lokalen Abbruchfehlers in der Praxis die Größe $\tilde{\delta}_{j,h}$ besser geeignet ist.

Unter *Konsistenzfehler* versteht man die Größe

$$\tau(t_a, y^a, h) := \frac{\delta(t_a, y^a, h)}{h} = \frac{y(t_a + h; t_a, y^a) - y_h(t_a + h; t_a, y^a)}{h},$$

bzw. im Fall (11.36) die Kurzschreibweise

$$\tau_{j,h} = \frac{\delta_{j,h}}{h} = \frac{y(t_{j+1}) - y_h(t_{j+1}; t_j, y(t_j))}{h}.$$

Der folgende Begriff der *Konsistenz(ordnung)* als Maß für die Größe des lokalen Abbruchfehlers stellt ein wesentliches Qualifikationskriterium eines Verfahrens dar.

Ein ESV heißt mit der Anfangswertaufgabe (11.3) konsistent von der Ordnung p (oder hat Konsistenzordnung p), falls

$$\|\tau(t_a, y^a, h)\| \leq Ch^p = \mathcal{O}(h^p), \quad h \rightarrow 0,$$

für alle Punkte (t_a, y^a) in einer Umgebung des Lösungsgraphen $\{(t, y(t)) \mid t \in [t_0, T]\}$ von (11.3) gilt.

Bestimmung der Konsistenzordnung:

Eine *allgemeine Strategie* für *explizite* Einschrittverfahren.

Dazu betrachten wir für festes (t_a, y^a) , $\Phi_f(t_a, y^a, h) =: \Phi(h)$ als Funktion der Schrittweite h .

Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned}\tau(t_a, y^a, h) &= \tilde{y}'(t_a) + \frac{h}{2}\tilde{y}''(t_a) + \dots + \mathcal{O}(h^p) \\ &\quad - \left\{ \Phi(0) + h\Phi'(0) + \dots + \mathcal{O}(h^p) \right\} \\ &= \left(\tilde{y}'(t_a) - \Phi(0) \right) + \frac{h}{2} \left(\tilde{y}''(t_a) - 2\Phi'(0) \right) + \frac{h^2}{3!} \left(\tilde{y}'''(t_a) - 3\Phi''(0) \right) \\ &\quad + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} \left(\tilde{y}^{(p)}(t_a) - p\Phi^{(p-1)}(0) \right) + \mathcal{O}(h^p).\end{aligned}$$

Bei Konsistenz der Ordnung p muß demnach

$$\tilde{y}^{(j)}(t_a) = j\Phi^{(j-1)}(0), \quad j = 1, \dots, p,$$

gelten.

Andererseits gilt wegen $\tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t))$ auch $\tilde{y}^{(j)}(t) = \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} f(t, \tilde{y}(t))$, so daß sich folgendes Kriterium ergibt.

Das Verfahren $y^{j+1} = y^j + h_j \Phi_f(t_j, y^j, h_j)$ hat die Konsistenzordnung (mindestens) $p \geq 1$ falls

$$\frac{d^j}{dt^j} f(t, \tilde{y}(t))|_{t=t_a} = (j+1) \Phi_f^{(j)}(t_a, y^a, 0), \quad j = 0, \dots, p-1,$$

gilt.

Beispiel 11.23. (Euler-Verfahren).

Wegen $\Phi_f(t, v, h) = f(t, v)$ folgt

$$\Phi(h) = \Phi_f(t_a, y^a, h) = f(t_a, y^a) = \Phi(0), \quad \text{und} \quad \Phi'(0) = 0.$$

Folglich ist die Konsistenzbedingung lediglich für $p = 1$ erfüllt, das Euler-Verfahren hat somit die Konsistenzordnung $p = 1$. \triangle

Satz 11.25. Falls $f(t, y)$ und $\Phi_f(t, y, h)$ eine Lipschitzbedingung in y erfüllen, gilt für das ESV $y^{j+1} = y^j + h_j \Phi_f(t_j, y^j, h_j)$ folgende Aussage:

Konsistenz der Ordnung $p \Rightarrow$ Konvergenz der Ordnung p .

Konkret gilt folgende Abschätzung:

$$\max_{j=0, \dots, n} \|y(t_j) - y^j\| \leq \left\{ \|y(t_0) - y^0\| + \sum_{j=0}^{n-1} \|\delta_{j,h}\| \right\} e^{\bar{L}(t_n - t_0)},$$

wobei \bar{L} die Lipschitzkonstante für die Verfahrens-Vorschrift Φ_f ist.

Für den Fall exakter Anfangswerte $y^0 = y(t_0)$ ergibt sich aufgrund der Definition des Konsistenzfehlers und wegen $t_n - t_0 = \sum_{j=0}^{n-1} h_j$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \|\delta_{j,h}\| = \sum_{j=0}^{n-1} h_j \|\tau_{j,h}\| \leq (t_n - t_0) \max_{j=0,\dots,n-1} \|\tau_{j,h}\|.$$

Daraus folgt dann tatsächlich

$$\max_{j=0,\dots,n} \|y(t_j) - y^j\| \leq (t_n - t_0) \max_{j=0,\dots,n-1} \|\tau_{j,h}\| e^{\bar{L}(t_n - t_0)},$$

also die in Satz 11.25 behauptete Entsprechung von Konsistenz- und Konvergenzordnung.

Beispiel 11.26.

Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'(t) &= \lambda y(t) + g(t), \quad t \in [0, T], \\y(0) &= y^0,\end{aligned}$$

wobei $\lambda > 0$. Es wird das entsprechende Euler-Verfahren

$$y^{j+1} = y^j + h \left(\lambda y^j + g(t_j) \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n - 1 = \frac{T}{h} - 1$$

mit konstanter Schrittweite h untersucht.

$$\delta_{j,h} = y(t_{j+1}) - y(t_j) - hf(t_j, y(t_j)),$$

und damit

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + h \left(\lambda y(t_j) + g(t_j) \right) + \delta_{j,h}.$$

Für den globalen Diskretisierungsfehler $e_j := y(t_j) - y^j$ ergibt sich die Rekursion

$$e_{j+1} = (1 + h\lambda)e_j + \delta_{j,h}, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}e_1 &= (1 + h\lambda)e_0 + \delta_{0,h} = \delta_{0,h} \\e_2 &= (1 + h\lambda)e_1 + \delta_{1,h} = (1 + h\lambda)\delta_{0,h} + \delta_{1,h} \\e_3 &= (1 + h\lambda)e_2 + \delta_{2,h} = (1 + h\lambda)^2\delta_{0,h} + (1 + h\lambda)\delta_{1,h} + \delta_{2,h} \\&\vdots \\e_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (1 + h\lambda)^i \delta_{n-1-i,h}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ungleichung $\ln(1 + x) \leq x$ für $x \geq -1$ erhält man

$$(1 + h\lambda)^i \leq (1 + h\lambda)^n = e^{n \ln(1+h\lambda)} \leq e^{nh\lambda} = e^{T\lambda} \text{ für } 0 \leq i \leq n.$$

Für den globalen Fehler ergibt sich, wegen $|\delta_{j,h}| \leq ch^2$,

$$|e_n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} (1 + h\lambda)^i |\delta_{n-1-i,h}| \leq e^{T\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} ch^2 = e^{T\lambda} nch^2 = e^{T\lambda} cTh =: Mh.$$

Sei

$$\tilde{y}^{j+1} = \tilde{y}^j + h_j \Phi_f(t_j, \tilde{y}^j, h_j) + r_j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

wobei r_j der bei der Auswertung von $\Phi_f(t_j, \tilde{y}^j, h_j)$ auftretende Fehler ist. Es gilt:

$$\max_{j=0, \dots, n} \|y(t_j) - \tilde{y}^j\| \leq \left\{ \|y(t_0) - y^0\| + \sum_{j=0}^{n-1} (\|\delta_{j,h}\| + \|r_j\|) \right\} e^{\bar{L}(t_n - t_0)}.$$

Dieses Resultat zeigt die kontrollierte Fehlerfortpflanzung (nämlich höchstens Aufsummierung) sowohl von Konsistenzfehlern als auch von anderen Störungen. In diesem Sinne ist jedes ESV stabil:

Stabilität von Einschrittverfahren:

Datenfehler ($\|y(t_0) - y^0\|$), Konsistenzfehler und Störungen bei der Durchführung der Vorschrift $\Phi_f(t_j, y^j, h_j)$ werden kontrolliert (höchstens aufsummiert).

11.6 Runge-Kutta-Einschrittverfahren

Man sucht eine Quadratur-Formel

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds \approx h \sum_{j=1}^m \gamma_j k_j,$$

wobei γ_j geeignete Gewichte sind und

$$k_j \approx f(s_j, y(s_j)), \quad j = 1, \dots, m.$$

Dies führt zu den *m*-stufigen RK-Verfahren der Form

$$y^{j+1} = y^j + h \sum_{j=1}^m \gamma_j k_j.$$

Im allgemeinen geht es also unter anderem um Folgendes:

Zu gegebenem m konstruiere geeignete „Hilfsrichtungen“ k_j so, daß

- eine möglichst hohe Konsistenzordnung p erreicht wird;
- die resultierende Verfahrens-Vorschrift $\Phi_f = \sum_{j=1}^m \gamma_j k_j$ eine Lipschitzbedingung in y erfüllt.

Algorithmus 11.28 (Klassisches Runge-Kutta-Verfahren):

Gegeben: Schrittweiten $(h_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ mit $\sum_{j=0}^{n-1} h_j = T - t_0$.

Berechne für $j = 0, \dots, n-1$:

$$t_{j+1} = t_j + h \quad (h = h_j)$$

$$k_1 = f(t_j, y^j)$$

$$k_2 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y^j + \frac{h}{2}k_1\right)$$

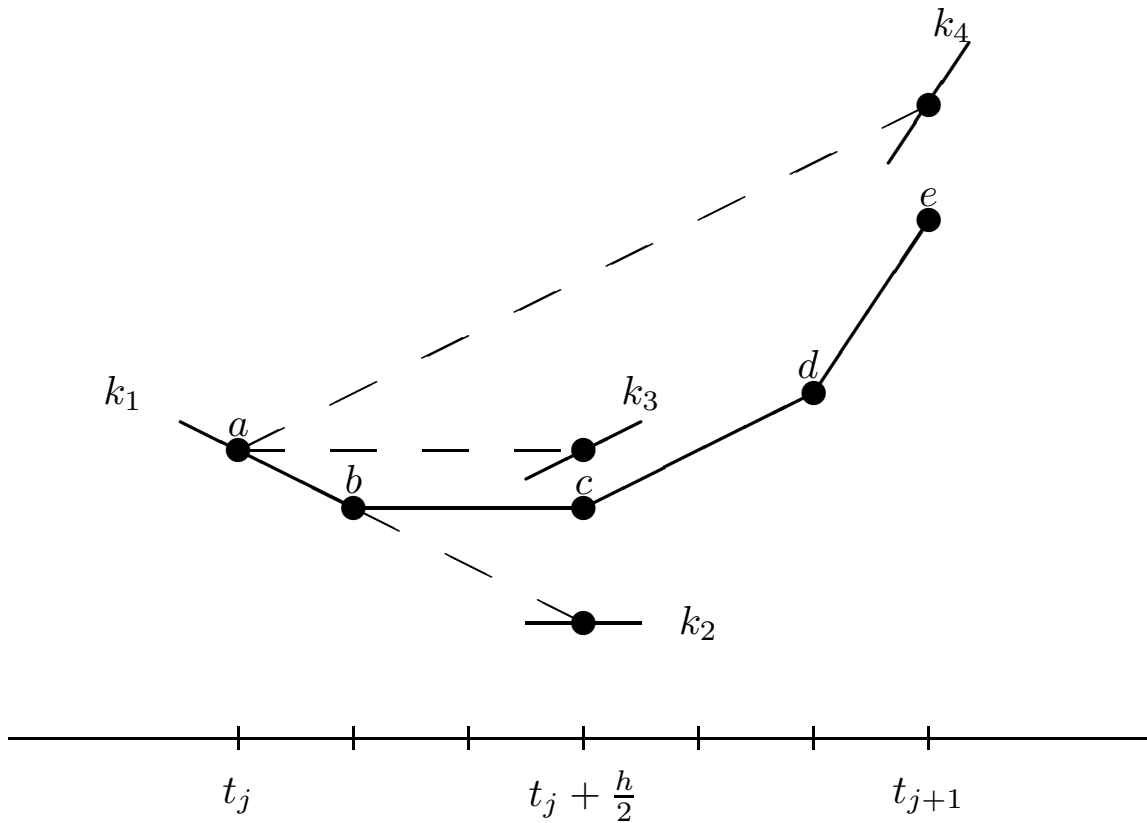
$$k_3 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y^j + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_j + h, y^j + hk_3)$$

$$y^{j+1} = y^j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \ .$$

Das klassische RK-Verfahren hat die Konsistenzordnung $p = 4$.

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren:



$$\begin{aligned} a &= y^j \\ b &= a + \frac{h}{6}k_1 \\ c &= b + \frac{h}{3}k_2 \\ d &= c + \frac{h}{3}k_3 \\ e &= d + \frac{h}{6}k_4 = y^{j+1} \end{aligned}$$

Die (verbesserte) Euler-Methode und das klassische RK-Verfahren sind Spezialfälle folgender Klasse:

m-stufige Runge-Kutta-Verfahren

Gegeben: Gewichte $\alpha_i, \gamma_i, 1 \leq i \leq m$ und $\beta_{i,l}, 1 \leq i, l \leq m$;
Schrittweiten $(h_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ mit $\sum_{j=0}^{n-1} h_j = T - t_0$.

Berechne für $j = 0, \dots, n-1$:

$$t_{j+1} = t_j + h \quad (h := h_j)$$

$$k_i = f\left(t_j + \alpha_i h, y^j + h \sum_{\ell=1}^m \beta_{i,\ell} k_\ell\right), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y^{j+1} = y^j + h \sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell k_\ell .$$

Die Gewichte sind dabei so zu wählen, daß das Verfahren möglichst hohe Genauigkeit liefert (hohe Konsistenzordnung).

Üblicherweise ordnet man die Gewichte in einer Tabelle an, dem sogenannten *Butcher-Tableau*,

$$\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,m} \\ \alpha_2 & \beta_{2,1} & & \beta_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m & \beta_{m,1} & & \beta_{m,m} \\ \hline & \gamma_1 & \cdots & \gamma_m \end{array}$$

11.6.1 Explizite RK-Verfahren

Die Lösung von Gleichungssystemen entfällt, falls die k_i nur von k_1, \dots, k_{i-1} abhängen, d.h., wenn

$$\beta_{i,l} = 0, \quad l = i, i+1, \dots, m$$

gilt. Man spricht dann von *expliziten* RK-Verfahren.

Gewichte eines expliziten RK-Verfahrens

α_1					
α_2	$\beta_{2,1}$				
\vdots	$\beta_{3,1}$	$\beta_{3,2}$			
\vdots	\vdots		\dots		
α_m	$\beta_{m,1}$	\dots	\dots	$\beta_{m,m-1}$	
	γ_1	γ_2	\dots	\dots	γ_m

Euler-Verfahren: $m = 1$

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

verbessertes Euler-Verfahren: $m = 2$

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array}$$

klassisches RK-Verfahren: $m = 4$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Eingebettete RK-Verfahren (Fehlerschätzung)

0							
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$						
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{32}$					
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$				
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$			
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$		nur bei RK5
(a)	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$		γ_i bei RK4
(b)	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$	$\tilde{\gamma}_i$ bei RK5

$$y^{j+1} = y^j + h \sum_{\ell=1}^5 \gamma_{\ell} k_{\ell}, \quad \bar{y}^{j+1} = y^j + h \sum_{\ell=1}^6 \tilde{\gamma}_{\ell} k_{\ell}$$

$$\tilde{\delta}_{j,h} = y(t_{j+1}; t_j, y^j) - y^{j+1} \approx \bar{y}^{j+1} - y^{j+1}.$$

Stetige Runge-Kutta-Verfahren

Oft ist man nicht nur an den berechneten Annäherungen $y^j = y_h(t_j)$ zu den Zeitpunkten t_j interessiert, sondern möchte man auch Annäherungswerte für t -Werte zwischen diesen diskreten Zeitpunkten haben.

$$y^{j+\theta} := y^j + h \sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell(\theta) k_\ell, \quad \theta \in [0, 1],$$

als Approximation für $y(t_j + \theta h)$. Die Richtungen k_i werden durch θ -unabhängige Gleichungen bestimmt:

$$k_i = f(t_j + \alpha_i h, y^j + h \sum_{\ell=1}^{i-1} \beta_{i,\ell} k_\ell), \quad i = 1, \dots, m.$$

Das Butcher-Tableau hat die Form

α_1					
α_2	$\beta_{2,1}$				
\vdots	$\beta_{3,1}$	$\beta_{3,2}$			
\vdots	\vdots		\dots		
α_m	$\beta_{m,1}$	\dots	\dots	$\beta_{m,m-1}$	
	$\gamma_1(\theta)$	$\gamma_2(\theta)$	\dots	\dots	$\gamma_m(\theta)$

Beispiel 11.31.

Das 3-stufige Runge-Kutta-Verfahren von Heun in der Tabelle (links) hat Konsistenzordnung 3.

Dieses Verfahren hat eine stetige Erweiterung mit Konsistenzordnung 2 gleichmäßig in $\theta \in [0, 1]$.

0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
	$\gamma_1(\theta)$	$\gamma_2(\theta)$	$\gamma_3(\theta)$

$$\gamma_1(\theta) := 1\frac{1}{2}\theta^3 - 2\frac{1}{4}\theta^2 + \theta$$

$$\gamma_2(\theta) := 3\theta^2(1 - \theta)$$

$$\gamma_3(\theta) := \frac{3}{4}\theta^2(2\theta - 1)$$

△

Ordnung expliziter RK-Verfahren

Bei expliziten RK-Verfahren läßt sich bei m Stufen für $m \geq 8$ (nur) maximal die Ordnung $p = m - 2$ erreichen.

Einige im Verhältnis zur Stufe m höchstmöglich erreichbaren Ordnungen $p(m)$ sind in folgender Tabelle angegeben.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	$m \geq 9$
$p(m)$	1	2	3	4	4	5	6	6	$\leq m - 2$

Die Verfahren werden aber sehr kompliziert, und die Vorteile der hohen Ordnung werden zum Teil durch die benötigte hohe Anzahl der Funktionsauswertungen wieder aufgehoben.

Explizite m -stufige RK-Verfahren mit $4 \leq m \leq 7$ werden in der Praxis viel benutzt.

Konvergenz expliziter RK-Verfahren

Aufgrund von Satz 11.25 muß nur noch sichergestellt werden, daß die Verfahrens-Vorschrift eines expliziten RK-Verfahrens eine Lipschitzbedingung erfüllt.

Bemerkung 11.34. Falls $f(t, y)$ eine Lipschitzbedingung in y erfüllt, so genügt auch die Verfahrens-Vorschrift

$$\Phi_f(t, y, h) = \sum_{j=1}^m \gamma_j k_j(t, y, h)$$

eines m -stufigen expliziten RK-Verfahrens einer Lipschitzbedingung.
Das Verfahren konvergiert dann mit der Konsistenzordnung.

11.6.2 Implizite RK-Verfahren

Bei impliziten RK-Verfahren ist die Realisierung hoher Ordnung im Vergleich einfacher. Beispielsweise gilt folgendes Ergebnis:

Satz 11.35. Die Funktion f erfülle eine Lipschitzbedingung in y . Wählt man zu paarweise verschiedenen $\alpha_j \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, m$, die Parameter $\gamma_j \neq 0$, $\beta_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq m$, so daß für $r \geq m + 1$ die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i \alpha_i^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \dots, r, \quad (3)$$

sowie

$$\sum_{i=1}^m \beta_{j,i} \alpha_i^{k-1} = \frac{\alpha_j^k}{k}, \quad 1 \leq k, j \leq m, \quad (4)$$

gelten, dann ist das zugehörige RK-Verfahren konsistent von der Ordnung $p = r$.

Die Quadraturformel

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i g(\alpha_i) \approx \int_0^1 g(s) ds$$

ist exakt vom Grade $r - 1$ genau dann, wenn die Gleichungen (3) erfüllt sind. Um ein hohes r zu erreichen, wählt man die Stützstellen α_i und Gewichte γ_i wie in einer Gauss-Quadraturformel, so daß die Methode den maximalen Exaktheitsgrad $2m - 1$ hat.

Die Bedingungen (3) sind dann erfüllt für $r = 2m$.

Mit diesen Werten für die Stützstellen α_i bilden die Bedingungen (4) ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $(\beta_{j,i})_{1 \leq j, i \leq m}$.

Die sich ergebende implizite RK-Methode, ein sogenanntes **RK-Gauß-Verfahren**, hat die Konsistenzordnung $2m$.

Man kann zeigen, daß das die *maximale Konsistenzordnung* für ein m -stufiges RK-Verfahren ist.

Beispiel 11.36.

Die RK-Gauß-Verfahren für $m = 1$ (Konsistenzordnung 2) und $m = 2$ (Konsistenzordnung 4) sind

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3}) & \frac{1}{4} & \frac{1}{12}(3 - 2\sqrt{3}) \\ \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3}) & \frac{1}{12}(3 + 2\sqrt{3}) & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Das obige einstufige RK-Gauß-Verfahren stimmt mit der in Bemerkung 11.20 behandelten Mittelpunkregel überein. \triangle

11.7 Schrittweitensteuerung bei Einschrittverfahren

Ziel:

$$\|y(T) - y_h(T)\| \leq (T - t_0)\epsilon .$$

Man benutzt als *Ansatz* für die Schrittweitensteuerung *die Annahme*

$$\|y(T) - y_h(T)\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|\tilde{\delta}_{j,h}\| ,$$

Falls

$$\|\tilde{\delta}_{j,h}\| \leq (t_{j+1} - t_j)\epsilon$$

gilt, erhält man

$$\sum_{j=0}^{n-1} \|\tilde{\delta}_{j,h}\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)\epsilon = (T - t_0)\epsilon .$$

Deshalb folgendes Kriterium:

Ist $h = t_{j+1} - t_j$ die momentane Schrittweite, so darf der lokale Fehler $\|\tilde{\delta}_{j,h}\|$ im Schritt $j \rightarrow j + 1$ höchstens $h\epsilon$ sein. Andererseits sollte diese Spannweite möglichst ausgeschöpft werden.

Zur Annäherung von $\tilde{\delta}_{j,h}$ kann man zum Beispiel folgende Strategien verwenden:

(i) Ausgehend von t_j und y_j berechne

- einen Schritt mit der Schrittweite h . Das Resultat wird mit y^{j+1} bezeichnet.
- zwei Schritte mit der Schrittweite $\frac{h}{2}$. Das Resultat wird mit \hat{y}^{j+1} bezeichnet.

Man erhält den Schätzer ($\tilde{y}(t_{j+1}) := y(t_{j+1}; t_j, y^j)$)

$$\tilde{y}(t_{j+1}) - \hat{y}^{j+1} \doteq \frac{1}{2^p - 1} (\hat{y}^{j+1} - y^{j+1})$$

für den lokalen Abbruchfehler $\tilde{\delta}_{j,h}$.

(ii) Eingebettete RK-Verfahren liefern zwei Ergebnisse, deren Differenz als Schätzer dienen kann.

Beispiel 11.38.

Wir betrachten die Van der Pol-Gleichung

$$y''(t) = 8(1 - y(t)^2) y'(t) - y(t), \quad t \in [0, 30],$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

Dieses Anfangswertproblem 2. Ordnung läßt sich als System

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ 8(1 - y_1(t)^2) y_2(t) - y_1(t) \end{pmatrix}$$

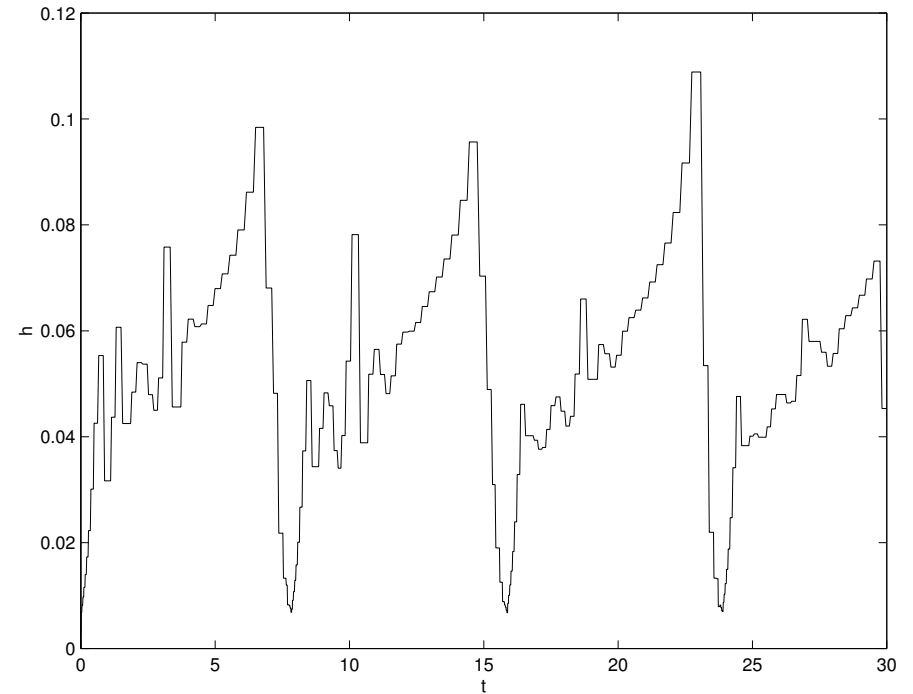
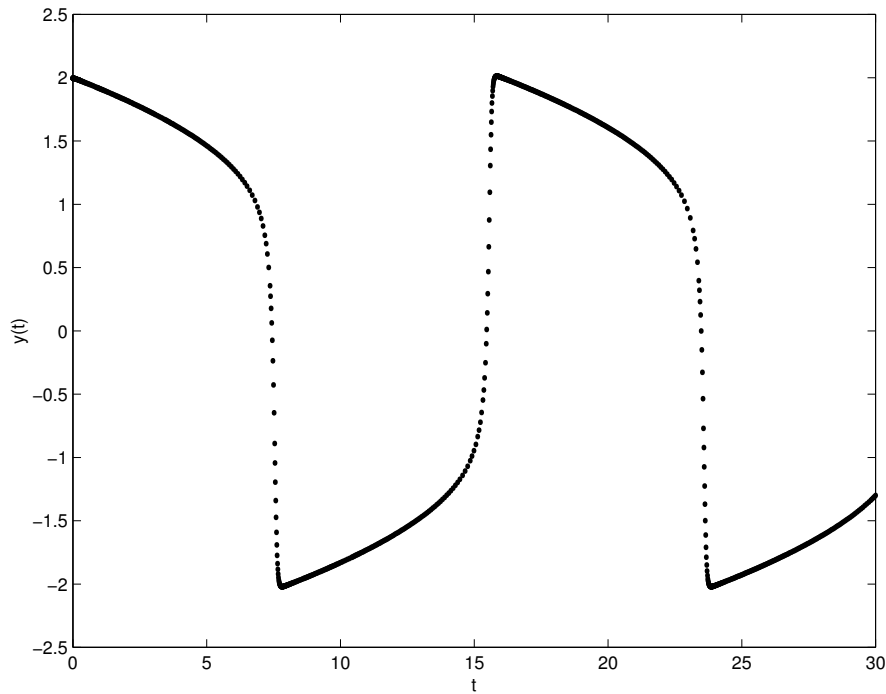
erster Ordnung mit dem Anfangswert

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

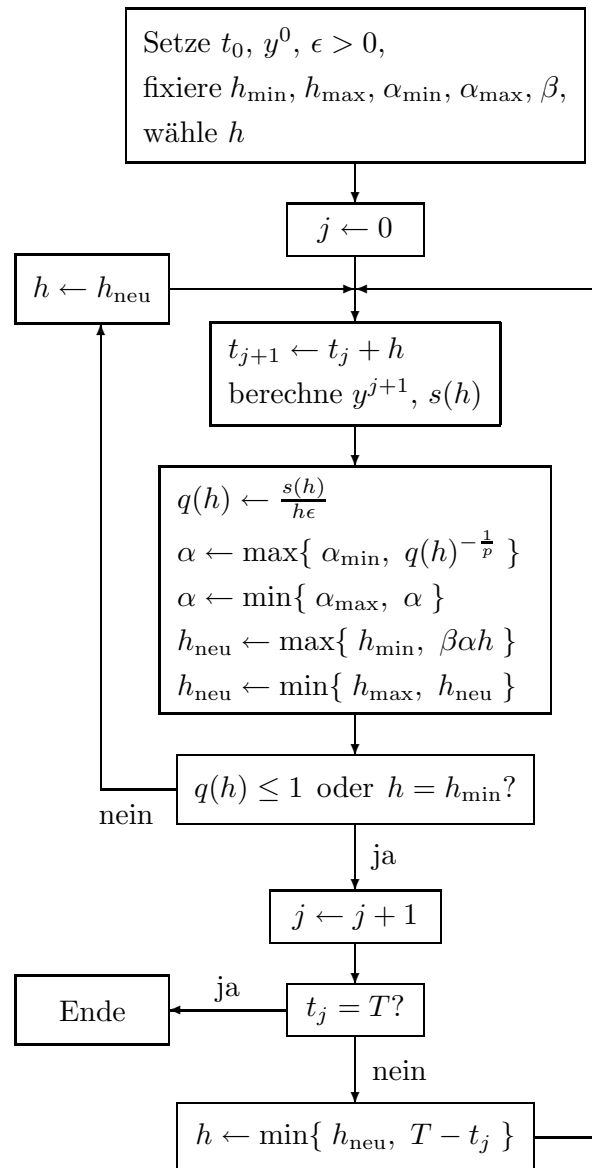
formulieren.

Das Problem wird mit einem RKF45-Verfahren gelöst, wobei eine adaptive Schrittweitensteuerung wie in (ii) verwendet wird.

Numerische Lösung $y(t) = y_1(t)$ und Schrittweite $h = h_j$.



Schrittweitensteuerung bei ESV der Ordnung p :



11.8 Mehrschrittverfahren

Die allgemeine Form eines k -Schrittverfahrens lautet

$$y^{j+k} = \Phi_h \left(t_{j+k-1}, y^j, y^{j+1}, \dots, y^{j+k} \right), \quad j = 0, \dots, n - k .$$

Ein lineares k -Schrittverfahren hat die Form

$$\sum_{\ell=0}^k a_{\ell} y^{j+\ell} = h \sum_{\ell=0}^k b_{\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}), \quad j = 0, \dots, n - k, \quad (5)$$

Man benötigt k Anlaufwerte y^0, \dots, y^{k-1} .

Diese Anlaufwerte werden in der Regel mit einem Einschrittverfahren (z.B. RK-Verfahren) berechnet.

O.B.d.A.:

$$a_k = 1.$$

- **Adams-Bashforth-Verfahren**

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-2} = 0, \quad a_{k-1} = -1, \quad b_k = 0,$$

$$\text{also} \quad y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^{k-1} b_{\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}).$$

- **Adams-Moulton-Verfahren**

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-2} = 0, \quad a_{k-1} = -1, \quad b_k \neq 0,$$

$$\text{also} \quad y^{j+k} = y^{j+k-1} + h \sum_{\ell=0}^k b_{\ell} f(t_{j+\ell}, y^{j+\ell}).$$

- **Rückwärtsdifferenzenmethoden**

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 0, \quad b_k \neq 0,$$

$$\text{also} \quad y^{j+k} = - \sum_{\ell=0}^{k-1} a_{\ell} y^{j+\ell} + h b_k f(t_{j+k}, y^{j+k}).$$

Lokaler Abbruchfehler:

$$\delta_{j+k-1,h} := y(t_{j+k}) - y_h(t_{j+k}) ,$$

wobei $y_h(t_{j+k})$ das Resultat des linearen Mehrschrittverfahrens mit $y^{j+\ell} = y(t_{j+\ell})$, $\ell = 0, \dots, k-1$, ist.

Unter dem Konsistenzfehler $\tau_{j+k-1,h}$ versteht man wieder $\delta_{j+k-1,h}/h$.

Wie bei ESV ist die *Konsistenzordnung* p durch

$$\|\tau_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^p), \quad h \rightarrow 0, \quad j = k-1, \dots, n-1,$$

definiert.

Satz 11.40. Das lineare Mehrschrittverfahren ist konsistent von der Ordnung p genau dann, wenn die folgenden $p+1$ Bedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{\ell=0}^k a_{\ell} = 0,$$

$$\sum_{\ell=0}^k \ell a_{\ell} - b_{\ell} = 0,$$

$$\sum_{\ell=0}^k \left(\ell^{\nu} a_{\ell} - \nu \ell^{\nu-1} b_{\ell} \right) = 0, \quad \nu = 2, \dots, p.$$

Für ein lineares k -Schrittverfahren ist die (hohe) Konsistenzordnung $p = 2k$ relativ einfach realisierbar. Wir werden jedoch später sehen, daß man diesen Rahmen aus Stabilitätsgründen nicht ausschöpfen kann.

11.8.2 Adams-Bashforth-Verfahren

Beruhet auf der Diskretisierung der Integralgleichung

$$y(t_{j+k}) = y(t_{j+k-1}) + \int_{t_{j+k-1}}^{t_{j+k}} f(s, y(s)) ds$$

an den Stützstellen $t_{j+k-1}, t_{j+k-2}, \dots, t_j$ mit Hilfe von Newton-Cotes-Formeln.

Für $k = 1, \dots, 5$ sind die Koeffizienten:

k	ℓ	0	1	2	3	4	Kons.ordnung
1	$b_{1,\ell}$	1					1
2	$2b_{2,\ell}$	-1	3				2
3	$12b_{3,\ell}$	5	-16	23			3
4	$24b_{4,\ell}$	-9	37	-59	55		4
5	$720b_{5,\ell}$	251	-1274	2616	-2774	1901	5

Beispiel 11.43.

Zur Illustration sei der Fall $k = 2$ untersucht. Das Integral

$$\int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} f(s, y(s)) ds =: \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} g(s) ds =: I(g)$$

wird mit Hilfe der Newton-Cotes-Formel zu den Stützstellen t_{j+1}, t_j angenähert:

$$P(g|t_j, t_{j+1})(s) = \frac{t_{j+1} - s}{h} g(t_j) + \frac{s - t_j}{h} g(t_{j+1})$$

Die entsprechende Newton-Cotes-Quadraturformel $I_1(g) \approx I(g)$ erhält man über

$$\begin{aligned} I_1(g) &= \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} P(g|t_j, t_{j+1})(s) ds \\ &= g(t_j) \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} \frac{t_{j+1} - s}{h} ds + g(t_{j+1}) \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} \frac{s - t_j}{h} ds \\ &= -\frac{1}{2} h g(t_j) + \frac{3}{2} h g(t_{j+1}). \end{aligned}$$

△

Die Adams-Bashforth-Formeln sind **explizit**.

Eine weitere offensichtliche Eigenschaft:

Pro Integrationsschritt ist nur **eine einzige Funktionsauswertung** $f(t_{j+k-1}, y^{j+k-1})$ erforderlich, da die vorhergehenden Werte $f(t_{j+k-2}, y^{j+k-2}), \dots, f(t_j, y^j)$ bereits berechnet worden sind.

Jede Änderung der Schrittweite erfordert die Berechnung zusätzlicher Punkte der Lösungskurve, die nicht in das durch die alte Schrittweite bestimmte Raster fallen.

Deshalb ist eine Schrittweitenänderung bei Mehrschrittverfahren viel schwieriger durchführbar als bei einem Einschrittverfahren.

11.8.3 Adams-Moulton-Verfahren

Zur näherungsweise Berechnung des Integrals in

$$y(t_{j+k}) = y(t_{j+k-1}) + \int_{t_{j+k-1}}^{t_{j+k}} f(s, y(s)) ds$$

soll zusätzlich zu den bekannten Werten an den Stellen t_{j+k-1}, \dots, t_j auch noch der unbekannte Wert $f(t_{j+k}, y^{j+k})$ an der Stützstelle t_{j+k} mitverwendet werden.

Für $k = 1, \dots, 4$ sind die Koeffizienten:

k	l	0	1	2	3	4	Konsistenzordnung
1	$2 b_{1,l}$	1	1				2
2	$12 b_{2,l}$	-1	8	5			3
3	$24 b_{3,l}$	1	-5	19	9		4
4	$720 b_{4,l}$	-19	106	-264	646	251	5

Beispiel 11.45.

Dies sei für den Fall $k = 1$ konkret verifiziert. Das Integral

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds =: \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s) ds =: I(g)$$

wird mit Hilfe der Newton-Cotes-Formel zu den Stützstellen t_j, t_{j+1} angenähert:

$$I_1(g) = \frac{1}{2}h \left(g(t_j) + g(t_{j+1}) \right).$$

Das Integral $\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds$ wird durch die Annäherung

$$h \left(\frac{1}{2}f(t_j, y(t_j)) + \frac{1}{2}f(t_{j+1}, y(t_{j+1})) \right)$$

ersetzt, also $b_{1,0} = b_{1,1} = \frac{1}{2}$. Mit Hilfe von

$$I(g) - I_1(g) = -\frac{1}{12}h^3 g''(\xi)$$

ergibt sich, für den lokalen Abbruchfehler

$$\delta_{j,h} = \mathcal{O}(h^3).$$

△

Aufgrund des Exaktheitsgrades der verwendeten Quadraturformeln kann man Folgendes schließen.

Bemerkung 11.46.

Die Adams-Bashforth-Verfahren haben die Ordnung $p = k$.

Die Adams-Moulton-Verfahren haben die Ordnung $p = k + 1$.

Die Adams-Moulton-Formeln sind *implizit*.

11.8.4 Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Seien y^0, y^1, \dots, y^j die berechneten Näherungen für $t = t_0, t_1, \dots, t_j$.

- *Prädiktor:* Bestimme Startwert $y^{j+1,0}$ mit Hilfe eines k_1 -Schritt-Adams-Bashforth-Verfahrens:

$$y^{j+1,0} = y^j + h \sum_{m=0}^{k_1-1} b_{k_1, k_1-1-m} f(t_{j-m}, y^{j-m}).$$

- *Korrektor:* In einem k_2 -Schritt-Adams-Moulton-Verfahren wird y^{j+1} iterativ über M Iterationen einer Fixpunktiteration angenähert: Für $i = 0, 1, 2, \dots, M$:

$$y^{j+1, i+1} = y^j + h b_{k_2, k_2} f(t_{j+1}, y^{j+1, i}) +$$
$$h \sum_{m=0}^{k_2-1} b_{k_2, k_2-1-m} f(t_{j-m}, y^{j-m});$$
$$y^{j+1} := y^{j+1, M+1}$$

Die Methode hat die Konsistenzordnung

$$\min\{k_1 + 1 + M, k_2 + 1\}.$$

Deswegen wählt man in der Praxis häufig $k_2 = k_1$ und $M = 0$.

Beispiel 11.47.

Für den Fall $k_1 = k_2 = 3$, $M = 0$ ergibt sich das (explizite) Prädiktor-Korrektor-Verfahren (ABM3)

$$y^{j+1,0} = y^j + \frac{h}{12} \left(23f(t_j, y^j) - 16f(t_{j-1}, y^{j-1}) + 5f(t_{j-2}, y^{j-2}) \right)$$

$$y^{j+1,1} = y^j + \frac{h}{24} \left(9f(t_{j+1}, y^{j+1,0}) + 19f(t_j, y^j) \right. \\ \left. - 5f(t_{j-1}, y^{j-1}) + f(t_{j-2}, y^{j-2}) \right)$$

$$y^{j+1} := y^{j+1,1}.$$

△

Beispiel 11.48.

Wir betrachten das skalare Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y - (\lambda + 1)e^{-t}, \quad t \in [0, 2], \quad y(0) = 1,$$

mit einer Konstante $\lambda < 0$.

Die Lösung dieses Problems ist $y(t) = e^{-t}$.

Auf dieses Problem wird das 4-Schritt-Adams-Bashforth-Verfahren (AB4) und das Prädiktor-Korrektor-Verfahren (ABM3) angewandt.

h	$\lambda = -2, y^{2/h} - e^{-2} $		$\lambda = -20, y^{2/h} - e^{-2} $	
	AB4	ABM3	AB4	ABM3
2^{-3}	1.17e-05	8.93e-06	1.40e+07	2.40e-01
2^{-4}	6.69e-07	5.04e-07	3.31e+09	6.10e-07
2^{-5}	4.03e-08	2.99e-08	8.85e+07	2.57e-08
2^{-6}	2.48e-09	1.82e-09	4.38e-07	1.36e-09
2^{-7}	1.53e-10	1.13e-10	9.36e-12	7.91e-11

Die Kombination einer k -Schritt-AB-Methode (Ordnung k) mit einer k -Schritt-AM-Methode (Ordnung $k + 1$), wobei nur eine Iteration der Fixpunktiteration im Korrektor (d.h. $M = 0$) berechnet wird, hat folgende Eigenschaften:

- Die Konsistenzordnung ist $k + 1$.
- Es sind zwei Funktionsauswertungen pro Integrationsschritt erforderlich.
- Die Methode hat wesentlich bessere Stabilitätseigenschaften als die $(k + 1)$ -Schritt-Adams-Bashforth-Methode.

11.8.5 Konvergenz von linearen Mehrschrittverfahren

Im Gegensatz zu ESV impliziert die Konsistenz bei k -Schrittverfahren für $k > 1$ noch *nicht* die Konvergenz.

Beispiel 11.49. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t) - 2 \sin t, \quad t \in [0, 4], \quad y(0) = 1,$$

mit Lösung $y(t) = \sin t + \cos t$.

Wir verwenden das lineare 2-Schrittverfahren

$$y^{j+2} = -4y^{j+1} + 5y^j + h(4f(t_{j+1}, y^{j+1}) + 2f(t_j, y^j)).$$

Diese Methode hat die Konsistenzordnung 3.

Einige Ergebnisse:

h	$ y^{1/h} - y(1) $	$ y^{2/h} - y(2) $	$ y^{4/h} - y(4) $
2^{-2}	0.0094	2.87	3.3e+5
2^{-3}	0.286	6.1e+4	2.7e+15
2^{-4}	6.4e+3	5.4e+14	3.7e+36

Sei

$$\rho(z) = \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} z^{\ell},$$

das sogenannte *charakteristische Polynom*

Definition 11.50. Das lineare k -Schrittverfahren heißt **nullstabil**, falls die **Wurzelbedingung** gilt:

Ist $\rho(z) = 0$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$|z_0| \leq 1 ,$$

und darüberhinaus, falls z_0 eine mehrfache Nullstelle ist,

$$|z_0| < 1.$$

Bei einem linearen ESV hat man stets $\rho(z) = z - 1$.

Bei Adams-Bashforth- und Adams-Moulton-Verfahren hat man

$$\rho(z) = z^k - z^{k-1} = z^{k-1}(z - 1).$$

Aus Satz 11.25 folgt, daß konsistente lineare 1-Schrittverfahren stets konvergent sind.

Folgender Satz ist eine Verallgemeinerung dieses Resultats.

Satz 11.51. Ein konsistentes Mehrschrittverfahren ist genau dann *konvergent*, wenn es *nullstabil* ist. Im Falle der Konvergenz gilt

$$\text{Konvergenzordnung} = \text{Konsistenzordnung}.$$

Bemerkung 11.52. Bei einem k -Schritt-Verfahren werden die k Anlaufwerte y^0, \dots, y^{k-1} üblicherweise mit einem ESV bestimmt. Dies muß genügend hohe Ordnung haben, um die Genauigkeit der Folge-rechnung zu gewährleisten. △

Bei linearen Mehrschrittverfahren ist die (hohe) Konsistenzordnung $p = 2k$ im Prinzip realisierbar.

Folgendes Resultat erklärt, weshalb jedoch (aus Stabilitätsgründen) lineare k -Schrittverfahren mit Konsistenzordnung $p \geq k + 3$ nie verwendet werden.

Satz 11.54. Für jedes lineare nullstabile k -Schrittverfahren mit Konsistenzordnung p gilt:

$$\begin{aligned} p &\leq k + 2 && \text{für } k \text{ gerade,} \\ p &\leq k + 1 && \text{für } k \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Diese Schranken sind scharf.

11.9 Steife Systeme

Steifen Systemen von Differentialgleichungen begegnet man bei Prozessen mit *stark unterschiedlichen Abklingzeiten*.

Beispiele: Diffusions-, Wärmeleitungsvorgänge, chemische Reaktionen. Wir betrachten zunächst das lineare System

$$z' = Az + b, \quad z(0) = z^0.$$

Ist insbesondere A diagonalisierbar, d.h., existiert eine Matrix T mit $T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, so erhält man aus

$$T^{-1}z' = T^{-1}ATT^{-1}z + T^{-1}b \quad \text{mit} \quad y = T^{-1}z$$

das System

$$y' = \Lambda y + T^{-1}b$$

von entkoppelten skalaren Gleichungen der Form

$$y' = \lambda y + c.$$

Das ursprüngliche Problem bezeichnet man als *steif*, falls

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0, \quad \max_{i,j} \frac{|\lambda_i|}{|\lambda_j|} \gg 1.$$

Beispiel 11.55.

Das Wärmeleitungsproblem ergibt ein System von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$y' = Ay$$

Hierbei ist A die symmetrische Tridiagonalmatrix aus (11.9). Weil A symmetrisch ist, existiert eine Matrix T mit

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_x-1}).$$

Nun lassen sich die Eigenwerte λ_j von A explizit angeben:

$$\lambda_j = -\frac{4\kappa}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{j\pi}{2n_x}\right), \quad j = 1, 2, \dots, n_x - 1.$$

Daraus folgt

$$\max_{i,j} \frac{|\lambda_i|}{|\lambda_j|} = \frac{|\lambda_{n_x-1}|}{|\lambda_1|} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{2n_x}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2n_x}\right)} \approx \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2n_x}\right)^2} = \frac{4}{\pi^2} n_x^2,$$

also ist das System für $\frac{h_x}{\ell} = \frac{1}{n_x} \ll 1$ steif. △

Beispiel 11.56.

Chemische Reaktionsprozesse, bei denen die Reaktionsgeschwindigkeitskonstanten stark unterschiedliche Größenordnungen haben, führen auf ein steifes System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

In Beispiel 11.4 ist dies der Fall.

Die Jacobi-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ des Modells $y'(t) = f(y)$ in (11.4) hat für $t = 0$ die Eigenwerte

$$\sigma(f'(y(0))) = \{0, -2.1 \cdot 10^4, -7.5 \cdot 10^{-10} \pm i 9.1 \cdot 10^{-4}\},$$

wobei der Eigenwert 0 dreifach ist.

△

Die Anwendung eines *expliziten Einschrittverfahrens* auf das Problem

$$y' = \lambda y, \quad \text{mit } \lambda < 0, \quad (\text{Lösung: } y(t) = c e^{\lambda t}),$$

führt auf eine Rekursion

$$y^{j+1} = g(h\lambda) y^j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

wobei die *Stabilitätsfunktion* g vom Verfahren abhängt. Es gilt:

$g(z) = 1 + z$	Euler-Verfahren,
$g(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$	verb. Euler-Verfahren,
$g(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$	klassisches RK-Verfahren,

d.h., $g(z)$ ist in diesen Beispielen gerade eine abgebrochene Potenzreihe von e^z , also ein *Polynom*.

Es gilt $e^x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$, jedoch $p(x) \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow -\infty$, für jedes Polynom p . Daraus folgt:

Explizite ESV sind zur Behandlung steifer Probleme ungeeignet. Diese Aussage gilt ebenso für Mehrschrittverfahren.

Beispiel 11.58.

Testgleichung: $y' = \lambda y$, mit $\lambda < 0$.

1. Das *implizite Euler-Verfahren*

$$y^{j+1} = y^j + hf(t_{j+1}, y^{j+1}),$$

ergibt
$$y^{j+1} = y^j + h\lambda y^{j+1},$$

d.h.
$$y^{j+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y^j, \quad g(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

2. Die *Trapez-Methode*

$$y^{j+1} = y^j + \frac{h}{2} (f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})),$$

ergibt
$$y^{j+1} = y^j + \frac{h\lambda}{2} (y^j + y^{j+1}),$$

d.h.
$$y^{j+1} = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} y^j, \quad g(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x}.$$

In beiden Fällen: $|y^{j+1}| < |y^j|$ für alle $h\lambda \in (-\infty, 0)$.

△

11.9.2 Stabilitätsintervalle

Allgemein ergibt sich bei *Einschrittverfahren*, angewandt auf $y' = \lambda y$, eine Rekursion

$$y^{j+1} = g(h\lambda)y^j,$$

wobei $g(x)$ die Stabilitätsfunktion des Verfahrens ist.

Definition 11.59. Sei gegeben ein ESV und sei g die zugehörige Stabilitätsfunktion. Das größte Intervall $I = (-a, 0)$, für das

$$x \in I \implies |g(x)| < 1$$

gilt, heißt das *Stabilitätsintervall* des Verfahrens.

Bei linearen *Mehrschrittverfahren* angewandt auf das Testproblem $y' = \lambda y$ kann man ebenfalls die Frage stellen, für welches Intervall von $h\lambda$ -Werten Dämpfung auftritt. Die Charakterisierung dieses Stabilitätsintervalls ist jetzt aber komplizierter als bei ESV, weil die einfache Beziehung $y^{j+1} = g(h\lambda)y^j$ nicht mehr gültig ist.

Stabilitätsintervalle einiger Methoden:

Verfahren	Stabilitätsintervall
Euler-Verfahren	$(-2, 0)$
Verb. Euler-Verfahren	$(-2, 0)$
klassisches RK-Verfahren	$(-2.78, 0)$
2-Schritt-Adams-Bashforth	$(-1, 0)$
4-Schritt-Adams-Bashforth	$(-0.3, 0)$
3-Schritt-Adams-Moulton	$(-3.0, 0)$
Implizites Euler-Verfahren	$(-\infty, 0)$
Trapez-Regel	$(-\infty, 0)$
RK-Gauß-Verfahren	$(-\infty, 0)$

11.9.3 Stabilitätsgebiete: A-Stabilität

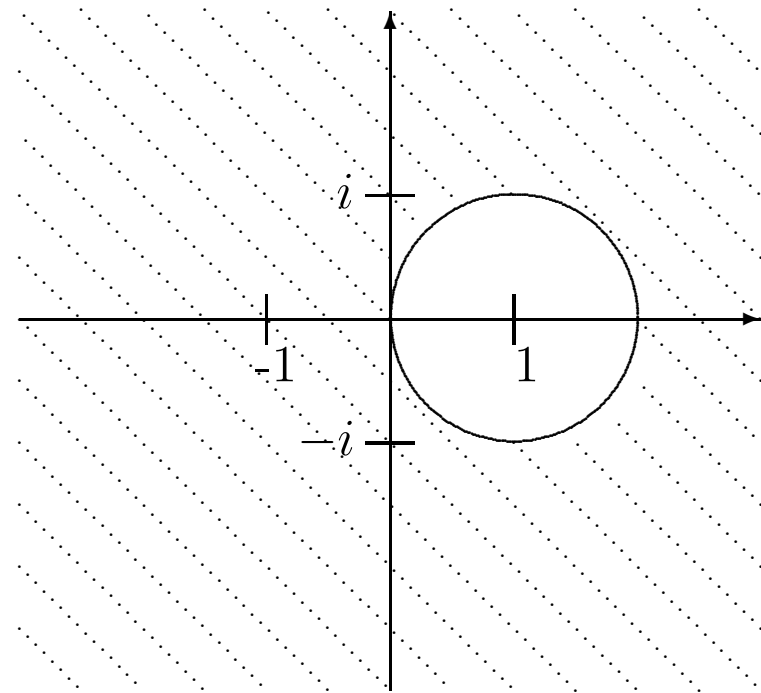
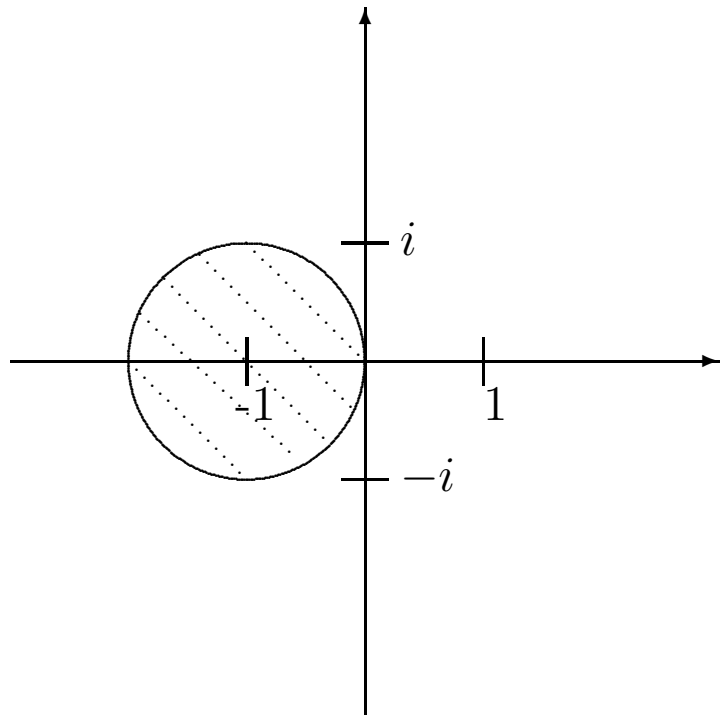
Man läßt im Modellproblem $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$ zu.

Die Variable $h\lambda$ in der Funktion g kann dann komplexe Werte annehmen. Statt des Intervalls I , wird dann das *Stabilitätsgebiet*

$$B := \{z \in \mathbb{C} \mid |g(z)| < 1\}$$

als ein Maß für die Stabilität der Methode genommen.

Zum Beispiel für die Euler-Verfahren:



Günstige Stabilitätseigenschaft:

$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\} \subset B$, wobei B das Stabilitätsgebiet ist.

Verfahren mit dieser Eigenschaft nennt man *A-stabil*. Bemerkungen:

- Explizite Ein- oder Mehrschrittverfahren sind niemals *A-stabil*.
- Das implizite Euler-Verfahren und die Trapez-Methode sind *A-stabile* Verfahren.
- Die RK-Gauß-Verfahren sind *A-stabil*.
- Für lineare Mehrschrittverfahren ist die Forderung der *A*-Stabilität wegen des folgenden Ergebnisses von Dahlquist sehr einschränkend:

Ein *A*-stabiles lineares Mehrschrittverfahren hat höchstens die Konsistenzordnung $p = 2$.

Bei vielen Problemen wird nicht benötigt, daß das Stabilitätsgebiet die gesamte linke komplexe Halbebene umfaßt.

Man nennt ein Verfahren $A(\alpha)$ -stabil, ($\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$) wenn das Stabilitätsgebiet einen um die x -Achse symmetrischen Sektor der linken komplexen Halbebene mit Innenwinkel 2α am Ursprung umfaßt:

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z) - \pi| < \alpha \} \subset B .$$

A -Stabilität stimmt also mit $A(\frac{\pi}{2})$ -Stabilität überein.

Selbst für Winkel α , die beliebig nahe an $\pi/2$ sind, kann man $A(\alpha)$ -stabile lineare Mehrschrittverfahren beliebig hoher Ordnung finden.

11.9.4 Rückwärtsdifferenzenmethoden

Algorithmus 11.60 (k -Schritt-BDF-Methode).

Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$,

Koeffizienten a_ℓ ($0 \leq \ell \leq k$), Startwerte y^0, \dots, y^{k-1} .

Berechne für $j = 0, 1, \dots, n - k$:

$$\sum_{\ell=0}^k a_\ell y^{j+\ell} = hf(t_{j+k}, y^{j+k}) .$$

Methode	Ordnung	$A(\alpha)$ -Stabilität
implizites Euler-Verf.: $y^{j+1} - y^j = hf(t_{j+1}, y^{j+1})$	1	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
BDF2: $\frac{3}{2}y^{j+2} - 2y^{j+1} + \frac{1}{2}y^j = hf(t_{j+2}, y^{j+2})$	2	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
BDF3: $\frac{11}{6}y^{j+3} - 3y^{j+2} + \frac{3}{2}y^{j+1} - \frac{1}{3}y^j = hf(t_{j+3}, y^{j+3})$	3	$\alpha = 0.96 \cdot \frac{\pi}{2}$
BDF4: $\frac{25}{12}y^{j+4} - 4y^{j+3} + 3y^{j+2} - \frac{4}{3}y^{j+1} + \frac{1}{4}y^j = hf(t_{j+4}, y^{j+4})$	4	$\alpha = 0.82 \cdot \frac{\pi}{2}$

Beispiel 11.62.

Wir betrachten das diskrete Wärmeleitungsproblem mit Anfangswert $\Phi(x) = \sin(\pi x)$ und Schrittweite $h_x = \frac{1}{60}$.

Für die extremen Eigenwerte der Matrix A gilt

$$\lambda_1(A) = -9.87, \quad \lambda_{n_x-1}(A) = -14390.$$

Für das BDF2-Verfahren

$$\frac{3}{2}y^{j+2} - 2y^{j+1} + \frac{1}{2}y^j = hAy^{j+2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

benötigt man Anfangsdaten y^0, y^1 . In jedem Schritt des BDF2-Verfahrens muß das Tridiagonal-System

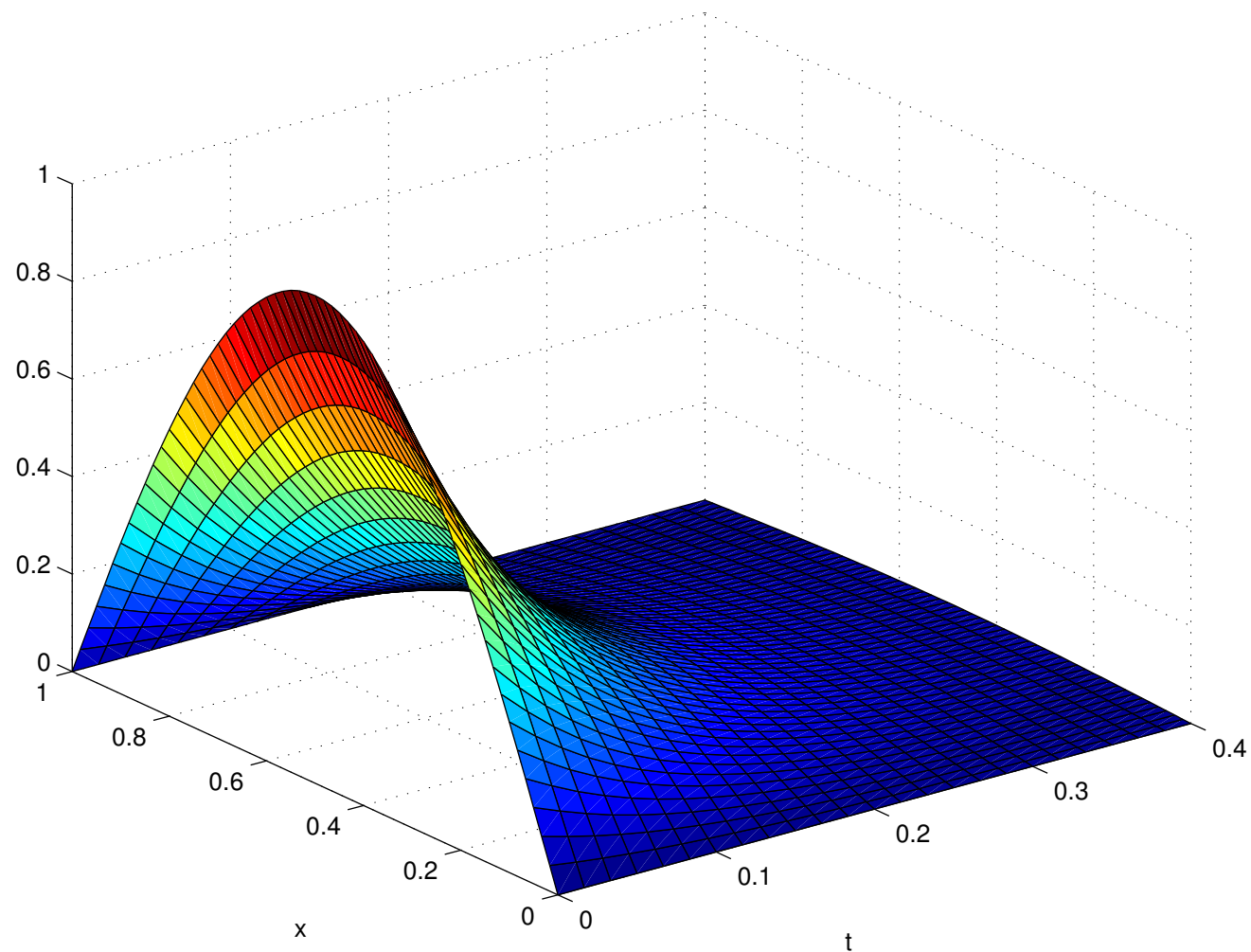
$$\left(\frac{3}{2}I - hA\right)y^{j+2} = 2y^{j+1} - \frac{1}{2}y^j$$

gelöst werden. Die berechneten Resultate $y^j \approx T(jh, x) = T(\frac{j}{60}, x)$, $j = 1, 2, \dots, 24$, sind in Abb. 11.11 dargestellt.

Das verbesserte Euler-Verfahren ist erst stabil, wenn $|h\lambda_{n_x-1}(A)| < 2$, d.h. $h < 1.39 \cdot 10^{-4}$, gilt. △

Abbildung 11.11.

Lösung des Wärmeleitungsproblems mit dem BDF2-Verfahren, mit Zeitschrittweite $1/60$.



Lösung des Wärmeleitungsproblems mit dem verbesserten Euler-Verfahren für die Zeitschrittweiten $h = 1.38 \cdot 10^{-4}$ und $h = 1.40 \cdot 10^{-4}$.

