

## 12.1 Problemstellung und Prototypen

Sei  $\Delta u := \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$  der *Laplace-Operator*. Die Gleichungen

$$\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \Gamma.$$

sind Prototypen von *elliptischen* Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen, die sogenannte *Laplace-* bzw. *Poisson-Gleichung*. Man spricht auch von der **Diffusionsgleichung**.

Bei einem instationären **Wärmeleitprozeß** erhält man eine Gleichung des Typs

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad \begin{cases} u(x, y, 0) = u_0(x, y) & \text{in } \Omega, \\ u(x, y, t) = g(x, y, t) & \text{in } \Gamma \times [0, T]. \end{cases}$$

Die Lösung  $u(x, y, t)$  ergibt die Temperaturverteilung in  $\Omega$  zum Zeitpunkt  $t \in [0, T]$ .

*Anfangstemperatur* zur Zeit  $t = 0$ :  $u_0(x, y)$ .

Temperaturvorgaben auf dem Rand:  $g(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in \Gamma$ ,  $t \in [0, T]$ .

Man spricht daher von einer *Anfangsrandwertaufgabe*.

**Wellenausbreitung** in Körpern wird durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$$

beschrieben.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , beschränkt.

Allgemeiner linearer Differentialoperator zweiter Ordnung:

$$Lu = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu$$

wobei  $u \in C^2(\Omega)$ , und  $a_{ij}, b_i, c$  bekannte Funktionen sind.

Dem *Hauptteil* dieses Operators wird eine symmetrische Matrix

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{12}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

zugeordnet.

**Definiton 12.1.**  $L$  heißt **elliptisch**, wenn die Eigenwerte der Matrix  $A(x, y)$  ungleich Null sind und das gleiche Vorzeichen haben.

Falls die Eigenwerte der Matrix  $A(x, y)$  ungleich Null sind und unterschiedliches Vorzeichen haben, nennt man  $L$  **hyperbolisch**.

Wenn genau ein Eigenwert der Matrix  $A$  Null ist und außerdem die Matrix  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$  den Rang zwei hat, heißt  $L$  **parabolisch**.

## Die *lineare partielle Differentialgleichung* zweiter Ordnung

$$Lu = f$$

heißt **elliptisch**, **parabolisch** bzw. **hyperbolisch**, wenn der Differentialoperator  $L$  elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch ist.

Prototyp eines elliptischen Differentialoperators:

$$Lu = \Delta u := u_{xx} + u_{yy} \quad (\text{Laplace-Operator})$$

Die zugehörige Matrix ist  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Für die  $u_t = u_{xx}$  ergibt sich (für  $y = t$ )

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

und somit ein parabolisches Problem.

Wellengleichung ( $y = t$ ):  $A = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , d. h., sie ist hyperbolisch.

Der Prototyp eines elliptischen Randwertproblems ist das:

**Poisson-Problem:** Gesucht  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , so daß

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sei

$$V := \left\{ v : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} (t \rightarrow v(x, t)) \in C^1([0, T]) \text{ und} \\ (x \rightarrow v(x, t)) \in C^2(\Omega) \end{array} \right\}.$$

Prototyp der Problemklasse der parabolischen Anfangs-Randwertaufgabe lautet:

**Wärmeleitungsproblem:** Gesucht  $u \in V$ , so daß

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times [0, T], \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{auf } \Omega. \end{cases}$$

Prototyp der Klasse der *hyperbolischen Differentialgleichungen* ist die *Wellengleichung*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \times [0, T].$$

## 12.3 Differenzenverfahren für elliptische Randwertaufgaben

### 12.3.1. Diskretisierung der Poisson-Gleichung

Wir betrachten die Poisson-Gleichung im Einheitsquadrat  $\Omega = (0, 1)^2$ . Sei  $h = \frac{1}{n}$  und

$$\begin{aligned}\Omega_h &:= \{(ih, jh) \mid 1 \leq i, j \leq n-1\} , \\ \overline{\Omega}_h &:= \{(ih, jh) \mid 0 \leq i, j \leq n\} .\end{aligned}$$

**Differenzenformel**, für  $(x, y) \in \Omega_h$ :

$$\begin{aligned}(\Delta u)(x, y) &\approx (\Delta_h u)(x, y) \\ &:= h^{-2}[u(x-h, y) + u(x+h, y) + u(x, y-h) \\ &\quad + u(x, y+h) - 4u(x, y)]\end{aligned}$$

**Differenzenstern**:

$$[-\Delta_h]_{\xi} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}_{\xi}, \quad \xi \in \Omega_h.$$

Sei  $\ell^2(\Omega_h)$  ( $\ell^2(\overline{\Omega}_h)$ ) die Menge aller *Gitterfunktionen* auf dem Gitter  $\Omega_h$  ( $\overline{\Omega}_h$ ).



## Diskretisiertes Poisson-Problem:

$$\begin{cases} \text{gesucht } u_h \in \ell^2(\overline{\Omega}_h), \text{ so da\ss} \\ -(\Delta_h u_h)(\xi) = f(\xi) \text{ f\ur } \xi \in \Omega_h, \\ u_h(\xi) = g(\xi) \text{ f\ur } \xi \in \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h. \end{cases}$$

Matrix-Vektor-Darstellung des Problems:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad m := (n-1)^2,$$

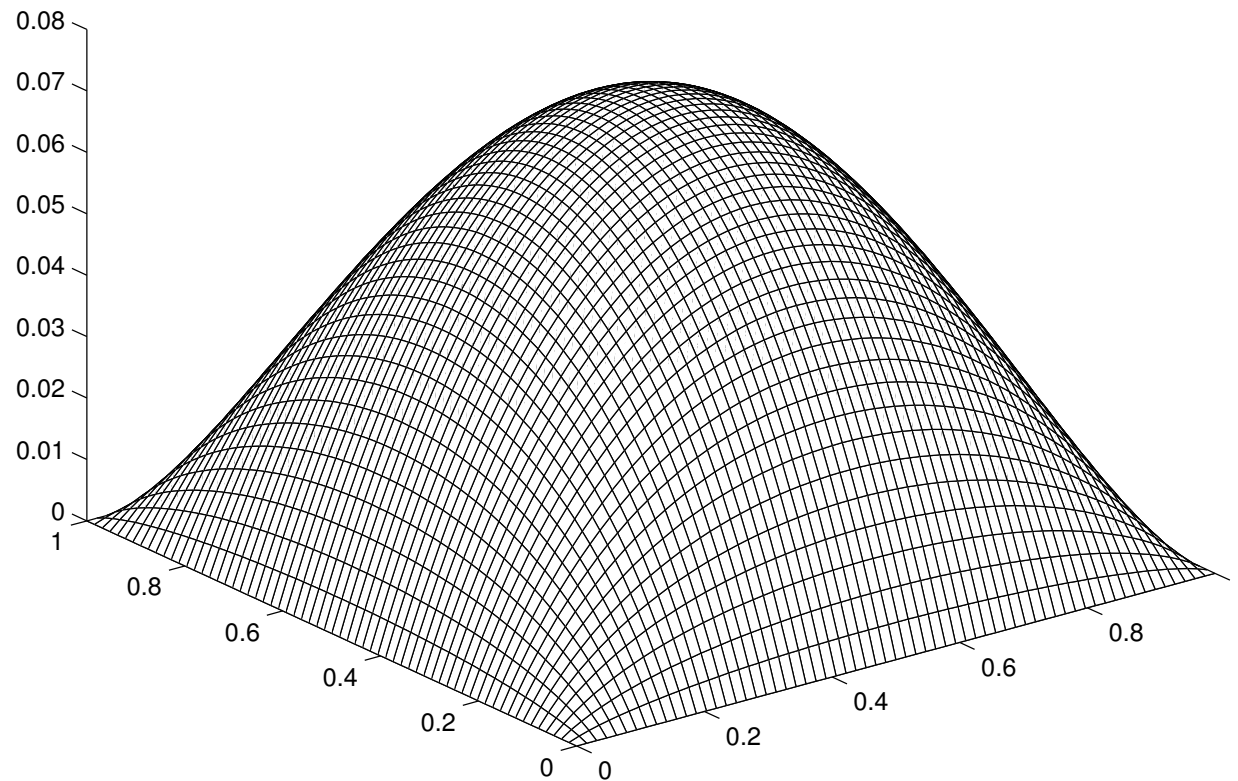
wobei

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \mathbf{T} & -\mathbf{I} & & & \\ -\mathbf{I} & \mathbf{T} & -\mathbf{I} & & \emptyset \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \emptyset & & -\mathbf{I} & \mathbf{T} & -\mathbf{I} \\ & & & -\mathbf{I} & \mathbf{T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \emptyset \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \emptyset & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

wobei  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  und  $\mathbf{I}$  die  $(n-1) \times (n-1)$ -Identitatsmatrix.

# Beispiel 12.4.: Lösung der diskretisierten Poisson-Gleichung

Für den Fall  $f \equiv 1, g \equiv 0, h = 2^{-6}$  ( $n = 64$ ):



### Konvektions-Diffusionsproblem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Gesucht sei eine Funktion } u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \text{ so da\ss} \\ -\varepsilon \Delta u + \cos(\beta) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\beta) \frac{\partial u}{\partial y} = f \text{ in } \Omega = (0, 1)^2, \\ u = g \text{ auf } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Für die Diskretisierung von  $\frac{\partial}{\partial x}$  bieten sich an:

$$\frac{1}{2h}[-1 \ 0 \ 1]_{\xi}, \quad \frac{1}{h}[-1 \ 1 \ 0]_{\xi}, \quad \frac{1}{h}[0 \ -1 \ 1]_{\xi}, \quad \xi \in \Omega_h.$$

Genauigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{2h}[-u(x-h, y) + u(x+h, y)] + \mathcal{O}(h^2), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{h}[-u(x-h, y) + u(x, y)] + \mathcal{O}(h), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{h}[-u(x, y) + u(x+h, y)] + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Mit

$$\hat{c} := \cos(\beta), \quad \hat{c}^+ := \max(\hat{c}, 0), \quad \hat{c}^- := \min(\hat{c}, 0),$$

lautet die allgemeine Formel für die **upwind-Differenz** zur Annäherung von  $\cos(\beta) \frac{\partial}{\partial x}$

$$[D_x^{up}]_\xi := \frac{1}{h} [-\hat{c}^+ \quad |\hat{c}| \quad \hat{c}^-]_\xi, \quad \xi \in \Omega_h.$$

Die upwind-Differenz zur Annäherung von  $\sin(\beta) \frac{\partial}{\partial y}$  ist

$$[D_y^{up}]_\xi := \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \hat{s}^- \\ |\hat{s}| \\ -\hat{s}^+ \end{bmatrix}_\xi, \quad \xi \in \Omega_h.$$

### Diskretisiertes Konvektions-Diffusionsproblem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Gesucht } u_h \in \ell^2(\overline{\Omega}_h), \text{ so da\ss} \\ \left( (-\varepsilon \Delta_h + D_x^{up} + D_y^{up}) u_h \right) (\xi) = f(\xi) \text{ f\"ur } \xi \in \Omega_h, \\ u_h(\xi) = g(\xi) \text{ f\"ur } \xi \in \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h. \end{array} \right.$$

Der zugehörige Differenzenstern ist

$$\begin{aligned}
 [-\varepsilon \Delta_h + D_x^{up} + D_y^{up}]_\xi &= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -\varepsilon + h\hat{s}^- & & \\ -\varepsilon - h\hat{c}^+ & 4\varepsilon + h(|\hat{c}| + |\hat{s}|) & -\varepsilon + h\hat{c}^- & \\ & -\varepsilon - h\hat{s}^+ & & \\ & & & \end{bmatrix} \\
 &=: \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -\tilde{n} & & \\ -\tilde{w} & \tilde{z} & -\tilde{o} & \\ & & & \\ & & & -\tilde{s} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

In Matrix-Vektor-Darstellung:

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad m := (n-1)^2,$$

mit

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \mathbf{T} & -\tilde{n}\mathbf{I} & & & \\ -\tilde{s}\mathbf{I} & \mathbf{T} & -\tilde{n}\mathbf{I} & & \emptyset \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \emptyset & & -\tilde{s}\mathbf{I} & \mathbf{T} & -\tilde{n}\mathbf{I} \\ & & & -\tilde{s}\mathbf{I} & \mathbf{T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tilde{z} & -\tilde{o} & & & \\ -\tilde{w} & \tilde{z} & -\tilde{o} & & \emptyset \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \emptyset & & -\tilde{w} & \tilde{z} & -\tilde{o} \\ & & & -\tilde{w} & \tilde{z} \end{pmatrix}.$$

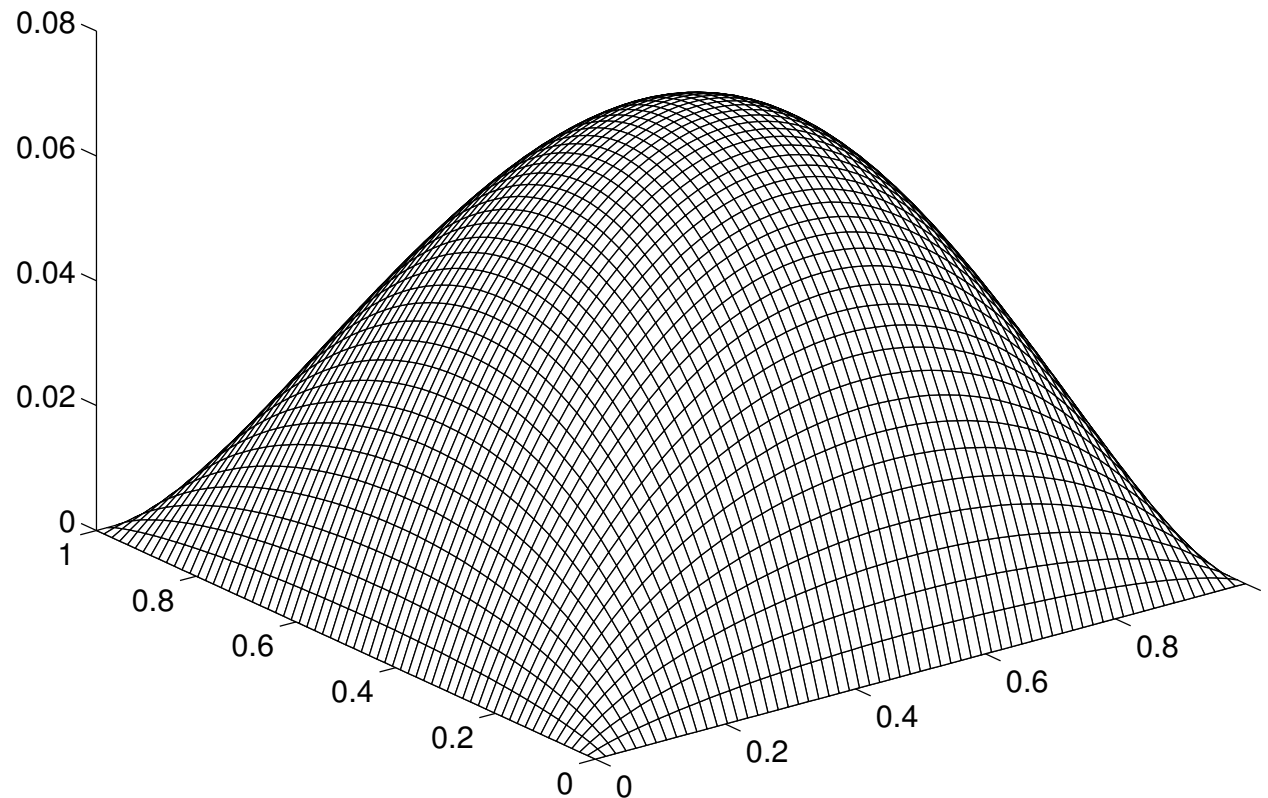
## Beispiel 12.6.

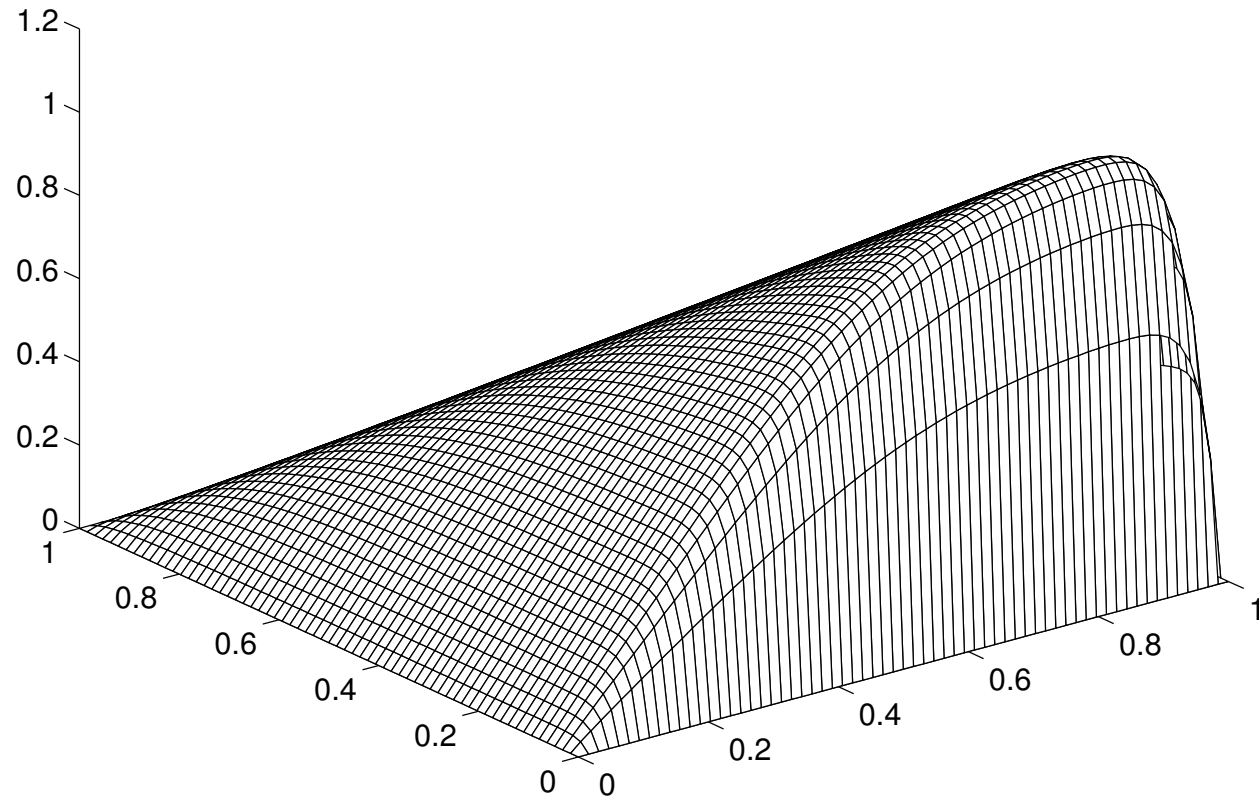
---

Lösung der diskretisierten Konvektions-Diffusionsgleichung.

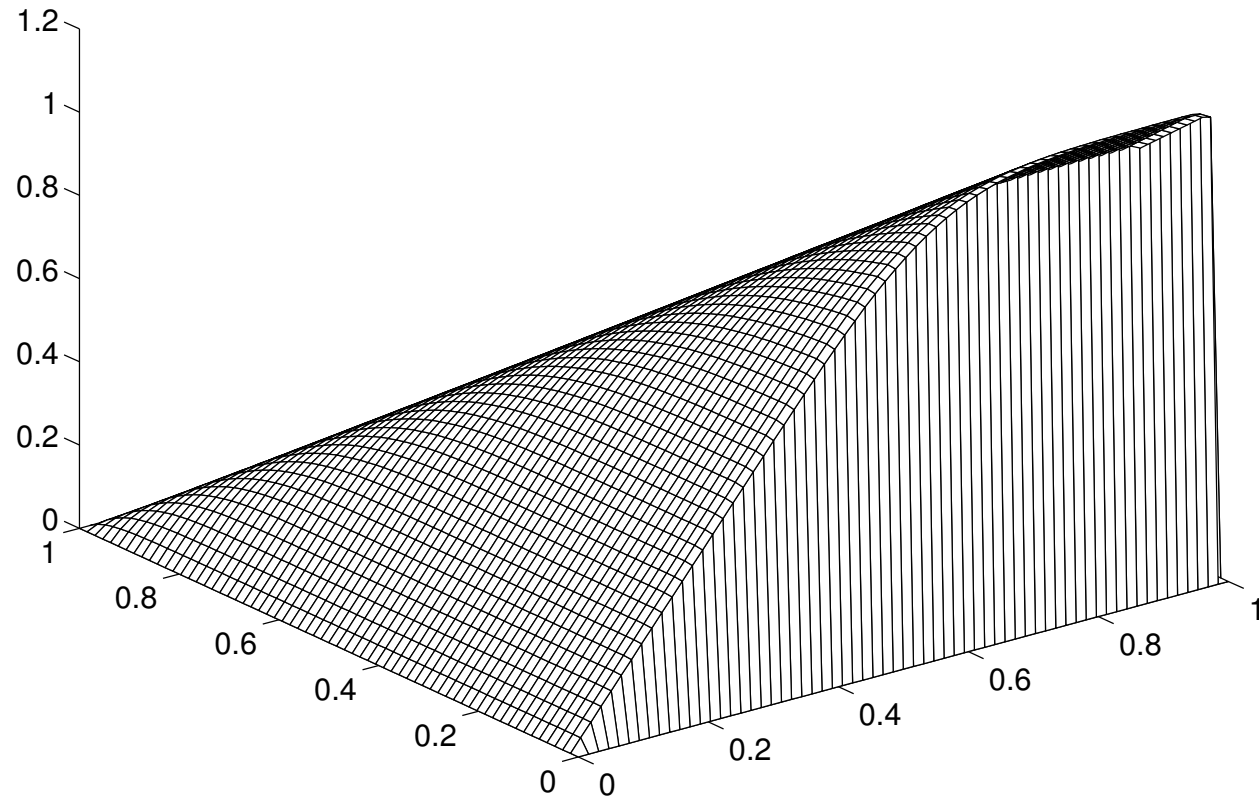
Für die Fälle  $f \equiv 1, g \equiv 0, h = 2^{-6}, \beta = \frac{5\pi}{6}$  und  $\varepsilon = 1, 10^{-2}, 10^{-4}$ , ist die Lösung in den folgenden Abbildungen dargestellt:

$\varepsilon = 1$ :





Lösung der diskretisierten Konvektions-Diffusionsgleichung,  $\varepsilon = 10^{-2}$ .



Lösung der diskretisierten Konvektions-Diffusionsgleichung,  $\varepsilon = 10^{-4}$ .



### 12.3.3. Fourieranalyse

---

Wir führen die trigonometrischen Funktionen

$$e^{\nu\mu}(x, y) := \sin(\nu\pi x) \sin(\mu\pi y), \quad \nu, \mu \in \mathbb{N},$$

ein. Es gilt:

$$-\Delta e^{\nu\mu} = \left( (\nu\pi)^2 + (\mu\pi)^2 \right) e^{\nu\mu}.$$

Sei nun

$$e_h^{\nu\mu}(\xi) := e^{\nu\mu}(\xi) \quad \text{für } \xi \in \overline{\Omega}_h, \quad 1 \leq \nu, \mu \leq n-1,$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (-\Delta_h e_h^{\nu\mu})(\xi) &= \lambda_{\nu\mu} e_h^{\nu\mu}(\xi) \quad \text{für } \xi \in \Omega_h, \quad 1 \leq \nu, \mu \leq n-1, \\ \text{mit } \lambda_{\nu\mu} &= \frac{4}{h^2} \left( \sin^2\left(\frac{1}{2}\nu\pi h\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}\mu\pi h\right) \right). \end{aligned}$$

**Lemma 12.7.** Die Matrix  $\mathbf{A}_1$  der diskretisierten Poisson-Gleichung ist symmetrisch positiv definit.

**Lemma 12.8.** Für die Konditionszahl der Matrix  $\mathbf{A}_1$  bezüglich der 2-Norm gilt

$$\kappa_2(\mathbf{A}_1) = \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi h)}{\sin^2(\frac{1}{2}\pi h)} = \left(\frac{2}{\pi h}\right)^2 (1 + \mathcal{O}(h^2)).$$

⇒ die Konditionszahl von  $\mathbf{A}_1$  wird sehr groß wenn  $h$  gegen Null strebt.

## 12.3.4 Diskretisierungsfehleranalyse–Stabilität und Konsistenz

### Diskretisierte Poisson-Gleichung:

Sei  $u_h \in \ell^2(\overline{\Omega}_h)$  die Lösung des diskretisierten Problems und  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  sei die Lösung der kontinuierlichen Poisson-Gleichung.

$$e_h := u|_{\overline{\Omega}_h} - u_h$$

$$\begin{aligned} \|e_h\| &= \|\Delta_h^{-1} \Delta_h e_h\| = \|\Delta_h^{-1} (-\Delta_h u|_{\overline{\Omega}_h} - f|_{\Omega_h})\| \\ &\leq \|\Delta_h^{-1}\| \|-\Delta_h u|_{\overline{\Omega}_h} - f|_{\Omega_h}\|. \end{aligned}$$

Die Größe  $\|-\Delta_h u|_{\overline{\Omega}_h} - f|_{\Omega_h}\|$  wird *Konsistenzfehler* genannt.

Der Faktor  $\|\Delta_h^{-1}\|$  quantifiziert die (In)Stabilität der Methode.

**Konsistenz** ( $\|-\Delta_h u|_{\overline{\Omega}_h} - f|_{\Omega_h}\| \rightarrow 0$ ) +  
**Stabilität** ( $\|\Delta_h^{-1}\| = \mathcal{O}(1)$ )  
 $\implies$  **Konvergenz**

**Lemma 12.11.** Es gelte  $u \in C^4(\overline{\Omega})$ .

Sei  $C := \max\left\{\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_{\infty, \overline{\Omega}}, \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right\|_{\infty, \overline{\Omega}}\right\}$ . Dann gilt:

$$\|-\Delta_h u|_{\overline{\Omega}_h} - f|_{\Omega_h}\|_{\infty} \leq \frac{1}{6}Ch^2$$

Wir wählen eine *gewichtete* Euklidische Norm:

$$\|\mathbf{y}\|_{2,h} := h\|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{h^2 \sum_{j=1}^m y_j^2}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m.$$

Wegen der Gewichtung gilt, für  $v_h \in \ell^2(\Omega_h)$ ,

$$\|v_h\|_{2,h} \leq h\sqrt{m} \max_{\xi \in \Omega_h} |v_h(\xi)| = h(n-1)\|v_h\|_{\infty} \leq \|v_h\|_{\infty}.$$

Man erhält aus Lemma 12.11 damit auch sofort Konsistenz in  $\|\cdot\|_{2,h}$ :

$$\|-\Delta_h u|_{\overline{\Omega}_h} - f|_{\Omega_h}\|_{2,h} \leq \frac{1}{6}Ch^2.$$

**Lemma 12.12.** Es gilt die Ungleichung

$$\|\Delta_h^{-1}\|_{2,h} = \|\mathbf{A}_1^{-1}\|_{2,h} \leq \frac{1}{8}.$$

**Satz 12.13.** Sei  $e_h = u|_{\Omega_h} - u_h|_{\Omega_h}$  der Fehler bei der Diskretisierung der Poisson-Gleichung, wie in Abschnitt 12.3.1 beschrieben. Unter den Voraussetzungen aus Lemma 12.11 gilt mit  $C$  wie in Lemma 12.11

$$\|e_h\|_{2,h} \leq \frac{1}{48} Ch^2.$$

**Definiton 12.17.** Eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *reduzibel*, wenn man die Spalten und Zeilen der Matrix so permutieren kann, daß nach der Permutation die Blockgestalt

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \emptyset & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right), \quad \mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad 1 \leq k < n,$$

entsteht. Eine Matrix heißt *irreduzibel*, wenn sie nicht reduzibel ist.

Eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **irreduzibel diagonaldominant**, wenn sie irreduzibel ist und außerdem folgender Bedingung genügt:

$$\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \leq |a_{i,i}| \quad \forall i, \text{ mit strikter Ungleichheit für mindestens ein } i.$$

**Satz 12.19.** Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine irreduzibel diagonaldominante Matrix mit  $a_{i,j} \leq 0$  für alle  $i \neq j$ . Dann ist  $\mathbf{A}$  invertierbar und alle Einträge der Inversen sind nicht-negativ, d. h.,

$$(\mathbf{A}^{-1})_{i,j} \geq 0 \quad \text{für alle } i, j.$$

**Lemma 12.21.** Es gilt die Ungleichung

$$\|\Delta_h^{-1}\|_\infty = \|\mathbf{A}_1^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}.$$

Aus den obigen Resultaten zur Konsistenz und Stabilität folgt das Konvergenzresultat:

**Satz 12.22.** Für  $e_h = u|_{\Omega_h} - u_h|_{\Omega_h}$  und  $C$  wie in Satz 12.13 gilt

$$\|e_h\|_\infty \leq \frac{1}{48}Ch^2.$$

Sei

$$\Xi_h := -\varepsilon \Delta_h + D_x^{up} + D_y^{up} : \ell^2(\overline{\Omega}_h) \rightarrow \ell^2(\Omega_h).$$

**Lemma 12.24.** Es gelte  $u \in C^4(\overline{\Omega})$ .

Sei  $C := \max\left\{\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_{\infty, \overline{\Omega}}, \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right\|_{\infty, \overline{\Omega}}\right\}$ ,  $D := \max\left\{\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{\infty, \overline{\Omega}}, \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_{\infty, \overline{\Omega}}\right\}$ .

Dann gilt

$$\|\Xi_h u|_{\overline{\Omega}_h} - f|_{\Omega_h}\|_{\infty} \leq \frac{1}{6} \varepsilon C h^2 + D h.$$



**Lemma 12.26.** Für  $\Xi_h : \ell_0^2(\bar{\Omega}_h) \rightarrow \ell^2(\Omega_h)$  gilt

$$\|\Xi_h^{-1}\|_\infty = \|\mathbf{A}_2^{-1}\|_\infty \leq \sqrt{2}.$$

**Satz 12.27.** Sei  $e_h = u|_{\Omega_h} - u_h|_{\Omega_h}$  der Fehler bei der Diskretisierung der Konvektions-Diffusionsgleichung, wie in Abschnitt 12.3.2 beschrieben. Mit  $C, D$  wie in Lemma 12.24 gilt

$$\|e_h\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{6}Ch^2 + \sqrt{2}Dh.$$

## Bemerkung 12.28.

---

Sei  $\tilde{\mathbf{A}}_2 = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  die Matrix, die sich bei der Diskretisierung der Konvektions-Diffusionsgleichung mit **zentralen** Differenzen ergibt.

Differenzenstern:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -\tilde{n} & \\ -\tilde{w} & \tilde{z} & -\tilde{o} \\ & -\tilde{s} & \end{bmatrix},$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \varepsilon - \frac{1}{2}h\hat{s}, & \tilde{s} &= \varepsilon + \frac{1}{2}h\hat{s}, \\ \tilde{o} &= \varepsilon - \frac{1}{2}h\hat{c}, & \tilde{w} &= \varepsilon + \frac{1}{2}h\hat{c}, \\ \tilde{z} &= \tilde{n} + \tilde{s} + \tilde{o} + \tilde{w}, & \hat{s} &= \sin(\beta), & \hat{c} &= \cos(\beta). \end{aligned}$$

Diese Diskretisierung hat einen Konsistenzfehler  $\mathcal{O}(h^2)$

## Stabilität:

Fall a:  $h \leq 2\varepsilon$ .

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}\|_\infty \leq C, \quad \text{mit } C \text{ unabhängig von } h \text{ und } \varepsilon.$$

Fall b:  $2\varepsilon \leq h$ .

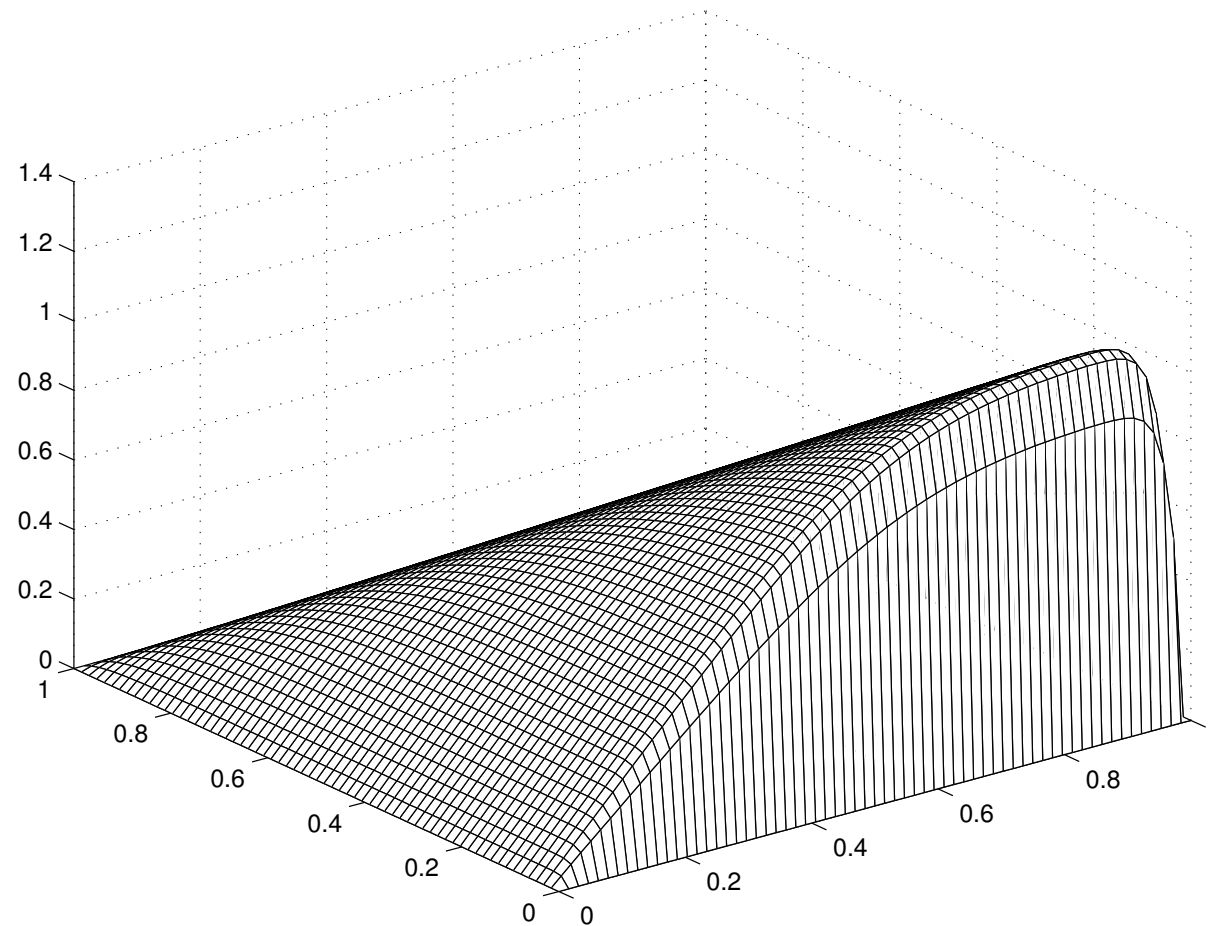
$$\|\tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}\|_\infty \leq C(\varepsilon), \quad \text{mit } C(\varepsilon) \text{ unabhängig von } h.$$

Es kann  $\|\tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}\|_\infty \rightarrow \infty$  für  $\varepsilon \downarrow 0$  auftreten.

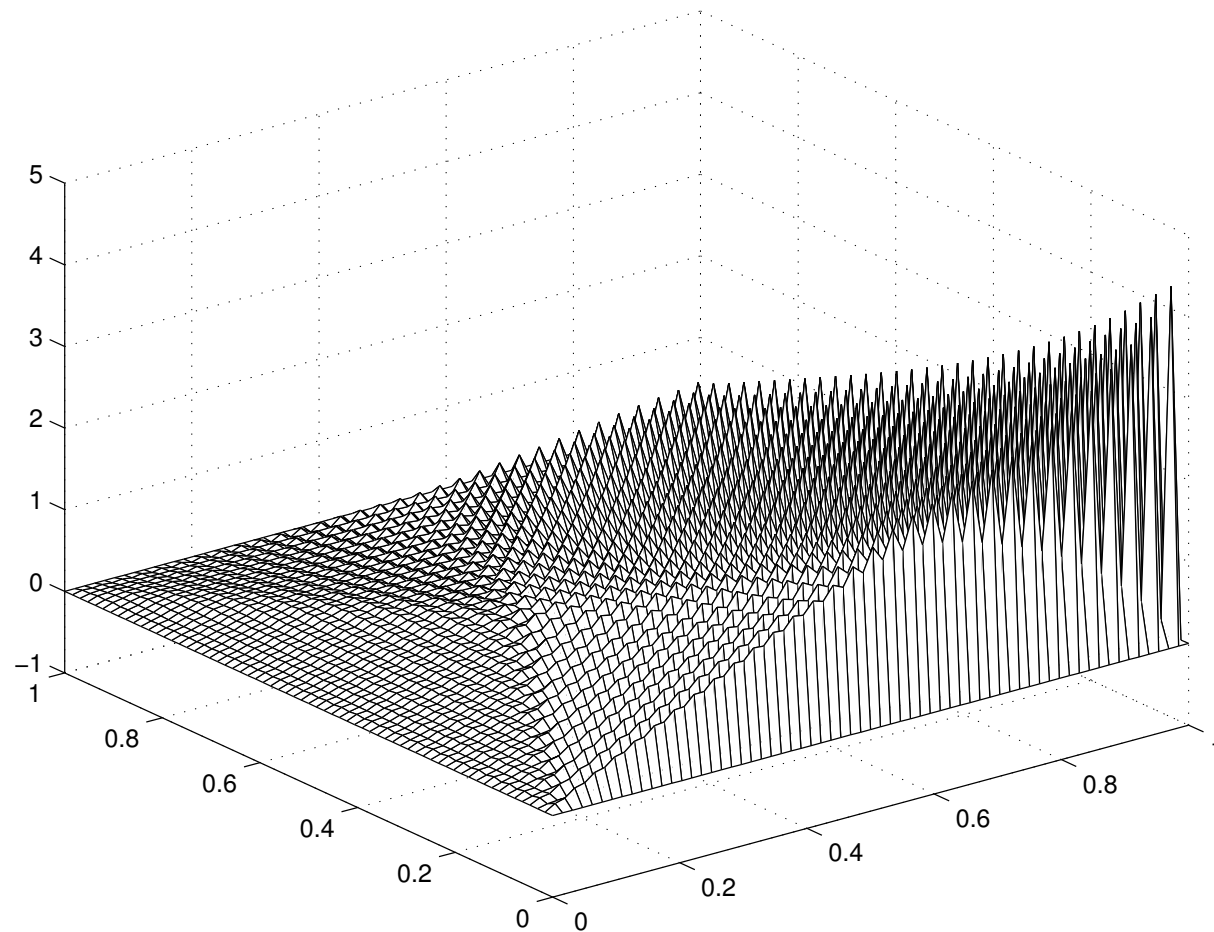
## Beispiel 12.29.

Wir betrachten das Konvektions-Diffusionsproblem aus Beispiel 12.6, aber jetzt mit **zentralen** Differenzen für die Ableitungen erster Ordnung.

$$\varepsilon = 10^{-2}:$$



$$\varepsilon = 10^{-2}:$$



Man beobachtet eine **Instabilität**.

## 12.4 Finite-Elemente-Methode für elliptische Randwertaufgaben

### Schwache Formulierung eines elliptischen Randwertproblems

Poisson-Problem: Gesucht  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , so daß

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sei

$$F(v) := \int_{\Omega} f v \, dx, \quad a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

$(u, v) \rightarrow a(u, v)$  ist linear in den beiden Argumenten  $u, v$ , und heißt deshalb eine *Bilinearform*.

$v \rightarrow F(v)$  ist linear und wird ein *lineares Funktional* genannt.

Die *schwache Formulierung* des Poisson-Problems lautet:

Gesucht  $u \in V = H_0^1(\Omega)$ , so daß  
 $a(u, v) = F(v)$  für alle  $v \in V$

**Satz 12.35 (Lax-Milgram).** Sei  $(H, \|\cdot\|)$  ein Hilbertraum und  $k(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bilinearform mit folgenden Eigenschaften: Es existieren Konstanten  $0 < \gamma \leq \Gamma < \infty$ , so daß

$$k(v, v) \geq \gamma \|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in H \quad (H\text{-Elliptizität})$$

$$k(u, v) \leq \Gamma \|u\| \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in H \quad (\text{Beschränktheit}).$$

Sei  $G \in H'$ . Dann ist die Aufgabe

Gesucht  $u \in H$ , so daß  $k(u, v) = G(v)$  für alle  $v \in H$

eindeutig lösbar. Wenn  $k(\cdot, \cdot)$  außerdem symmetrisch ist (d.h.  $k(w, v) = k(v, w)$ , für alle  $v, w \in H$ ), dann ist  $u$  gerade die Lösung des Minimierungsproblems

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v), \quad \text{wobei } J(v) := \frac{1}{2}k(v, v) - G(v).$$

Beschränktheitsresultat für den Lösungsoperator:

**Satz 12.36** Falls  $(H, \|\cdot\|)$ ,  $k(\cdot, \cdot)$  und  $G(\cdot)$  die Voraussetzungen von Satz 12.35 erfüllen ( $k(\cdot, \cdot)$  nicht notwendigerweise symmetrisch), ist der Lösungsoperator  $S : H' \rightarrow H$ ,  $S(G) = u$  beschränkt:

$$\|S(G)\| \leq \frac{1}{\gamma} \|G\|_{H'} \quad \text{für alle } G \in H'.$$

Beweis: Aufgrund der Elliptizität und der Definition der dualen Norm folgt

$$\gamma \|u\|^2 = k(u, u) = G(u) \leq \|G\|_{H'} \|u\|. \quad \square$$



Allgemeines Variationsproblem wie in Satz 12.35:

$$\text{Gesucht } u \in H, \text{ so da\ss } k(u, v) = G(v) \text{ f\ur } \text{alle } v \in H \quad (1)$$

Idee der Galerkin-Methode: Wir w\u00e4hlen einen *endlich dimensionalen Unterraum*  $H_h \subset H$  und l\u00f6sen das Variationsproblem in diesem Unter-  
raum:

$$\text{Gesucht } u_h \in H_h, \text{ so da\ss } k(u_h, v_h) = G(v_h) \text{ f\ur } \text{alle } v_h \in H_h \quad (2)$$

Dieses endlich dimensionale Problem wird *Galerkin-Diskretisierung* des Problems (1) genannt.

**Lemma 12.37.** Das diskrete Problem (2) hat eine eindeutige L\u00f6sung  $u_h \in H_h$ . F\u00fcr den L\u00f6sungsoperator  $S_h : H'_h \rightarrow H_h$ ,  $S_h(G) = u_h$  gilt

$$\|S_h(G)\| \leq \frac{1}{\gamma} \|G\|_{H'_h}.$$

Abschätzung für den Diskretisierungsfehler  $\|u - u_h\|$ :

**Lemma 12.38 (Cea).** Es sei vorausgesetzt, daß  $(H, \|\cdot\|)$ ,  $k(\cdot, \cdot)$  und  $G(\cdot)$  die Annahmen von Satz 12.35 erfüllen. Seien  $u$ ,  $u_h$  die eindeutigen Lösungen von (1) bzw. (2). Dann gilt

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\Gamma}{\gamma} \min_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|.$$

Wenn  $k(\cdot, \cdot)$  außerdem *symmetrisch* ist, erhält man die etwas stärkere Abschätzung

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{\Gamma}{\gamma}} \min_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|.$$

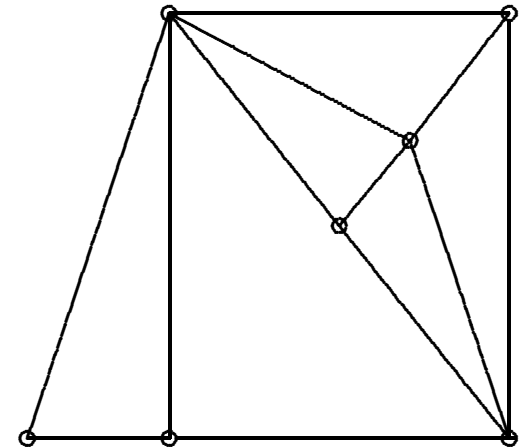
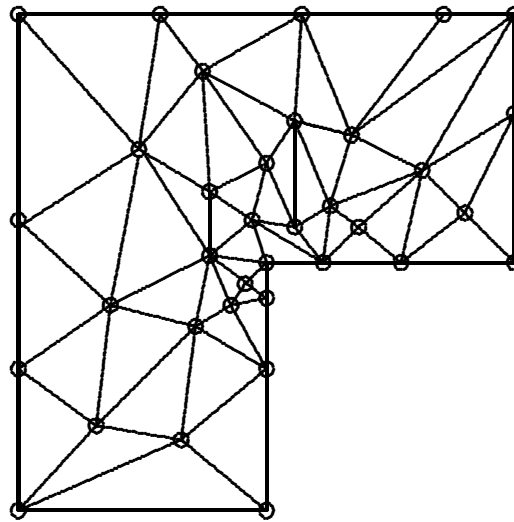
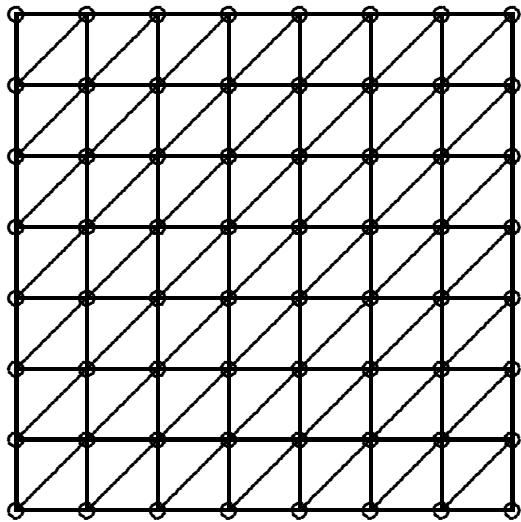
## 12.4.4 Galerkin-Diskretisierung mit Finite-Elemente-Räumen

Die Finite Elemente Methode (FEM) zur Diskretisierung des Modellproblems ist eine Galerkin-Methode *mit einer speziellen Wahl des Unterraums*  $H_h \subset H = H_0^1(\Omega)$ .

Dieser Raum wird wie folgt konstruiert:

- Man zerlegt das Gebiet  $\Omega$  in „einfache“ Teilgebiete. Diese Zerlegung heißt eine zulässige Triangulierung von  $\Omega$ , falls Ecken und Kanten benachbarter Teilgebiete zusammenpassen (siehe unten).
- Dieser zulässigen Triangulierung ordnet man einen Funktionenraum zu, der aus all denjenigen Funktionen besteht, die auf  $\overline{\Omega}$  stetig sind und auf jedem Teilgebiet der Triangulierung mit einem Polynom übereinstimmen.

Zulässige/nicht-zulässige Triangulierungen:



Sei eine zulässige Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  von  $\Omega$  gegeben. Der Raum der *stückweise linearen Finite-Elemente* ist

$$\mathcal{S}_h := \{v \in C(\overline{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = 0 \text{ und } v|_T \in \Pi_1 \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$\dim(\mathcal{S}_h) = \# \text{ Eckpunkte im Inneren von } \Omega.$$

Die Finite-Elemente Diskretisierung des Modellproblems lautet nun wie folgt:

Gesucht  $u_h \in \mathcal{S}_h$ , so daß  $a(u_h, v_h) = F(v_h)$  für alle  $v_h \in \mathcal{S}_h$ .

## 12.4.5 Diskretisierungsfehleranalyse

---

Ausgangspunkt bildet das Cea-Lemma:

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{\Gamma}{\gamma} \min_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_1$$

Letztere ist Größe ein *Approximationsfehler*, weil sie angibt, wie genau man (in der Norm  $\|\cdot\|_1$  gemessen) die Lösung  $u$  bestenfalls in dem FE-Raum  $H_h$  annähern kann.

Sei nun  $\{\mathcal{T}_h\}$  eine *stabile* Familie von zulässigen Triangulierungen, und

$$\mathcal{S}_h^{(\ell)} = \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = 0 \text{ und } v|_T \in \Pi_\ell \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\} \quad \ell = 1, 2, \dots$$

seien entsprechende FE-Räume. Es gilt:

Für  $u \in C^{\ell+1}(\bar{\Omega})$  mit  $u|_{\partial\Omega} = 0$  gilt

$$\min_{v_h \in \mathcal{S}_h^{(\ell)}} \|u - v_h\|_1 \leq C h^\ell |u|_{\ell+1}.$$

Hierbei ist

$$|v|_k^2 := \sum_{i+j=k} \left\| \frac{\partial^k v}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Gemeinsames Muster: Wenn man im FE-Raum Polynome vom Grad  $k - 1$  ( $k \geq 2$ ) verwendet, hat man eine Fehlerschranke von der Form

$$\|u - u_h\|_m \leq Ch^{k-m} |u|_k, \quad m \in \{0, 1\},$$

mit

$m$ : Glattheitsordnung der Norm für den Fehler,

$k$  : Ordnung der Differenzierbarkeit der Approximierten.

Obige *a-priori* Schranken für den Diskretisierungsfehler sind häufig nicht bestimmbar. Sie sind völlig ungeeignet, lokal unterschiedliche Lösungsstruktur, wie lokal höhere Glattheit, ausnutzen zu können, da insbesondere stets von einer oberen Schranke  $h$  der Gitterweite ausgegangen wird.

Abhilfe bieten da sogenannte *a-posteriori* Fehlerschätzer.

## 12.4.6 A-posteriori Fehlerschranken und Adaptivität

---

Sei:

$$a(v, w) = \langle v, w \rangle_1 = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx.$$

Der zugehörige Hilbertraum ist  $H = H_0^1(\Omega)$ . Die Grundidee liegt in der *Abschätzung des Residuums*. Es gilt:

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|a(u - u_h, v)|}{\|v\|_1} \leq c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,T}^2 \right\}^{1/2},$$

mit

$$\eta_{R,T} := \left\{ h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \sum_{K \subset \partial T} h_K \|[n_K \cdot \nabla u_h]\|_{L_2(K)}^2 \right\}^{1/2}$$

und

$$\|u - u_h\|_1 \leq c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,T}^2 \right\}^{1/2}$$



Auch kann man zeigen, daß

$$\eta_{R,T} \leq c^* \|u - u_h\|_{1,\Omega_T}, \quad T \in \mathcal{T}_h.$$

Gilt also

$$\eta_{\mathcal{T}_h} := c \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,T}^2 \right\}^{1/2} \leq \text{tol},$$

ist man sicher, daß die Näherung  $u_h$  eine gewünschte Toleranz  $\text{tol}$  erfüllt.

Die untere Abschätzung sagt, wenn  $\eta_{R,T}$  groß ist, muß der Energiefehler in einer Umgebung des Dreiecks  $T$  auch groß sein.

Da man die Anteile  $\|u - u_h\|_{1,T}$  nicht kennt, legen die Abschätzungen folgende Strategie nahe:

- Unterteile die Dreiecke mit den größten lokalen Residuen  $\eta_{R,T}$  bis
- die lokalen Residuen  $\eta_{R,T}$  nahezu äquilibriert sind;
  - die Gesamtschranke  $\eta_{\mathcal{T}_h}$  unterhalb einer gewünschten Toleranz liegt.

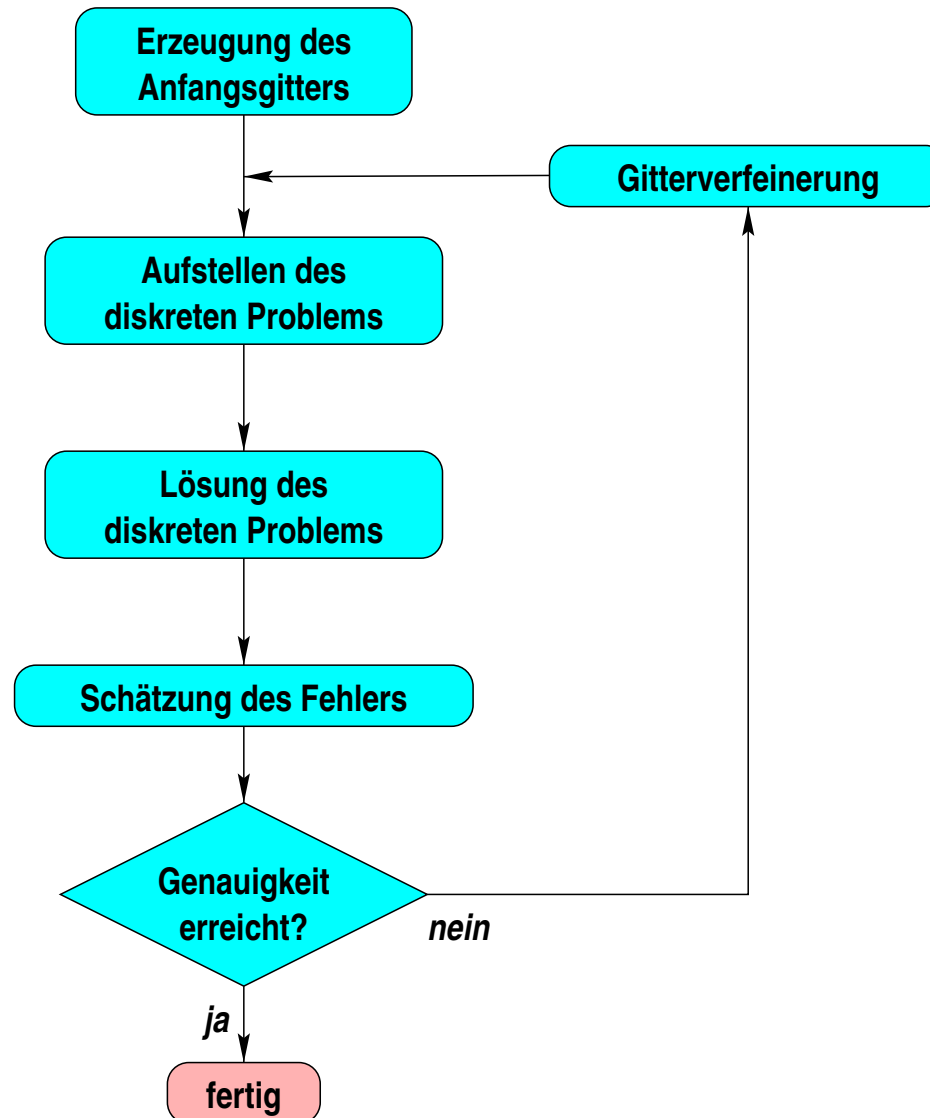
Eine konkrete Strategie sieht im Kern folgendermaßen aus:

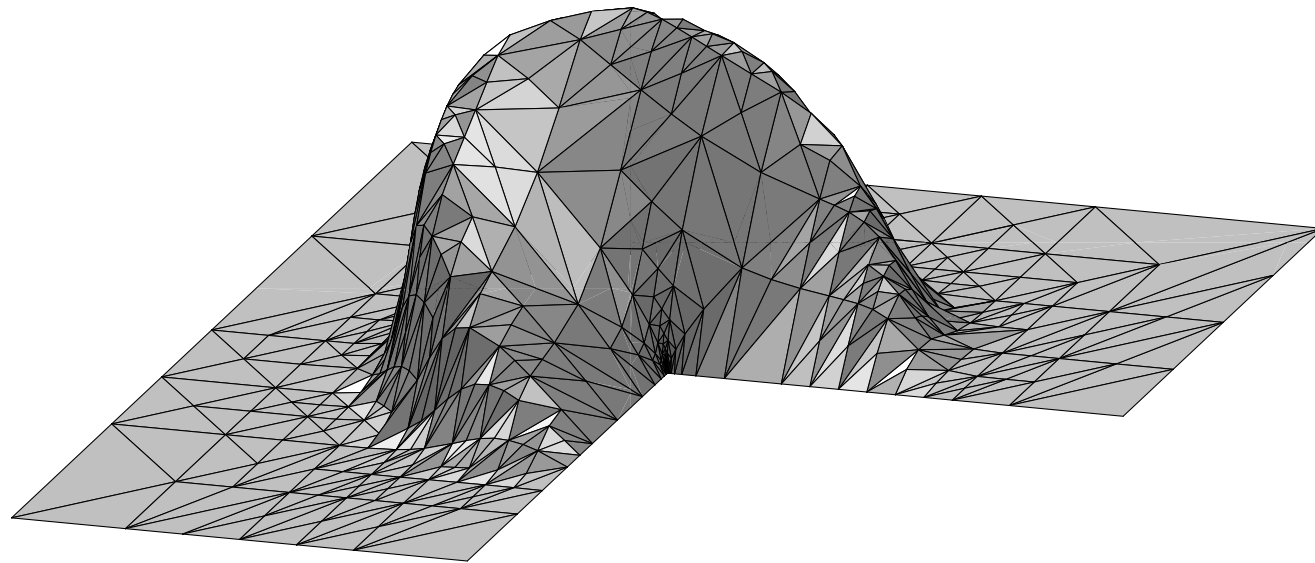
*Gegeben  $\mathcal{T}_h$ , berechne die  $\eta_{R,T}$ ,  $T \in \mathcal{T}_h$ , und prüfe ob  $\eta_{\mathcal{T}_h} \leq \text{tol}$ ; falls nicht, finde die kleinste Teilmenge  $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}_h$  so daß*

$$\sum_{T \in \mathcal{C}} \eta_{R,T}^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,T}^2$$

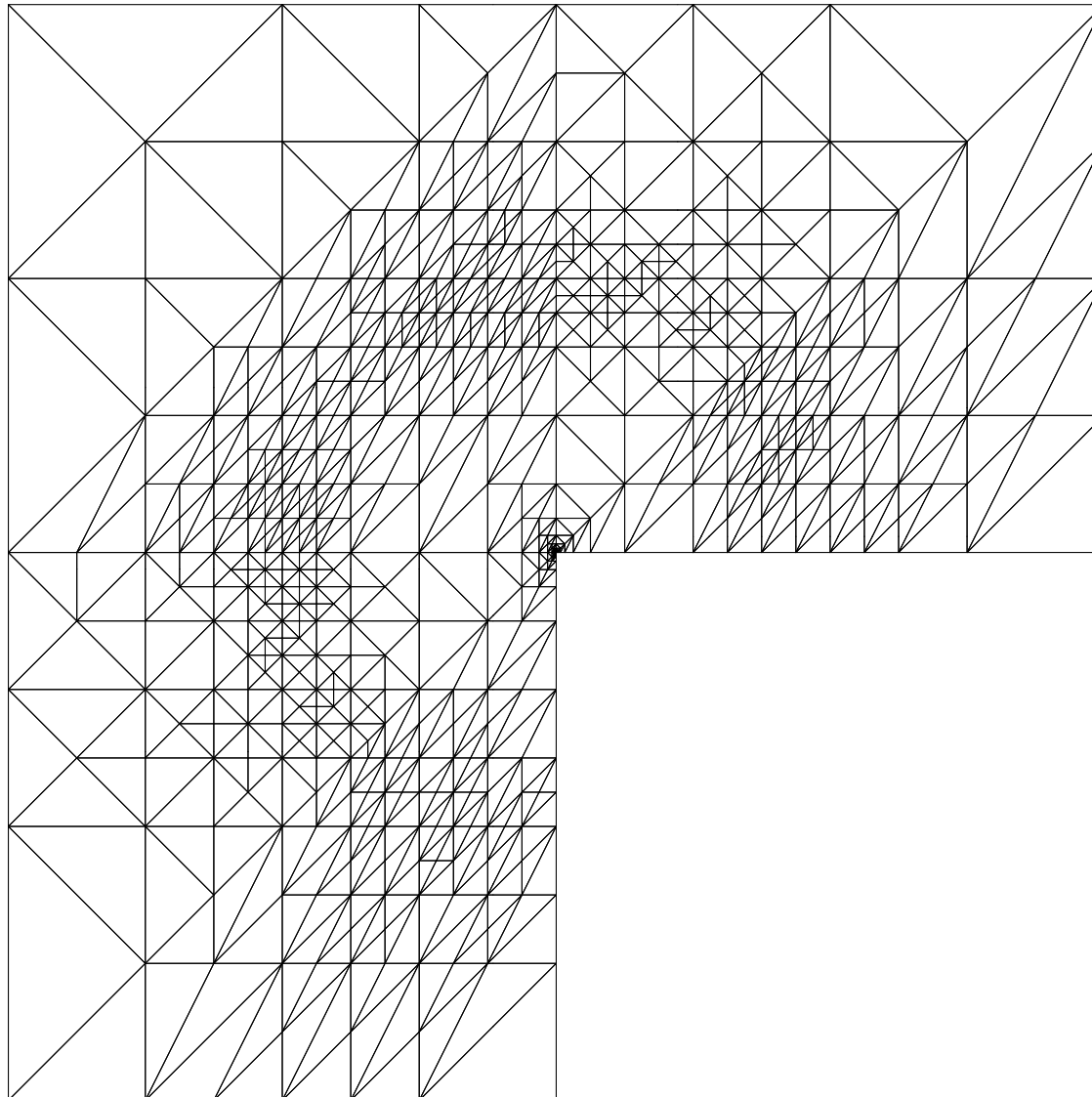
*gilt.*

*Unterteile die Dreiecke in  $\mathcal{C}$ , schließe die entstehende Triangulierung konform ab (d. h., eliminiere hängende Knoten) und wiederhole den Vorgang.*





Der adaptiv berechneten Lösung zugrunde liegende Triangulierung:



## 12.4.7 Matrix-Vektor Darstellung des diskreten Problems

---

Galerkin-Diskretisierung:

Gesucht  $u_h \in H_h$ , so daß  $k(u_h, v_h) = G(v_h)$  für alle  $v_h \in H_h$  (3)

Sei  $(\phi_j)_{1 \leq j \leq m}$  eine Basis in  $H_h$ .

Darstellung der gesuchten Lösung  $u_h$  in dieser Basis:

$$u_h = \sum_{j=1}^m x_j \phi_j \quad \text{mit } m \text{ Koeffizienten } x_j \in \mathbb{R}.$$

Setzt man diese Darstellung für  $u_h$  ein, ist die Aufgabe *äquivalent* zu folgender:

Gesucht  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ , so daß

$$\sum_{j=1}^m k(\phi_j, \phi_i) x_j = G(\phi_i) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m.$$

Man hat also  $m$  lineare Gleichungen für die  $m$  Koeffizienten  $x_j$ .

Seien

$$\mathbf{K} = (k_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \text{mit } k_{i,j} := k(\phi_j, \phi_i),$$
$$\mathbf{g} := (G(\phi_1), \dots, G(\phi_m))^T \in \mathbb{R}^m.$$

Mit dieser Notation ergibt sich folgende Äquivalenz:

Variationsproblem (3)  $\Leftrightarrow$  lineares Gleichungssystem  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{g}$

Die Matrix  $\mathbf{K}$  wird Steifigkeitsmatrix genannt.

**Lemma 12.46.** Wenn  $k(\cdot, \cdot)$  symmetrisch ist, also

$$k(u, v) = k(v, u) \quad \text{für alle } u, v \in H_h \text{ gilt,}$$

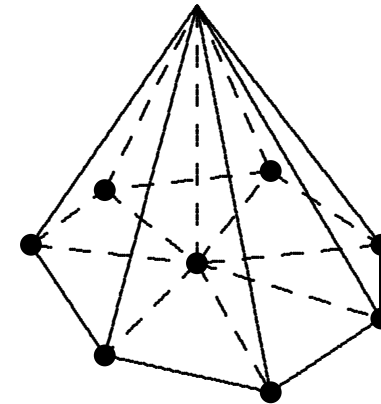
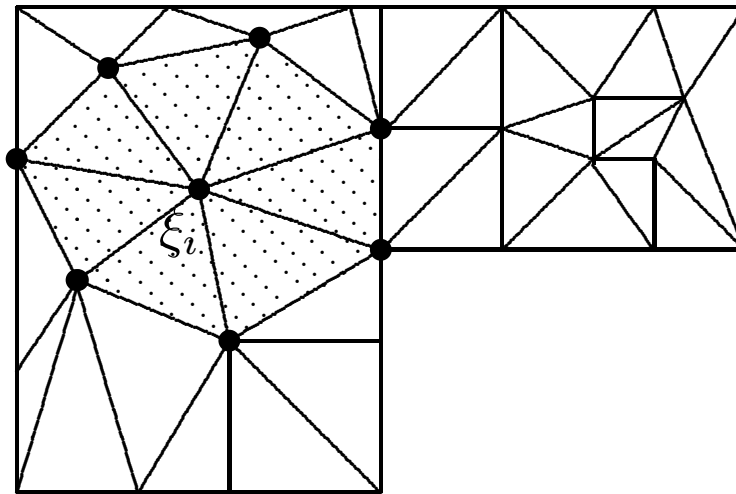
dann ist die Matrix  $\mathbf{K}$  symmetrisch. Wenn außerdem  $k(v, v) > 0$  für alle  $v \in H_h$ ,  $v \neq 0$ , dann ist  $\mathbf{K}$  symmetrisch positiv definit.

Diese allgemeine Vorgehensweise läßt sich insbesondere auf die Finite-Elemente Diskretisierung anwenden.

Beispiel: Diskretisierung der Poisson-Gleichung mit linearen Finite-Elementen.

Entscheidend für die praktische Durchführung der FE-Methode ist die Wahl der sogenannten *nodalen Basis* in dem FE-Raum  $\mathcal{S}_h$ :

$$\phi_i \in \mathcal{S}_h, \quad \phi_i(\xi_i) = 1, \quad \phi_i(\xi_j) = 0 \quad \text{für alle } j \neq i.$$





**Folgerung 12.47.** Sei  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  eine stabile und quasi-uniforme Familie von Triangulierungen. Für die symmetrisch positiv definite Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{A}$  des diskreten Poisson-Problems gilt

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})} \leq C h^{-2}$$

mit einer Konstante  $C$  unabhängig von  $m = \dim \mathcal{S}_h$ .

**Bemerkung 12.49.** Tatsächlich ist diese Abschätzung bestmöglich, d. h., es gibt eine von  $h$  unabhängige Konstante  $c > 0$ , für die

$$\kappa(\mathbf{A}) \geq c h^{-2}$$

gilt. In der Tatsache, daß

$$\kappa(\mathbf{A}) \sim h^{-2}$$

gilt, liegt ein wesentliches Hindernis für eine effiziente Lösung der resultierenden diskreten Gleichungssysteme begründet.  $\triangle$

## 12.5 Finite-Volumen-Methode für elliptische Randwertaufgaben

Bei dieser Methode geht man von einer Differentialgleichung in sogenannter *konservativer* Form aus:

$$\operatorname{div} \mathbf{w}(x, y) = f(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \Omega.$$

Hierbei ist  $\mathbf{w} = (w_1(x, y), w_2(x, y))^T$  eine vektorwertige Funktion und

$$\operatorname{div} \mathbf{w}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} w_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} w_2(x, y)$$

der Divergenzoperator. Die Funktion  $\mathbf{w}$  nennt man den *Flußvektor*.

**Beispiel:** eine Konvektions-Diffusionsgleichung

$$-\varepsilon \Delta u + c_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + c_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f \quad \text{in } \Omega$$

mit  $\mathbf{c}(x, y) := (c_1(x, y), c_2(x, y))^T$  so daß  $\operatorname{div} \mathbf{c} = 0$  in  $\Omega$  gilt.

Dann ist diese äquivalent zu

$$\operatorname{div} (u\mathbf{c} - \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega .$$

Sei  $V$  ein zusammenhängendes Teilgebiet von  $\Omega$  mit einem stückweisen glatten Rand. Dann erhält man

$$\int_{\partial V} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_V f \, dx. \quad (1)$$

Für die Poissongleichung ( $\mathbf{w} = -\nabla u$ ):

$$-\int_{\partial V} \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_V f \, dx. \quad (2)$$

Eine Finite-Volumen Methode besteht aus folgenden zwei Schritten:

1. Man bestimmt eine Aufteilung des Gebietes  $\Omega$  in Teilgebiete, sogenannte *Kontrollvolumina*  $V$ , mit zugehörigen Stützstellen;
2. In jedem Kontrollvolumen  $V$  wird die Gleichung (1) mit Hilfe von Quadratur (zur Annäherung von  $\int_{\partial V}$  und  $\int_V$ ) und Differenzen (zur Annäherung von in dem Flußvektor  $\mathbf{w}$  auftretenden Ableitungen) diskretisiert.

Wir betrachten wieder das Beispielproblem der Poisson-Gleichung mit Dirichlet Randbedingungen:

$$-\operatorname{div} \nabla u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

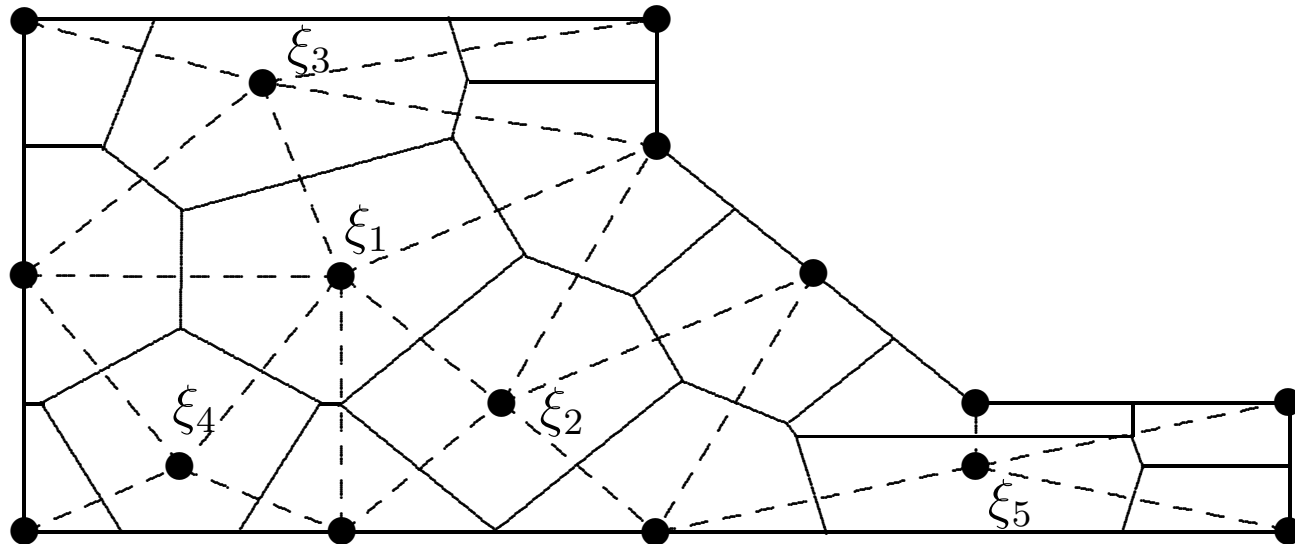
Finite-Volumen-Verfahren zur Diskretisierung dieses Problems haben folgende Struktur:

1. Man wählt *Stützstellen*  $\xi_1, \dots, \xi_m$  in  $\Omega$ , an denen man diskrete Annäherungen  $u_h(\xi_i)$  der gesuchten kontinuierlichen Lösung  $u(\xi_i)$  bestimmt. Zu jeder Stützstelle  $\xi_i$  gehört ein *Kontrollvolumen*  $V_i$ .
2. Für jedes Kontrollvolumen  $V_i$  erfüllt die kontinuierliche Lösung  $u$  die Gleichung (2) mit  $V = V_i$ . Mit Hilfe einer 2D-Quadraturformel wird  $\int_{V_i} f \, dx$  angenähert. Eine 1D-Quadraturformel und geeignete Differenzenformeln (für  $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ ) liefern eine Näherung für den Term  $\int_{\partial V_i} \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds$ . Man erhält dann ein diskretes Problem mit  $m$  Gleichungen (eine für jede(s) Stützstelle/Kontrollvolumen) in den  $m$  Unbekannten  $u_h(\xi_i)$ .

## 12.5.1 Finite-Volumen Methode mit Voronoi-Kontrollvolumina

Seien  $\xi_1, \dots, \xi_M$  Stützstellen in  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ . Das *Voronoi-Gebiet* zu  $\xi_i$ :

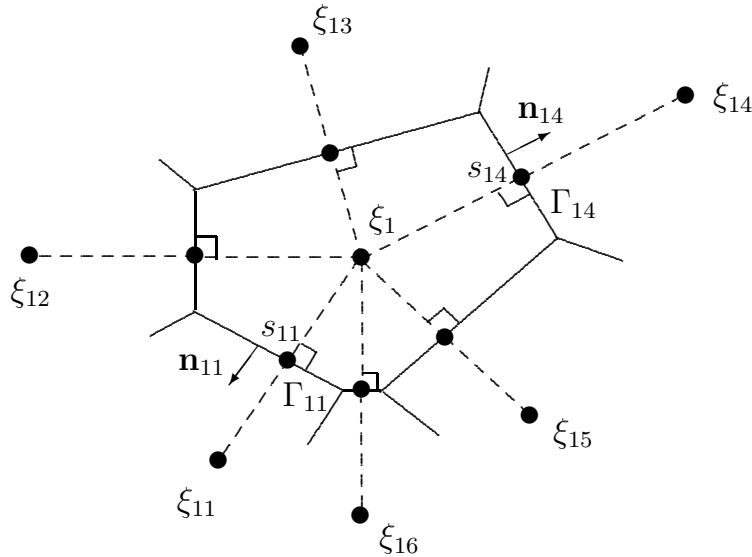
$$\mathcal{V}_i := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - \xi_i\| < \|x - \xi_j\| \text{ für alle } j \neq i\}, \quad i = 1, \dots, M.$$



$\mathcal{V}_i \subset \Omega$ : das Kontrollvolumen  $V_i$  ist konvex.

$\mathcal{V}_i \not\subset \Omega$ :  $V_i$  kann auch nichtkonvex sein.

Zwei Fälle: **a.**  $\mathcal{V}_i \subset \Omega$  ( $i = 1, 2$  in Abb.); **b.**  $\mathcal{V}_i \not\subset \Omega$  ( $i = 3, 4, 5$  in Abb.).



Fall a:  $\mathcal{V}_i \subset \Omega$ .

$$\begin{aligned}
 - \int_{\partial \mathcal{V}_i} \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds &= - \sum_{k=1}^r \int_{\Gamma_{ik}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{ik} \, ds \approx - \sum_{k=1}^r |\Gamma_{ik}| \nabla u(s_{ik}) \cdot \mathbf{n}_{ik} \\
 &\approx - \sum_{k=1}^r |\Gamma_{ik}| \frac{u(\xi_{ik}) - u(\xi_i)}{\|\xi_{ik} - \xi_i\|}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$- \sum_{k=1}^r |\Gamma_{ik}| \frac{u_h(\xi_{ik}) - u_h(\xi_i)}{\|\xi_{ik} - \xi_i\|} = |\mathcal{V}_i| f(\xi_i), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Fall b:  $\mathcal{V}_i \not\subset \Omega$ .

Beispiel: die Stützstelle  $\xi_3$  aus der Abbildung.

Sei  $s$  die orthogonale Projektion von  $\xi_3$  auf den oberen horizontalen Rand des Gebietes.

Sei  $\Gamma_{3r} \subset \partial\Omega$  das horizontale Liniensegment des Kontrollvolumens  $V_3$ .

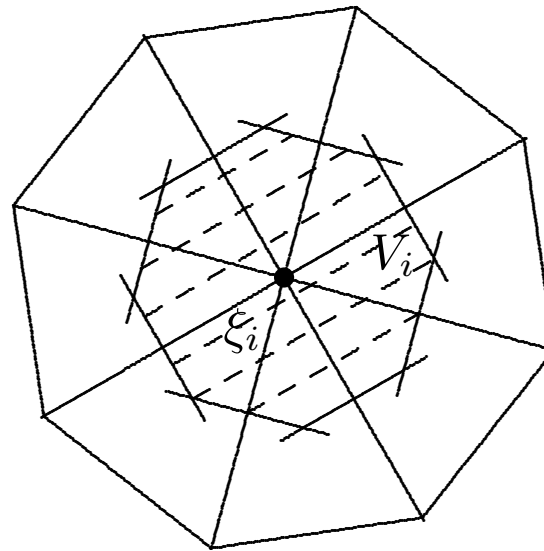
$$\int_{\Gamma_{3r}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{3r} ds \approx |\Gamma_{3r}| \nabla u(s) \cdot \mathbf{n}_{3r} = |\Gamma_{3r}| \frac{\partial u(s)}{\partial y} \approx |\Gamma_{3r}| \frac{u(s) - u(\xi_i)}{\|s - \xi_i\|}.$$

Wegen der Randbedingung ist der Wert  $u(s) = g(s)$  bekannt.

## 12.5.2 Finite-Volumen Methode mit einem dualen Gitter

Zwei Varianten wobei die Kontrollvolumina als *duale* Gitter zu einem anderen (primalen) Gitter konstruiert werden.

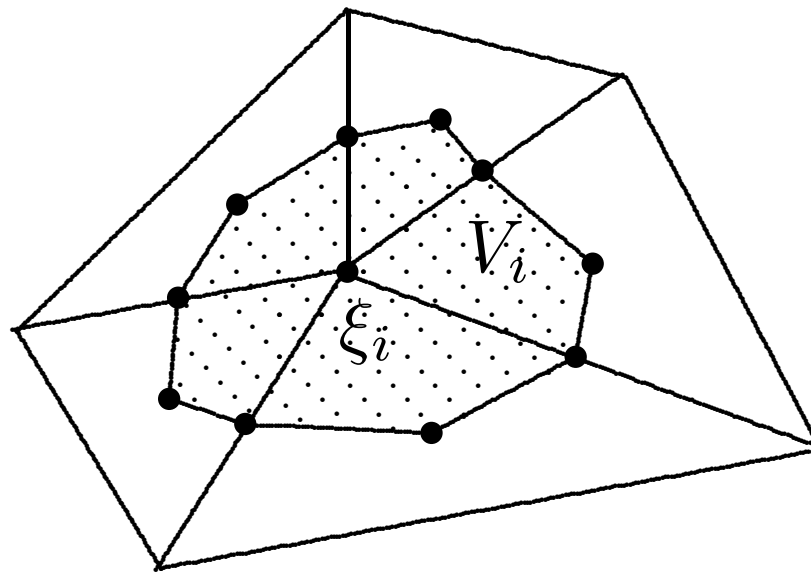
### Das Mittelsenkrechtenverfahren



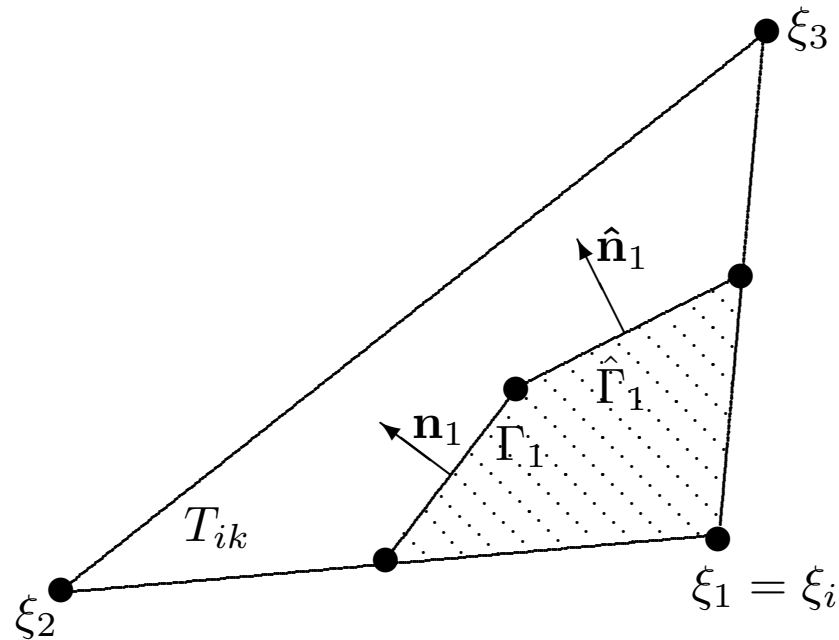
Damit nun die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten innerhalb der Dreiecke liegen, muß die primale Triangulierung so beschaffen sein, daß *alle Innenwinkel der Dreiecke  $\leq \frac{\pi}{2}$  sind.*



## Das Schwerpunktverfahren



Hierbei wird die für das Mittelsenkrechtenverfahren notwendige Innenwinkelbedingung vermieden. Die Diskretisierung der Randintegrale ist aber jetzt etwas schwieriger.



$$\int_{\partial V_i} \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{k=1}^s \int_{\Gamma_{ik}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{ik} \, ds + \int_{\hat{\Gamma}_{ik}} \nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ik} \, ds.$$

Sei  $\phi_j(x)$  linear Funktionen auf  $T_{ik}$  mit  $\phi_j(\xi_j) = 1$ ,  $\phi_j(\xi_l) = 0$  für  $l \neq j$ .

$$u_h(x) := \sum_{j=1}^3 u_h(\xi_j) \phi_j(x) \quad \text{für } x \in T_{ik}.$$

Dann ist  $(\nabla \phi_j)|_{T_{ik}} =: \mathbf{c}_j$  ein konstanter Vektor.

Zur Diskretisierung wird  $u(x)|_{T_{ik}}$  durch die Funktion  $u_h(x)$  ersetzt:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_1} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_1 ds + \int_{\hat{\Gamma}_1} \nabla u(x) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 ds \\
 & \approx \int_{\Gamma_1} \nabla u_h(x) \cdot \mathbf{n}_1 ds + \int_{\hat{\Gamma}_1} \nabla u_h(x) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 ds \\
 & = \int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^3 u_h(\xi_j) \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{n}_1 ds + \int_{\hat{\Gamma}_1} \sum_{j=1}^3 u_h(\xi_j) \mathbf{c}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 ds \\
 & = \sum_{j=1}^3 u_h(\xi_j) (|\Gamma_1| \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{n}_1 + |\hat{\Gamma}_1| \mathbf{c}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}_1).
 \end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise liefert als Diskretisierung eine Linearkombination  $c_{i,0}u_h(\xi_i) + \sum_{k=1}^s c_{i,k}u_h(\xi_{ik})$  der gesuchten Funktionswerte  $u_h(\xi_j)$ . Insgesamt ergibt sich das Gleichungssystem

$$c_{i,0}u_h(\xi_i) + \sum_{k=1}^s c_{i,k}u_h(\xi_{ik}) = |V_i|f(\xi_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

für die Gitterfunktion  $(u_h(\xi_j))_{1 \leq j \leq m}$ .

## 12.7 Diskretisierung parabolischer Anfangs-Randwertaufgaben

Für die Diskretisierung parabolischer Anfangs-Randwertaufgaben kann man die sogenannte *Linien-Methode* benutzen.

### **Semi-Diskretisierung des Wärmeleitungsproblems:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{gesucht } u_h : \overline{\Omega}_h \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{so daß} \\ \frac{\partial u_h}{\partial t}(\xi, t) = \Delta_h u_h(\xi, t) + f(\xi, t) \quad \text{in } \Omega_h \times [0, T] \\ u_h(\xi, t) = 0 \quad \text{für } \xi \in \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h, \quad t \in [0, T] \\ u_h(\xi, 0) = u_0(\xi) \quad \text{für } \xi \in \overline{\Omega}_h. \end{array} \right.$$

Dieses Problem wird *Semi-Diskretisierung* genannt, weil die Ortsvariable diskretisiert wurde, jedoch die Zeitvariable noch kontinuierlich bleibt.

Sei  $m = (n - 1)^2$ ,  $n = \frac{1}{h}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(t) &= (u_h(t)_1, \dots, u_h(t)_m)^T \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, T], \\ (u_h(t))_j &:= u_h(\xi_j, t), \quad \xi_j \in \Omega_h : \text{ Gitterpunkt mit Nummer } j. \end{aligned}$$

Matrix-Vektor Darstellung des Problems:

$$\begin{cases} \text{gesucht } \mathbf{u}_h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ so da\ss :} \\ \mathbf{u}'_h(t) = -\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_h(t) + \mathbf{b}(t) & \text{f\"ur alle } t \in [0, T], \\ \mathbf{u}_h(0) = (u_0(\xi_1), \dots, u_0(\xi_m))^T. \end{cases}$$

Dieses *System gew\"ohnlicher Differentialgleichungen* ist wegen der Eigenschaft  $\kappa_2(\mathbf{A}_1) \approx \left(\frac{2}{\pi h}\right)^2$  *steif*.

Sei

$$t_k := k\Delta t, \quad k = 0, \dots, K, \quad K\Delta t = T.$$

Anwendung der Trapezregel:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^0 &= \mathbf{u}_h(0), \\ \frac{\mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{y}^k}{\Delta t} &= -\frac{1}{2} \left( \mathbf{A}_1 \mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{b}(t_{k+1}) + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}^k - \mathbf{b}(t_k) \right), \quad k = 0, \dots, K-1. \end{aligned}$$

Diese Methode wird auch die *Crank-Nicolson* Methode genannt.

Für jedes  $k$  muß das Gleichungssystem

$$\left( \mathbf{I} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{A}_1 \right) \mathbf{y}^{k+1} = \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{A}_1 \right) \mathbf{y}^k - \frac{1}{2} \Delta t \left( \mathbf{b}(t_{k+1}) + \mathbf{b}(t_k) \right)$$

gelöst werden.

Für den Diskretisierungsfehler gilt eine Abschätzung

$$\left| (y^k)_j - u(\xi_j, t_k) \right| \leq C \left( (\Delta t)^2 + h^2 \right), \quad 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k \leq K,$$

wobei die Konstante  $C$  nur von  $u$  abhängt.

Man kann obige Reihenfolge auch vertauschen, was zur *horizontalen Linien-Methode* oder zum *Rothe-Verfahren* führt.

**Beispiel:** das implizite Euler-Verfahren.

Für den  $(k + 1)$ sten Zeitschritt soll eine Funktion  $u^{k+1} \in H_0^1(\Omega)$  bestimmt werden, die für den neuen Zeitschritt  $\Delta t = \tau$

$$\begin{aligned} \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} &= \Delta u^{k+1} + f(\cdot, t_k + \tau) \\ \iff \\ -\tau \Delta u^{k+1} + u^{k+1} &= u^k + \tau f(\cdot, t_k + \tau) \end{aligned}$$

erfüllt.

Die Lösung  $u^k$  auf dem vorherigen Zeitschritt geht dabei in die Daten der rechten Seite ein.

Dies ist nun wieder ein elliptisches Randwertproblem, welches im Prinzip mit jeder der obigen Diskretisierungsmethoden behandelt werden kann.