

**Aufgabe:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle quadratische Matrix.

Gesucht  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $v \in \mathbb{C}^n$ ,  $v \neq 0$ , die der *Eigenwertgleichung*

$$Av = \lambda v$$

genügen.

Die Zahl  $\lambda$  heißt *Eigenwert* und der Vektor  $v$  *Eigenvektor* zum Eigenwert  $\lambda$ . Die Skalierung von  $v$  ist frei wählbar.

Die Aufgabe: gesucht  $(\lambda, v)$ , so daß

$$Av - \lambda v = 0, \quad \|v\| = 1$$

ist *nichtlinear* in den Unbekannten  $(\lambda, v)$ .

## Beispiel 7.1.

---

Gesucht die Zahl  $\lambda$  und die Funktion  $u(x)$ , die die Differentialgleichung

$$-u''(x) - \lambda r(x)u(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0$$

erfüllen. Hierbei ist  $r > 0$  eine bekannte stetige Funktion.

Wir betrachten dazu Gitterpunkte

$$x_j = jh, \quad j = 0, \dots, n, \quad h = \frac{1}{n},$$

und ersetzen  $u''(x_j)$  durch die Differenz

$$\frac{u(x_j + h) - 2u(x_j) + u(x_j - h)}{h^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Es ergibt sich ein Gleichungssystem

$$Au - \lambda Ru = 0$$

für die Unbekannten  $\lambda$  und  $u_i \approx u(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , wobei

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r(x_1) & & & & \\ & r(x_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ \emptyset & & & \ddots & \\ & & & & r(x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Sei

$$R^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{r(x_1)}, \dots, \sqrt{r(x_{n-1})}), \quad R^{-1/2} := (R^{1/2})^{-1}, \\ v := R^{1/2}u, \quad B := R^{-1/2}AR^{-1/2}.$$

Man erhält die transformierte Gleichung

$$Bv = \lambda v,$$

also ein Eigenwertproblem.

## Beispiel 7.3.

---

Ein System linearer gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$z' = Az + b, \quad z(0) = z^0,$$

wobei  $z = z(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Annahmen:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^n$  hängen nicht von  $t$  ab und  $A$  ist diagonalisierbar:

$$Av^i = \lambda_i v^i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sei

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad V = (v^1 \ v^2 \ \dots \ v^n),$$

und damit

$$AV = V\Lambda.$$

So erhält man aus

$$V^{-1}z' = V^{-1}AVV^{-1}z + V^{-1}b, \quad y := V^{-1}z, \quad c := V^{-1}b$$

das System

$$y' = \Lambda y + c$$

von *entkoppelten* skalaren Gleichungen der Form

$$y'_i = \lambda_i y_i + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Hier ergibt sich einfach die Lösung

$$y_i(t) = \tilde{z}_i^0 e^{\lambda_i t} + \frac{c_i}{\lambda_i} (e^{\lambda_i t} - 1),$$

wobei  $\tilde{z}_i^0 := (V^{-1}z^0)_i$ .

△

## 7.2 Einige theoretische Grundlagen

---

**Lemma 7.4.**  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A$  genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

*Beweis:*

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0 \quad (v \neq 0).$$

Somit ist die Matrix  $A - \lambda I$  singulär. Letzteres ist zu  $\det(A - \lambda I) = 0$  äquivalent. □

Deshalb: Berechnung der Eigenwerte  $\Leftrightarrow$  Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $:= \det(A - \lambda I)$ .

Der Weg über die Nullstellen ist im allgemeinen ein *untaugliches Vorgehen* und nur für sehr kleine  $n$  akzeptabel.

## Beispiel 7.5.

---

$A = I$  hat Eigenwerte  $\lambda_i = 1$  und Eigenvektoren  $v^i = e^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Das Eigenwertproblem  $Ax = \lambda x$  ist *gut konditioniert* (Satz 7.17):

Sei  $\mu$  ein Eigenwert der Matrix  $A + E$ , wobei  $E$  mit  $\|E\|_2 \leq \epsilon$  eine Störung der Matrix  $A$  ist.

Dann gilt die Abschätzung

$$|1 - \mu| \leq \epsilon.$$

Das charakteristische Polynom  $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ :

$$\begin{aligned} p(\lambda) = (1 - \lambda)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\lambda)^k \\ &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} \lambda + \binom{n}{2} \lambda^2 - \binom{n}{3} \lambda^3 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \lambda^n. \end{aligned}$$

Bei einer (kleinen) Störung  $\epsilon > 0$  des Koeffizienten  $\binom{n}{0} = 1$  erhält man das gestörte Polynom

$$\begin{aligned} p_\epsilon(\lambda) &= 1 - \epsilon - \binom{n}{1}\lambda + \binom{n}{2}\lambda^2 - \binom{n}{3}\lambda^3 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}\lambda^n \\ &= p(\lambda) - \epsilon \end{aligned}$$

mit den Nullstellen

$$\begin{aligned} p_\epsilon(\tilde{\lambda}) = 0 &\iff (1 - \tilde{\lambda})^n - \epsilon = 0 \\ &\iff \tilde{\lambda} = 1 + \epsilon^{1/n} \quad (\text{falls } n \text{ ungerade}) \text{ oder} \\ &\quad \tilde{\lambda} = 1 \pm \epsilon^{1/n} \quad (\text{falls } n \text{ gerade}). \end{aligned}$$

△



Die Menge aller paarweise verschiedenen Eigenwerte

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \det(A - \lambda I) = 0 \}$$

bezeichnet man als *Spektrum* von  $A$ .

Matrizen  $A$  und  $B$  heißen *ähnlich*, falls es eine nichtsinguläre Matrix  $T$  gibt, so daß

$$B = T^{-1}AT$$

gilt.

**Lemma 7.6.** Ähnliche Matrizen haben das gleiche Spektrum:

$$\sigma(A) = \sigma(T^{-1}AT)$$

für beliebiges nichtsinguläres  $T$ .

*Beweis*

$$\begin{aligned} \det(T^{-1}AT - \lambda I) &= \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) \\ &= \det(T^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(T) = \det(A - \lambda I). \quad \square \end{aligned}$$

## Satz 7.7 (Komplexe Schur-Faktorisierung)

Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gibt es eine unitäre Matrix  $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , so daß

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & * & \\ & & \cdots & & \\ & 0 & & \cdots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: R$$

gilt. Dabei ist  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \sigma(A)$ .

### Satz 7.8 (Reelle Schur-Faktorisierung)

Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt es eine orthogonale Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so daß

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} R_{11} & & & & \\ & R_{22} & & * & \\ & & \cdots & & \\ & \emptyset & & \cdots & \\ & & & & R_{mm} \end{pmatrix} =: R$$

gilt. Dabei sind alle Matrizen  $R_{ii}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) reell und besitzen entweder die Ordnung eins (d.h.  $R_{ii} \in \mathbb{R}$ ) oder die Ordnung zwei (d.h.  $R_{ii} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ).

Im letzten Fall hat  $R_{ii}$  ein Paar von konjugiert komplexen Eigenwerten.

Die Menge aller Eigenwerte der Matrizen  $R_{ii}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) ist gerade das Spektrum der Matrix  $A$ .

**Folgerung 7.10.** Jede reelle *symmetrische* Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  läßt sich mittels einer orthogonalen Matrix  $Q$  ähnlich auf eine Diagonalmatrix  $D$  transformieren:

$$Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

$A$  besitzt somit nur *reelle Eigenwerte* und  $n$  *linear unabhängige zueinander orthogonale* Eigenvektoren (nämlich die Spalten von  $Q$ ).

## 7.3 Eigenwertabschätzungen

---

**Eigenschaften 7.11.** Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann gilt

(i) Falls  $A$  nichtsingulär:

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1}) ,$$

(ii)  $\lambda \in \sigma(A) \implies \bar{\lambda} \in \sigma(A) ,$

(iii)  $\sigma(A) = \sigma(A^T) ,$

(iv)  $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ .

**Satz 7.12.** Für alle  $\lambda \in \sigma(A)$  gilt

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

**Satz 7.13.** Seien

$$K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

die sogenannten *Gerschgorin-Kreise*. Dann gilt, daß alle Eigenwerte von  $A$  in der Vereinigung aller dieser Kreise liegen:

$$\sigma(A) \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^n K_i \right).$$

**Folgerung 7.14.** Seien  $K_i^T$  die Gerschgorin-Kreise für  $A^T$ :

$$K_i^T := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{j,i}| \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dann folgt aus Eigenschaft 7.11 (iii) und Satz 7.13:

$$\sigma(A) \subseteq \left( \left( \bigcup_{i=1}^n K_i \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^n K_i^T \right) \right).$$

Falls  $A$  symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte reell, also gilt:

$$\sigma(A) \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^n (K_i \cap \mathbb{R}) \right).$$

## Beispiel 7.15.

---

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

hat das Spektrum  $\sigma(A) = \{3.43 \pm 0.14i, -1.86\}$ .

Die Gerschgorin-Kreise sind in Abb.7.1 dargestellt.

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

hat das Spektrum  $\sigma(A) = \{1.27, 3.00, 4.73\}$ .

Die Gerschgorin-Kreise liefern

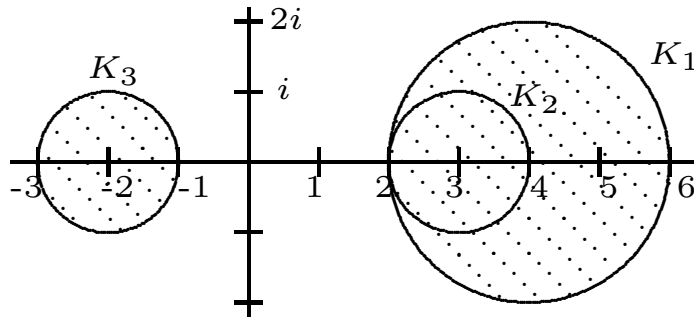
$$\sigma(A) \subset ([1, 3] \cup [1, 5] \cup [3, 5]),$$

also  $\sigma(A) \subset [1, 5]$ .

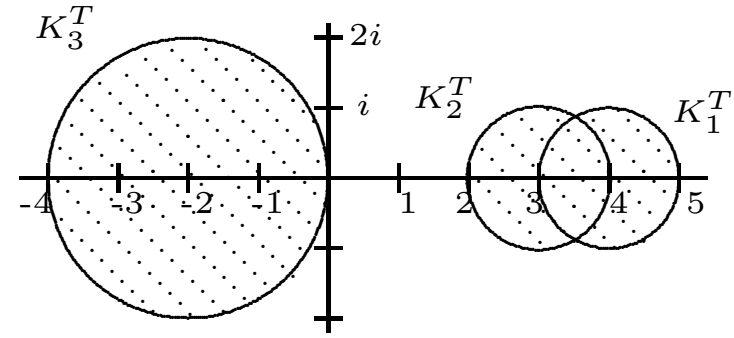
△

# Abbildung 7.1.

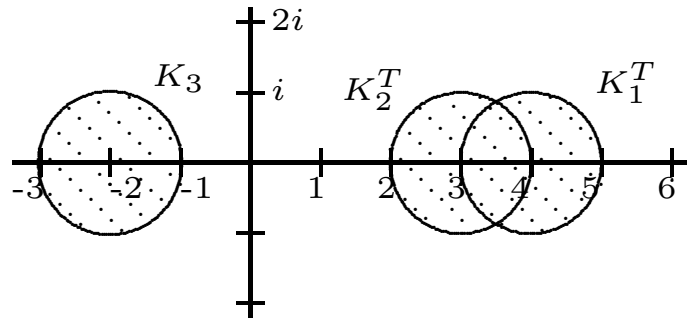
$$\sigma(A) \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^3 K_i \right) :$$



$$\sigma(A) \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^3 K_i^T \right) :$$



$$\sigma(A) \subseteq \left( \left( \bigcup_{i=1}^3 K_i \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^3 K_i^T \right) \right) :$$





**Satz 7.16.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine diagonalisierbare Matrix:

$$V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Sei  $\mu$  ein Eigenwert der gestörten Matrix  $A + E$ , dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu| \leq \|V\|_p \|V^{-1}\|_p \|E\|_p,$$

mit  $p = 1, 2, \infty$ .

Beachte:

die absolute Kondition der Eigenwerte hängt von der Konditionszahl  $\kappa_p(V) \|V\|_p \|V^{-1}\|_p$  der Eigenvektormatrix  $V$  ab und *nicht* von der Konditionszahl der Matrix  $A$ .

Für eine *symmetrische* Matrix ist das Problem der Bestimmung der *Eigenwerte* immer *gut konditioniert*:

**Satz 7.17.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix und  $\mu$  ein Eigenwert der gestörten Matrix  $A + E$ . Dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu| \leq \|E\|_2.$$

Für nichtsymmetrische Matrizen kann das Problem der Eigenwertbestimmung schlecht konditioniert sein, obgleich  $A$  selbst eine moderate Konditionszahl hat.

**Beispiel 7.18.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

mit Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 1 - \alpha, \quad v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 + \alpha, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \leq \frac{4}{1 - \alpha^2}, \quad \kappa_2(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 = \frac{1}{\alpha}.$$

Sei  $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha^3(2 + \alpha) & 0 \end{pmatrix}$ .

Die gestörte Matrix

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2(1 + \alpha)^2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 - \alpha(1 + \alpha) = \lambda_1 - \alpha^2, \\ \mu_2 &= 1 + \alpha(1 + \alpha) = \lambda_2 + \alpha^2, \end{aligned}$$

also gilt

$$|\mu_i - \lambda_i| = \alpha^2 = \frac{1}{2 + \alpha} \frac{\alpha^3(2 + \alpha)}{\alpha} = \frac{1}{2 + \alpha} \kappa_2(V) \|E\|_2.$$

△

## 7.5 Vektoriteration

---

Sei  $A$  diagonalisierbar, d.h., es existiert eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$ :

$$v^1, v^2, \dots, v^n \in \mathbb{C}^n.$$

Diese Vektoren  $v^i$  werden so skaliert, daß  $\|v^i\|_2 = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt. Außerdem nehmen wir an:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Ein beliebiger Startvektor  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  läßt sich darstellen als

$$x^0 = c_1 v^1 + c_2 v^2 + \dots + c_n v^n.$$

Wir nehmen ferner an, daß  $x^0$  so gewählt ist, daß

$$c_1 \neq 0.$$

Wendet man eine  $k$ -te Potenz von  $A$  auf  $x^0$  an, ergibt sich

$$A^k x^0 = \sum_{j=1}^n c_j A^k v^j = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^k v^j.$$

$$x^k := A^k x^0 = \lambda_1^k \left\{ c_1 v^1 + \sum_{j=2}^n \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k c_j v^j \right\} =: \lambda_1^k (c_1 v^1 + r^k),$$

wobei

$$\|r^k\|_2 = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Folglich strebt  $x^k = A^k x^0$  in die Richtung des Vektors  $v^1$ :

$$\alpha_k x^k = v^1 + c_1^{-1} r^k \quad \text{mit} \quad \alpha_k := (\lambda_1^k c_1)^{-1}.$$

Für die Annäherung des betragsmäßig größten Eigenwertes  $\lambda_1$  kann man nun

$$\lambda^{(k)} = \frac{(x^k)^T A x^k}{\|x^k\|_2^2} = \frac{(x^k)^T x^{k+1}}{\|x^k\|_2^2}$$

verwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}\lambda^{(k)} &= \lambda_1 \frac{(\alpha_k x^k)^T (\alpha_{k+1} x^{k+1})}{\|\alpha_k x^k\|_2^2} = \lambda_1 \frac{(v^1 + c_1^{-1} r^k)^T (v^1 + c_1^{-1} r^{k+1})}{\|v^1 + c_1^{-1} r^k\|_2^2} \\ &= \lambda_1 \frac{1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)}{1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)} = \lambda_1 \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right),\end{aligned}$$

also

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right).$$

**Bemerkung 7.19.**

Falls  $A$  *symmetrisch* ist, sind die Eigenvektoren  $v^i$  orthogonal.  
Man kann zeigen, daß sogar

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)$$

gilt.





Da  $\|x^k\|_2 \rightarrow \infty$ , falls  $|\lambda_1| > 1$ , und  $\|x^k\|_2 \rightarrow 0$  falls  $|\lambda_1| < 1$ , ist es zweckmäßig, die Iterierten  $x^k$  zu skalieren.

Insgesamt ergibt sich folgender

**Algorithmus 7.20 (Vektoriteration/Potenzmethode)**

Wähle Startvektor  $y^0$  mit  $\|y^0\|_2 = 1$ .

Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  berechne

$$\tilde{y}^{k+1} = Ay^k$$

$$\lambda^{(k)} = (y^k)^T \tilde{y}^{k+1}$$

$$y^{k+1} = \tilde{y}^{k+1} / \|\tilde{y}^{k+1}\|_2.$$

Mit  $x^0 := y^0$  kann man über Induktion einfach zeigen, daß

$$y^k = \frac{x^k}{\|x^k\|_2} = \frac{A^k x^0}{\|A^k x^0\|_2}$$

gilt.

## Beispiel 7.21.

---

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

hat das Spektrum  $\sigma(A) = \{5, 8, 6, -4, -2\}$ , also  $\lambda_1 = 8$ ,  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = \frac{3}{4}$ .

$k$	$ \lambda^{(k)} - \lambda_1 $	$\frac{ \lambda^{(k)} - \lambda_1 }{ \lambda^{(k-1)} - \lambda_1 }$
0	6.8000	-
1	3.0947	0.46
2	1.3864	0.44
3	1.5412	1.11
4	0.8622	0.56
5	0.7103	0.82
6	0.4758	0.67
7	0.3666	0.77
8	0.2629	0.72
9	0.1992	0.76
10	0.1468	0.74
11	0.1107	0.75

## Beispiel 7.22.

---

Wir betrachten die *symmetrische* Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 13 & -16 \\ 13 & -10 & 13 \\ -16 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

mit dem Spektrum  $\sigma(A) = \{3, 9, -36\}$ , also

$$\lambda_1 = -36, \quad \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = \frac{1}{4}.$$

$k$	$ \lambda^{(k)} - \lambda_1 $	$\frac{ \lambda^{(k)} - \lambda_1 }{ \lambda^{(k-1)} - \lambda_1 }$	$q_k = \frac{\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}}{\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}}$	$\left  \frac{q_k}{1 - q_k} (\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}) \right $
0	29	-	-	-
1	3.97	0.137	-	-
2	2.63e-1	0.066	0.148	6.44e-1
3	1.65e-2	0.063	0.067	1.76e-2
4	1.03e-3	0.062	0.063	1.03e-3
5	6.44e-5	0.062	0.062	6.44e-5
6	4.02e-6	0.062	0.062	4.02e-6

## Beispiel 7.23.

Wir betrachten das Eigenwertproblem in Beispiel 7.1 mit  $R = I$ , also

$$Ax = \lambda x, \quad (A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \text{ wie in (7.3)}).$$

Für die Matrix  $A$  ist eine explizite Formel für die Eigenwerte bekannt:

$$\lambda_{n-k} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{1}{2} k \pi h \right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad h := \frac{1}{n}.$$

Wegen

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| = 1 - \frac{3}{4} \pi^2 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

erwartet man langsame Konvergenz  $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda_1$  für  $h \ll 1$ .

Für  $h = \frac{1}{30}$ :

$k$	$ \lambda^{(k)} - \lambda_1 $	$\frac{ \lambda^{(k)} - \lambda_1 }{ \lambda^{(k-1)} - \lambda_1 }$
1	1.79e+3	0.51
5	4.81e+2	0.82
15	1.64e+2	0.93
50	4.36e+1	0.98
100	1.70e+1	0.98
150	8.16	0.99

## 7.6 Inverse Vektoriteration

Angenommen, wir hätten eine Annäherung  $\mu \approx \lambda_i$  eines beliebigen Eigenwertes  $\lambda_i$  der Matrix  $A$  zur Verfügung, so daß

$$|\mu - \lambda_i| < |\mu - \lambda_j| \quad \text{für alle } j \neq i.$$

Zur Berechnung von  $(\lambda_i - \mu)^{-1}$ , und damit von  $\lambda_i$ , kann man die Vektoriteration auf  $(A - \mu I)^{-1}$  anwenden:

### **Algorithmus 7.24. (Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung)**

Wähle Startvektor  $y^0$  mit  $\|y^0\|_2 = 1$ .

Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  :

$$\text{Löse } (A - \mu I)\tilde{y}^{k+1} = y^k$$

$$\lambda^{(k)} := \frac{1}{(y^k)^T \tilde{y}^{k+1}} + \mu$$

$$y^{k+1} := \tilde{y}^{k+1} / \|\tilde{y}^{k+1}\|_2.$$

Es gilt:

$$\lambda^{(k)} := \frac{1}{(y^k)^T \tilde{y}^{k+1}} + \mu \rightarrow \lambda_i \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit wird durch das Verhältnis zwischen  $\frac{1}{|\lambda_i - \mu|}$  und dem betragsmäßig zweitgrößten Eigenwert von  $(A - \mu I)^{-1}$ , also durch den Faktor

$$\frac{\max_{j \neq i} \frac{1}{|\lambda_j - \mu|}}{\frac{1}{|\lambda_i - \mu|}} = \frac{1}{\min_{j \neq i} |\lambda_j - \mu|} = \frac{|\lambda_i - \mu|}{\min_{j \neq i} |\lambda_j - \mu|}$$

bestimmt. Hieraus schließen wir:

Ist  $\mu$  eine besonders gute Schätzung von  $\lambda_i$ , so gilt

$$\frac{|\lambda_i - \mu|}{\min_{j \neq i} |\lambda_j - \mu|} \ll 1,$$

das Verfahren konvergiert in diesem Fall sehr rasch.

## Beispiel 7.25.

Wir betrachten die Matrix aus Beispiel 7.21 und wenden zur Berechnung des Eigenwerts  $\lambda_4 = -4$  den Algorithmus 7.24 mit  $\mu = -3.5$  und  $y^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 1, 1, 1, 1)^T$  an.

Resultate:

$k$	$ \lambda^{(k)} - \lambda_4 $	$\frac{ \lambda^{(k)} - \lambda_4 }{ \lambda^{(k-1)} - \lambda_4 }$
0	5.45	-
1	3.99e-1	0.073
2	1.04e-1	0.26
3	3.83e-2	0.37
4	1.24e-2	0.32
5	4.17e-3	0.34
6	1.39e-3	0.33

Für den theoretischen Konvergenzfaktor ergibt sich

$$\frac{|\lambda_4 - \mu|}{\min_{j \neq 4} |\lambda_j - \mu|} = \frac{|\lambda_4 + 3.5|}{\min_{j \neq 4} |\lambda_j + 3.5|} = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}.$$

Für die inverse Vektoriteration, wobei man den Parameter  $\mu$  nach jedem Schritt auf die jeweils aktuellste Annäherung  $\lambda^{(k)}$  von  $\lambda_4 = -4$  setzt,

$$\mu_0 := -3.5, \quad \mu_k = \lambda^{(k-1)} \quad \text{für } k \geq 1,$$

ist die Konvergenz viel schneller:

$k$	$ \lambda^{(k)} - \lambda_4 $	$\frac{ \lambda^{(k)} - \lambda_4 }{ \lambda^{(k-1)} - \lambda_4 ^2}$	$ \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} $
0	5.45	-	5.93
1	4.84e-1	0.016	7.53e-1
2	2.67e-1	1.15	2.41e-1
3	2.80e-2	0.39	2.76e-2
4	3.86e-4	0.49	2.86e-4
5	7.44e-8	0.50	7.44e-8
6	2.66e-15	0.48	-

Die Konvergenzgeschwindigkeit ist nun *quadratisch* statt linear.

In der vierten Spalte kann man sehen, daß die Fehlerschätzung  $|\lambda^{(k)} - \lambda_1| \approx |\lambda^{(k)} - \lambda^{(k+1)}|$  befriedigend ist. △



## 7.7 QR-Verfahren

---

Der  $QR$ -Algorithmus ist eng mit der sogenannten *Unterraumiteration* verwandt. Letztere Methode, die sich als Verallgemeinerung der *Vektoriteration* interpretieren läßt, wird erst behandelt.

### **Algorithmus 7.26 (Stabile Unterraumiteration)**

Wähle eine orthogonale Startmatrix  $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  berechne

$$B = AQ_k,$$

eine  $QR$ -Zerlegung von  $B$ :

$$B =: Q_{k+1}R_{k+1},$$

mit  $Q_{k+1}$  orthogonal und  $R_{k+1}$  eine obere Dreiecks-matrix.

Notation:  $Q_k = (q_k^1 \ q_k^2 \ \dots \ q_k^n)$  und

$$V_j = \langle v^1, \dots, v^j \rangle, \quad 1 \leq j \leq n,$$

der von den Eigenvektoren  $v^1, \dots, v^j$  aufgespannte Unterraum.

Sei

$$S_k^j := \langle A^k q_0^1, A^k q_0^2, \dots, A^k q_0^j \rangle = \text{Bild } A^k(q_0^1 \ q_0^2 \ \dots \ q_0^j).$$

Nun kann man den Zusammenhang der Räume  $S_k^j$  zu den  $Q_k$  herstellen, indem man per Induktion zeigt, daß

$$\langle q_k^1, q_k^2, \dots, q_k^j \rangle = S_k^j$$

gilt. Für  $x \in S_k^j$  sei

$$d(V_j, x) := \min_{v \in V_j} \|v - x\|_2$$

$$d(V_j, S_k^j) := \max \left\{ d(V_j, x) \mid x \in S_k^j, \|x\|_2 = 1 \right\}.$$

Man kann zeigen:

$$d(V_j, S_k^j) = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\right|^k\right), \quad k \rightarrow \infty \text{ für } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Für die  $j$ -te Spalte  $q_k^j$  der Matrix  $Q_k$  ergibt sich, wegen  $\langle q_k^j \rangle \subset S_k^j \rightarrow V_j$  ( $k \rightarrow \infty$ ):

$$q_k^j = \sum_{\ell=1}^j \alpha_\ell v^\ell + e_k, \quad \text{mit } e_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

und somit

$$\begin{aligned} Aq_k^j &= \sum_{\ell=1}^j \alpha_\ell Av^\ell + \tilde{e}_k \quad (\tilde{e}_k := Ae_k) \\ &= \sum_{\ell=1}^j \alpha_\ell \lambda_\ell v^\ell + \tilde{e}_k \quad \text{mit } \tilde{e}_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Wegen  $S_k^j \rightarrow V_j$ :

$$Aq_k^j = \sum_{\ell=1}^j \beta_{\ell,k} q_k^\ell + \hat{e}_k, \quad \text{mit } \hat{e}_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Für  $i > j$  erhält man, wegen der Orthogonalität  $(q_k^i)^T q_k^\ell = 0$ ,  $i \neq \ell$ :

$$(q_k^i)^T A q_k^j = (q_k^i)^T \hat{e}_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Hieraus folgt:

Die Folge  $Q_k^T A Q_k$  konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  gegen eine *obere Dreiecksmatrix*.

Sei  $\{Q_k\}_{k \geq 0}$  die Folge orthogonaler Matrizen aus der Unterraumiteration, und

$$A_k := Q_k^T A Q_k .$$

Es gilt:

- $\sigma(A_k) = \sigma(A)$  für alle  $k$ .
- 

$$Q_k^T A Q_k = A_k \rightarrow R = \left( \begin{array}{c} \nabla \\ \end{array} \right) \quad (k \rightarrow \infty).$$

- Die Diagonaleinträge der Matrix  $A_k$  sind Annäherungen für die Eigenwerte der Matrix  $A$ .
- Es gilt  $r_{i,i} = \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , d.h., die Eigenwerte stehen *nach Größe sortiert* auf der Diagonale von  $R$ .
- Für  $k \rightarrow \infty$  streben die Fehler in diesen Annäherungen gegen 0, wobei die Konvergenzgeschwindigkeit durch die Faktoren  $\left| \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right|$ ,  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ , bestimmt ist.

## Beispiel 7.28.

---

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ , mit Eigenwerten  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1$  und  $Q_0$  die Startmatrix wie in (7.45). Resultate der Unterraumiteration:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2.8462 & 1.5151 & 3.8814 \\ 1.3423 & 1.8106 & 2.8356 \\ 0.1438 & -0.7700 & 1.3433 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3.2620 & 5.0188 & 0.4950 \\ -0.0631 & 1.8341 & 0.8540 \\ -0.0010 & -0.1097 & 0.9039 \end{pmatrix},$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 3.0038 & 4.9993 & 1.0002 \\ -0.0008 & 1.9963 & 0.9991 \\ -0.0000 & -0.0001 & 0.9999 \end{pmatrix}.$$

und  $\sigma(A) = \sigma(A_1) = \sigma(A_5) = \sigma(A_{15}) \approx \text{diag}(A_{15}) = \{3.00, 2.00, 1.00\}$ .

Da wir in diesem Abschnitt annehmen, daß die Matrix  $A$  nur *einfache* Eigenwerte besitzt, hat die reelle Schur-Faktorisierung von  $A$  die Form

$$Q^T A Q = R,$$

Aus der oben diskutierten Analyse der Unterraumiteration folgt, daß diese Methode eine Folge  $Q_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , von orthogonalen Matrizen mit der Eigenschaft  $Q_k^T A Q_k = A_k \rightarrow R$  liefert, wobei  $R$  eine obere Dreiecksmatrix ist.

Offensichtlich **ergibt die Unterraumiteration eine näherungsweise Konstruktion der reellen Schur-Faktorisierung.** △

Die über die Unterraumiteration definierten Matrizen  $A_k$  können einfach *rekursiv* (d.h.  $A_k$  aus  $A_{k-1}$ ) berechnet werden.

**Lemma 7.32.** Sei  $\tilde{A}_0 := Q_0^T A Q_0$ , wobei  $Q_0$  die in Algorithmus 7.26 gewählte orthogonale Startmatrix ist, und sei  $\tilde{A}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , definiert durch

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{k-1} &=: QR \quad (\text{die } QR\text{-Zerlegung von } \tilde{A}_{k-1}, \text{ mit } r_{i,i} \geq 0) \\ \tilde{A}_k &:= RQ.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\tilde{A}_k = A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei  $A_k = Q_k^T A Q_k$  die in (7.51) definierte Matrix ist.



Aufgrund von Lemma 7.32 läßt sich folgende einfache Methode zur Berechnung der Matrizen  $A_k = Q_k^T A Q_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , formulieren:

**Algorithmus 7.33 (QR-Algorithmus)** Gegeben:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und eine orthogonale Matrix  $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (z.B.  $Q_0 = I$ ).

Berechne  $A_0 = Q_0^T A Q_0$ .

Für  $k = 1, 2, \dots$  berechne

$A_{k-1} =: QR$  (QR-Zerlegung von  $A_{k-1}$ )

$A_k := RQ$ .

## Beispiel 7.34.

---

Für die symmetrische Matrix  $A$  aus Beispiel 7.22. mit  $\sigma(A) = \{3, 9, -36\}$  liefert der  $QR$ -Algorithmus mit  $Q_0 = I$  folgende Resultate:

$$A_3 = \begin{pmatrix} -35.984 & -0.8601 & -0.0392 \\ -0.8601 & 8.9590 & 0.3826 \\ -0.0392 & 0.3826 & 3.0246 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -36.000 & 0.0135 & -0.0000 \\ 0.0135 & 9.0000 & -0.0143 \\ -0.0000 & -0.0143 & 3.0000 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix  $A$  aus Beispiel 7.9 mit  $\sigma(A) = \{9, 27 + 9i, 27 - 9i\}$  ergeben sich mit  $Q_0 = I$  folgende Resultate:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 21.620 & -5.8252 & 15.748 \\ 19.195 & 32.873 & -26.365 \\ -0.2210 & 0.2433 & 8.5070 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 33.228 & -19.377 & 25.450 \\ 6.1735 & 20.779 & 16.971 \\ 0.0038 & -0.0205 & 8.9930 \end{pmatrix},$$

Der  $2 \times 2$ -Diagonalblock  $\begin{pmatrix} 33.228 & -19.377 \\ 6.1735 & 20.779 \end{pmatrix}$  der Matrix  $A_6$  hat die Eigenwerte  $27.004 \pm 8.993i$ . △

- Die *Konvergenz* des *QR*-Verfahrens wird sehr langsam sein, falls es ein  $j$  gibt, für das  $\left| \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right| \approx 1$  gilt.
- Der *Aufwand* pro Schritt beim *QR*-Verfahren ist erheblich, da man jedes mal die *QR*-Zerlegung einer  $n \times n$ -Matrix (z.B. mit Householder-Spiegelungen) und das Produkt  $RQ$  berechnen muß.  
Der Aufwand pro Iteration ist i.a.  $\mathcal{O}(n^3)$  Multiplikationen/Divisionen.  
Der *QR*-Algorithmus 7.33 ist daher im allgemeinen *kein effizientes Verfahren!*

### Transformation auf Hessenbergform

Eine Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *obere Hessenberg-Matrix*, falls  $B$  die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ * & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

hat.

In Beispiel 7.35 wird gezeigt, wie man eine Matrix  $A$  über eine *orthogonale Ähnlichkeitstransformation*, d.h.

$$Q^T A Q, \quad \text{mit } Q \text{ orthogonal}$$

auf obere Hessenbergform bringen kann.

## Beispiel 7.35.

---

Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 15 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 12 \\ 2 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & -28 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man setze

$$v^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q_{v^1} := I - 2 \frac{v^1 (v^1)^T}{(v^1)^T v^1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

und

$$Q_1 := \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & Q_{v^1} & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

Dann ergibt sich

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 15 & -6 & 0 \\ -3 & 21 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & -21 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

*Bei der Multiplikation von  $Q_1 A$  mit  $Q_1$  bleiben die Null-Einträge in der ersten Spalte erhalten:*

$$\tilde{A} := Q_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -14 & -8 \\ -3 & 3 & -18 & -15 \\ 0 & 12 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 22 & 7 \end{pmatrix}$$

Sei

$$v^2 := \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} + 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q_{v^2} := I - 2 \frac{v^2 (v^2)^T}{(v^2)^T v^2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

und

$$Q_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{Q_{v^2}} \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich

$$Q_2 \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -14 & -8 \\ -3 & 3 & -18 & -15 \\ 0 & -13 & -5.692 & 0.0769 \\ 0 & 0 & 21.462 & 7.615 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} := Q_2 \tilde{A} Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 & -2 \\ -3 & 3 & 22.385 & -6.923 \\ 0 & -13 & 5.225 & 2.260 \\ 0 & 0 & -22.740 & 1.225 \end{pmatrix}.$$

Sei  $Q = Q_1Q_2$ , also  $Q^T = Q_2^TQ_1^T = Q_2Q_1$ , dann gilt

$$Q^T A Q = Q_2 Q_1 A Q_1 Q_2 = \hat{A},$$

wobei  $\hat{A}$  eine obere Hessenberg-Matrix ist. △

Man kann eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  durch Householder-Transformationen auf eine zu  $A$  ähnliche Matrix mit oberer Hessenberggestalt bringen.

**Rechenaufwand 7.36.** Der Rechenaufwand der Ähnlichkeitstransformation auf Hessenbergform über Householder-Transformationen ist etwa  $\frac{5}{3}n^3$  Operationen.



**Wir nehmen im weiteren an, daß  $A$  eine nicht-reduzierbare obere Hessenberg-Matrix ist.**

Wenn  $A$  eine nicht-reduzierbare obere Hessenbergmatrix ist, kann man die Identität als Anfangsmatrix bei der Unterraumiteration (also auch beim  $QR$ -Algorithmus) nehmen.

Das folgende Resultat zeigt, daß im  $QR$ -Algorithmus die obere Hessenberggestalt erhalten bleibt.

**Lemma 7.37.** Sei  $A_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine obere Hessenberg-Matrix und

$$\begin{aligned} A_{k-1} &:= QR \quad (QR\text{-Zerlegung von } A_{k-1}) \\ A_k &:= RQ \end{aligned}$$

der Iterationsschritt im  $QR$ -Algorithmus 7.33, dann ist auch  $A_k$  eine obere Hessenberg-Matrix.

Aufgrund dieses Ergebnisses ergibt sich als zweiter Vorteil der Transformation auf Hessenberggestalt eine starke Reduktion des Rechenaufwandes:

**Bemerkung 7.38.** Dadurch, daß man beim  $QR$ -Algorithmus in einer Vorbearbeitungsphase die Matrix auf obere Hessenbergform bringt, braucht man nur die  $QR$ -Zerlegung einer *Hessenberg-Matrix*  $A_{k-1}$  zu berechnen.

Falls man dazu Givens-Rotationen verwendet, ist der Aufwand für die Berechnung  $A_{k-1} =: QR$ ,  $A_k := RQ$  nur  $\mathcal{O}(n^2)$  Operationen.

Falls  $A$  symmetrisch ist, ist dieser Aufwand nur  $\mathcal{O}(n)$  Operationen.

Wegen der oberen Hessenberggestalt der Matrizen  $A_k$  zeigt das Konvergenzverhalten der Subdiagonalelemente

$$a_{i+1,i}^{(k)} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

gerade die Konvergenzgeschwindigkeit.

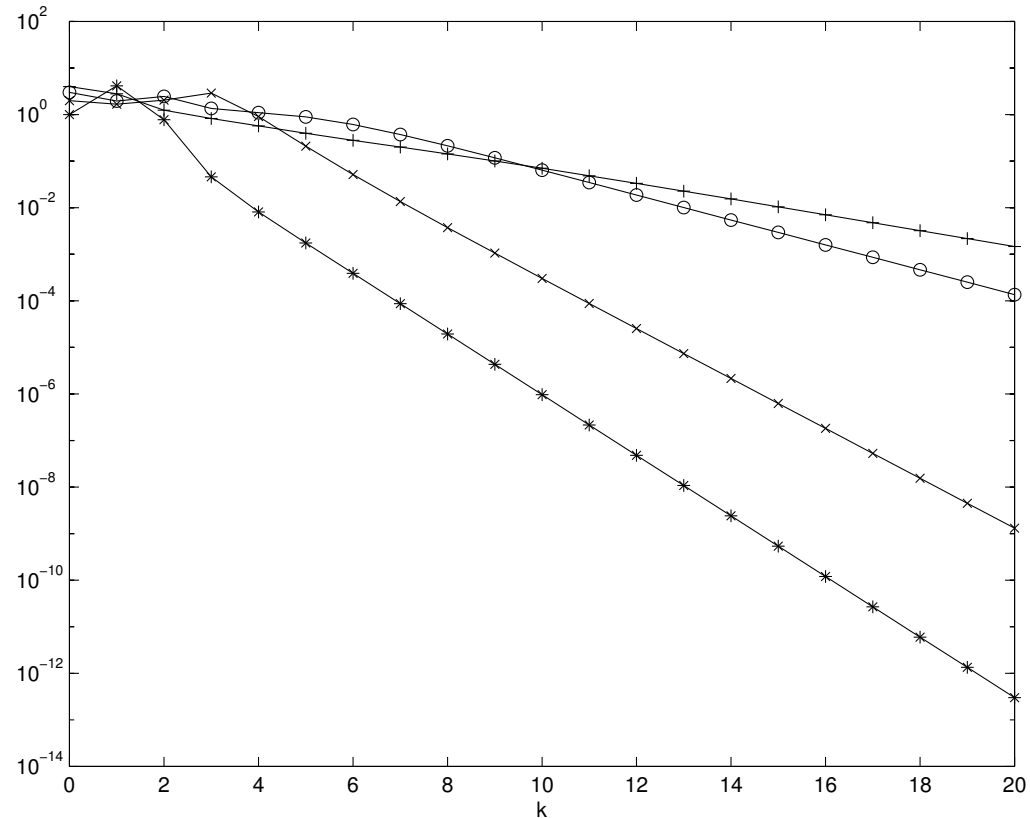
Wir betrachten die Matrix

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen  $A_k$ ,  $k \geq 1$  haben dann alle eine obere Hessenberg-Gestalt. In Abb.7.2 wird die Größe der Einträge  $a_{i+1,i}^{(k)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) für  $k = 0, 1, 2, \dots, 20$  dargestellt.

Für  $k = 20$  ergibt sich das Resultat:

$$\sigma(A) = \sigma(A_{20}) \approx \{14.15, 9.53, 5.16, 1.50, -0.34\}.$$



$$\begin{aligned}
 |a_{2,1}^{(k)}| &\approx c_1(0.67)^k \approx c_1 \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k, & |a_{3,2}^{(k)}| &\approx c_2(0.54)^k \approx c_2 \left| \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right|^k, \\
 |a_{4,3}^{(k)}| &\approx c_3(0.29)^k \approx c_3 \left| \frac{\lambda_4}{\lambda_3} \right|^k, & |a_{5,4}^{(k)}| &\approx c_4(0.22)^k \approx c_5 \left| \frac{\lambda_5}{\lambda_4} \right|^k.
 \end{aligned}$$

## QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

Angenommen, wir hätten eine Annäherung  $\mu \approx \lambda_i$  eines Eigenwertes  $\lambda_i$  der Matrix  $A$  zur Verfügung, so daß

$$|\mu - \lambda_i| \ll |\mu - \lambda_j| \quad \text{für alle } j \neq i$$

Seien

$$|\tau_1| > |\tau_2| > \dots > |\tau_n| > 0$$

die Eigenwerte der Matrix  $A - \mu I$ , dann ist  $\tau_n = \lambda_i - \mu$  und

$$\frac{|\tau_n|}{|\tau_{n-1}|} \ll 1.$$

### Algorithmus 7.40 (QR-Algorithmus + Spektralverschiebung).

Gegeben: eine nicht reduzierbare Hessenberg-Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$A_0 := A$ .

Für  $k = 1, 2, \dots$ :

Bestimme  $\mu_{k-1} \in \mathbb{R}$ .

$A_{k-1} - \mu_{k-1}I =: QR$  (QR-Zerlegung von  $A_{k-1} - \mu_{k-1}I$ ).

$A_k := RQ + \mu_{k-1}I$

Eine geeignete Wahl für den Verschiebungsparameter:

$$\mu_{k-1} = a_{n,n}^{(k-1)}$$

Mit dieser Spektralverschiebung wird das Subdiagonalelement  $a_{n,n-1}^{(k)}$  sehr rasch gegen 0 streben.

Im allgemeinen ist die Konvergenzgeschwindigkeit sogar *quadratisch*.

$$A_k = \left( \begin{array}{cccc|c} * & \dots & \dots & \dots & * \\ * & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ & & & * & * \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \approx 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} * \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ * \\ \hline \tilde{\lambda}_i \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} & * \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & * \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \approx 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} * \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ * \\ \hline \tilde{\lambda}_i \end{array} \right),$$

Der *QR*-Algorithmus kann dann mit der Matrix  $\hat{A}$  fortgesetzt werden.

## Beispiel 7.41.

---

Wir betrachten die Matrix  $A$  aus Beispiel 7.39 und wenden den  $QR$ -Algorithmus 7.40 an, wobei  $\mu_{k-1}$  wie oben genommen wird.

Sobald das Subdiagonalelement  $a_{5,4}^{(k)}$  die Bedingung  $|a_{5,4}^{(k)}| < 10^{-16}$  erfüllt, wird nur noch die  $4 \times 4$  Matrix links oben weiter bearbeitet.  
usw.

Für  $k = 17$  ergibt sich

$$A_{17} = \begin{pmatrix} 14.150 & 1.2371 & 1.5503 & -0.6946 & -0.4395 \\ -1.9e-19 & -0.3354 & -2.0037 & -8.5433 & -1.9951 \\ 0 & 2.1e-20 & 1.5014 & -1.4294 & -14.8840 \\ 0 & 0 & 1.8e-20 & 5.1552 & 3.2907 \\ 0 & 0 & 0 & -4.7e-21 & 9.5248 \end{pmatrix}.$$

Abbildung 7.3.  $*$  :  $|a_{5,4}^{(k)}|$ ,  $\times$  :  $|a_{4,3}^{(k)}|$ ,  $\circ$  :  $|a_{3,2}^{(k)}|$ ,  $+$  :  $|a_{2,1}^{(k)}|$

