

8.2 Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Wir beschränken uns auf die Lagrange-Interpolation mit Polynomen.
Der Raum der Polynome vom Grad n :

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Stützstellen:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

Aufgabe 8.2 (Lagrange-Polynominterpolation).

Finde zu Daten $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

8.2.1 Existenz-Eindeutigkeit Lagrange-Polynominterpolation

Satz 8.3. Das Lagrange-Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h., zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

Insbesondere läßt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten Lagrange-Fundamentalpolynome sind.

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen x_0, \dots, x_n wird mit

$$P_n =: P(f|x_0, \dots, x_n)$$

bezeichnet.

Die *Eindeutigkeit* des Interpolationspolynoms werden wir des öfteren in folgender Form verwenden:

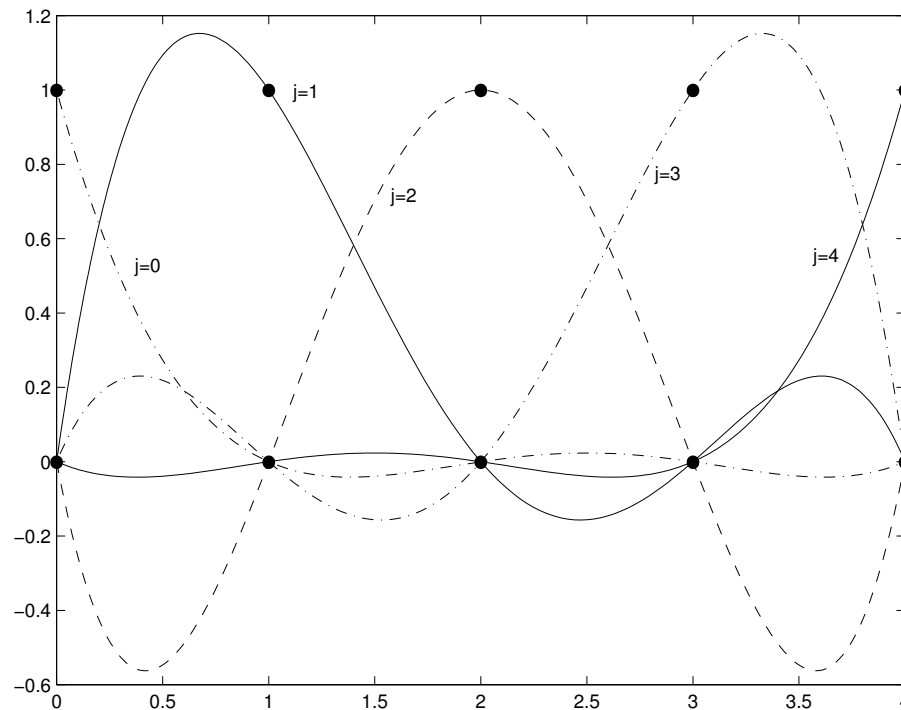
Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$ gilt

$$P(Q|x_0, \dots, x_n) = Q,$$

da sich ja Q insbesondere selbst interpoliert und wegen der Eindeutigkeit damit gleich dem Interpolationspolynom sein muß.

Für den Fall äquidistanter Stützstellen $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \widehat{\ell}_{jn}(t) := \ell_{jn}(x_0 + th) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x_0 + th - (x_0 + kh)}{x_0 + jh - (x_0 + kh)} \\ &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(t - k)}{(j - k)} = \frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (t - k). \end{aligned}$$



Ausgangspunkt: die Darstellung der interpolierenden Geraden als *Konvexkombination* der beiden Punkte

$$P(f|x_0, x_1)(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0).$$

Verallgemeinerung hiervon:

Lemma 8.6 (Aitken). Man hat

$$\begin{aligned} P(f|x_0, \dots, x_n)(x) &= \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f|x_1, \dots, x_n)(x) \\ &\quad + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x), \end{aligned}$$

d.h., die Interpolierende an den Stellen x_0, \dots, x_n ist eine Konvexkombination der Interpolierenden niedrigeren Grades an den Teilmengen $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ der Gesamtstützstellenmenge.

Die Identität führt auf das folgende rekursive Schema.

Setze für festes x

$$P_{i,k} = P(f|x_{i-k}, \dots, x_i)(x), \quad 0 \leq k \leq i \leq n,$$

d.h. speziell

$$P_{n,n} = P(f|x_0, \dots, x_n)(x),$$

$$P_{i,0} = P(f|x_i)(x) = f(x_i).$$

Lemma 8.6 besagt dann

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= \frac{x - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}} P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}} (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}). \end{aligned}$$

Neville-Aitken-Schema:

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	\dots
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$P_{1,1}$		
x_2	$f(x_2)$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	
x_3	$f(x_3)$	$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	\dots
\vdots	\vdots			\dots
x_n	$f(x_n)$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$	\dots $P_{n,n}$

Beispiel 8.7. Sei

$$n = 2, \quad x = 0.5, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 2.$$

Aus (8.12) folgt:

$$P_{1,1} = 4 + \frac{-0.5}{1}(4 - 1) = 2.5$$

$$P_{2,1} = 2 + \frac{-1.5}{1}(2 - 4) = 5$$

$$P_{2,2} = 5 + \frac{-1.5}{2}(5 - 2.5) = 3\frac{1}{8}$$

also $P(f|0, 1, 2)(0.5) = 3\frac{1}{8}$.

△

8.2.3 Darstellung des Interpolationspolynoms mittels der Potenzform

Klassische *monomiale Basis* $1, x, \dots, x^n$:

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n$$

Beispiel 8.9.

Bei drei äquidistanten Stützstellen $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$ erhält man z.B. folgende Darstellung für $P_2 = P(f|-h, 0, h)$ mit Hilfe der monomialen Basis $1, x, x^2$ des Raumes Π_2

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f(h) - f(-h)}{2h}x + \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{2h^2}x^2.$$

Die Bedingungen $P(f|x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, führen auf das Gleichungssystem

$$V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

zur Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten a_i . Hierbei ist V_n die Vandermonde-Matrix

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Die Kondition des Problems

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \rightarrow V_n^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wird durch die Konditionszahl $\|V_n\| \|V_n^{-1}\|$ der Matrix V_n beschrieben.

Beispiel 8.10.

Sei $h = 1/n$ und $x_i = 1 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Für diese Stützstellenverteilung hat die Vandermonde-Matrix eine Konditionszahl bzgl. der 2-Norm wie in der unteren Tabelle dargestellt:

n	4	6	8	10
$\kappa_2(V_n)$	4.1e+4	2.0e+7	1.1e+10	6.5e+12

Das Problem

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \rightarrow V_n^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ist (sehr) schlecht konditioniert.

Bemerkung 8.11. Horner-Schema

Sei $p \in \Pi_n$ ein Polynom, das in der Potenzform vorliegt, d.h.,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

mit bekannten Koeffizienten a_0, \dots, a_n . Es gilt

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n) \dots)).$$

Algorithmus 8.12 (Horner-Schema).

Setze $b_n = a_n$,

für $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ berechne

$$b_k = a_k + xb_{k+1}$$

Dann ist

$$p(x) = b_0.$$

Eine effiziente Methode zur *Auswertung* eines Polynoms in der Potenzform.

8.2.4 Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.13. Für die Lagrange-Interpolationspolynome $P_{n-1} = P(f|x_0, \dots, x_{n-1}) \in \Pi_{n-1}$ und $P_n = P(f|x_0, \dots, x_n) \in \Pi_n$ gilt

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

mit

$$\delta_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})} \in \mathbb{R}.$$

Der Koeffizient δ_n hängt offensichtlich von f und von den Stützstellen x_i ab. Man schreibt daher auch

$$\delta_n =: [x_0, \dots, x_n]f.$$

Folgende Beobachtung wird später hilfreich sein.

Bemerkung 8.14. $[x_0, \dots, x_n]f$ ist offensichtlich der *führende Koeffizient* des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n .

Wendet man dieselbe Argumentation auf $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ an, so ergibt sich induktiv die

Newtonsche Interpolationsformel:

$$\begin{aligned} P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = & [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f \\ & + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]f + \dots \\ & + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})[x_0, \dots, x_n]f. \end{aligned}$$

Lemma 8.16. Seien wieder die x_i paarweise verschieden. Dann gilt

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{[x_1, \dots, x_n]f - [x_0, \dots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}.$$

	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f$
x_0	$[x_0]f$	$[x_0, x_1]f$	$[x_0, x_1, x_2]f$	$[x_0, x_1, x_2, x_3]f$
x_1	$[x_1]f$	$[x_1, x_2]f$	$[x_1, x_2, x_3]f$	\vdots
x_2	$[x_2]f$	$[x_2, x_3]f$	\vdots	\vdots
x_3	$[x_3]f$	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Beispiel 8.18.

Sei $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \dots, 3$. Man bestimme $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

0	1.0000					
		>	-0.0995			
0.2	0.9801			>	-0.4888	
		>	-0.2950		>	0.0480
0.4	0.9211			>	-0.4600	
		>	-0.4790			
0.6	0.8253					

$$P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) = 1.000 - 0.100x - 0.489x(x - 0.2),$$

$$P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x)$$

$$= P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) + 0.048x(x - 0.2)(x - 0.4)$$

$$= 1.000 - 0.100x - 0.489x(x - 0.2) + 0.048x(x - 0.2)(x - 0.4).$$



Satz 8.21.

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $[x_0, \dots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h. hängt *nicht* von der Reihenfolge der Stützstellen ab (konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

(iii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \dots, x_k]Q = 0$.

(iv) Für die *Newton-Basispolynome* ω_k gilt

$$[x_0, \dots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}, \quad \text{für } j, k = 0, \dots, n.$$

(v) Sei $a := \min_{0 \leq i \leq n} x_i$, $b := \max_{0 \leq i \leq n} x_i$, $I := [a, b]$ und $f \in C^n(I)$.
Dann existiert ein $\xi \in I$, so daß

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Satz 8.22. Seien x_0, \dots, x_n paarweise verschiedene Stützstellen, $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$, $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$ und $x \in \mathbb{R}$. Sei $I := [\min\{a, x\}, \max\{b, x\}]$. Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$, so daß

$$f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

gilt. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} & \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x) \right| \\ & \leq \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right| \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Beispiel 8.24.

Lineare Interpolation von $f(x) = \log(1+x)$ an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ ergibt

$$f(x) - P(f|0, 1)(x) = -\frac{x(x-1)}{2(1+\xi)^2}.$$

Da $\max_{x \in [0,1]} |x(1-x)| = \frac{1}{4}$ und $\xi \geq 0$, folgt

$$|f(x) - P(f|0, 1)(x)| \leq \frac{1}{8}.$$

Quadratische Interpolation an den Punkten $0, \frac{1}{2}$ und 1 ergibt

$$f(x) - P(f|0, \frac{1}{2}, 1)(x) = \frac{2}{(1+\xi)^3} \frac{x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{3!}.$$

Da

$$\max_{x \in [0,1]} \left| x(x-\frac{1}{2})(x-1) \right| = \frac{\sqrt{3}}{36},$$

folgt

$$\left| f(x) - P(f|0, \frac{1}{2}, 1)(x) \right| \leq \frac{1}{36\sqrt{3}}.$$

△

(1) Erhöhung des Polynomgrades bzw. der Stützstellenanzahl

$$M_{n+1}(f) := \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \quad \text{und} \quad \omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

Fehlerschranke:

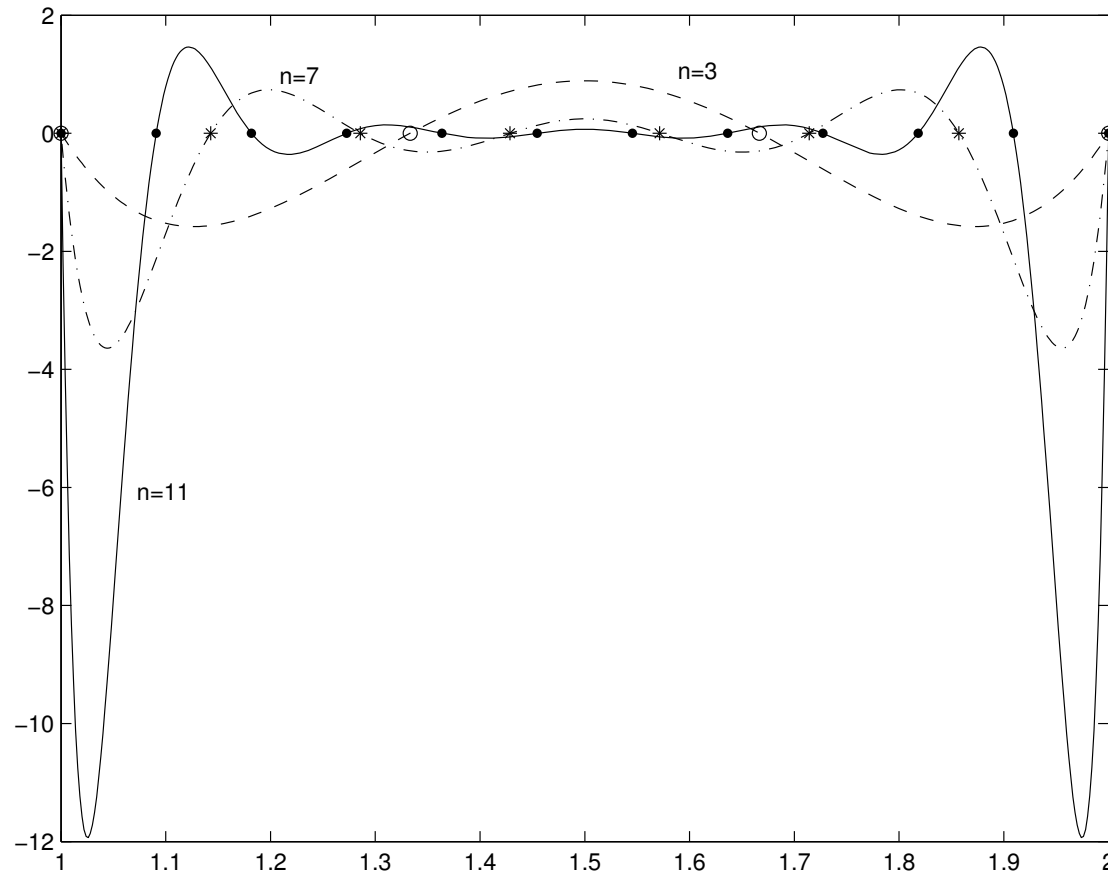
$$|f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)| M_{n+1}(f)$$

für $x \in [a, b]$ und $x_j \in [a, b]$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei äquidistanten Stützstellen.

Beispiel: $x_j = 1 + \frac{j}{n}$, $j = 0, \dots, n$ für $n = 3, 7, 11$.

Gezeigt wird $2^{2n+1}\omega_{n+1}$.



Bemerkung 8.25.

Das Verhalten der Funktion ω_{n+1} kann für eine andere Wahl der Stützstellen wesentlich besser sein.

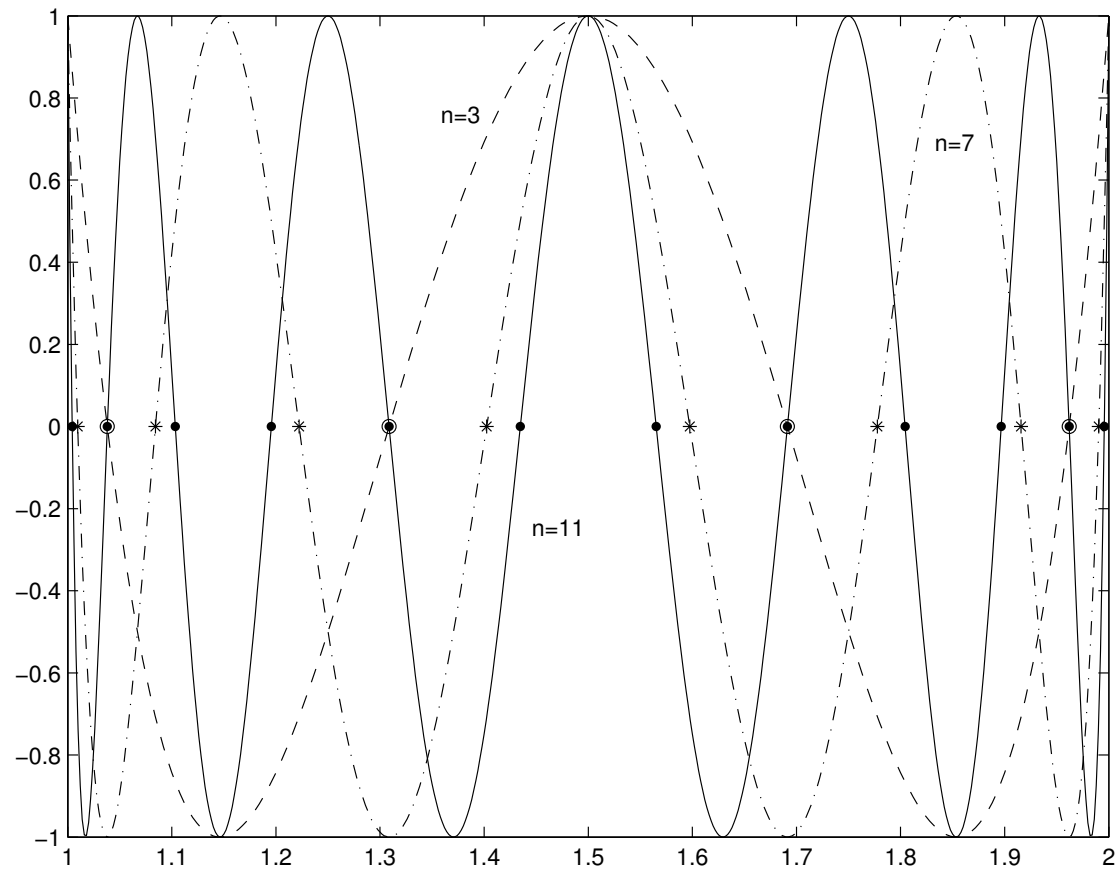
Es ist zum Beispiel bekannt, daß die Nullstellen der sogenannten *Tschebyscheff-Polynome* wesentlich günstigere Stützstellen liefern.

Für diese Nullstellen gibt es explizite Formeln, z.B. für das Intervall $[1, 2]$ hat man die Formel

$$x_j = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei Tschebyscheff-Stützstellen.

Gezeigt wird $2^{2n+1}\omega_{n+1}$.



(2) Fester Grad

Sei $a := \min \{x_0, \dots, x_n\}$, $b := \max \{x_0, \dots, x_n\}$, n fest.

$h := b - a$ stelle man sich als veränderbar vor.

Falls $x \in I := [a, b]$ liegt, erhält man sofort die grobe Abschätzung

$$|\omega_{n+1}(x)| \leq h^{n+1},$$

und somit

$$\|f - P(f|x_0, \dots, x_n)\|_{L_\infty(I)} \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L_\infty(I)},$$

Der Fehler wird also kleiner, wenn die Stützstellen gemäß h zusammenrücken.

Dies ist der Effekt, der in den *meisten Anwendungen* benutzt wird.

Beispiel 8.26.

Wir betrachten lineare Interpolation der Funktion $f(x) = \log(1 + x)$, diesmal an $x_0 = 0$ und $x_1 = h$. Dies ergibt

$$f(x) - P(f|0, h)(x) = -\frac{x(x-h)}{2(1+\xi)^2}.$$

Da

$$\max_{x \in [0, h]} |x(x-h)| = \frac{h^2}{4},$$

und $\xi \geq 0$, folgt

$$|f(x) - P(f|0, h)(x)| \leq \frac{h^2}{8}, \quad \text{für } x \in [0, h].$$

Der Verfahrensfehler strebt also mit der *Ordnung* 2 gegen 0. △

8.2.6 Numerische Differentiation

Grundidee:

$$P(f|x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) = n! [x_0, \dots, x_n]f \approx f^{(n)}(x),$$

Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + jh$,

$$f'(x) \approx [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad (x \in [x_0, x_1]) \quad (1)$$

$$f''(x) \approx 2![x_0, x_1, x_2]f = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \quad (x \in [x_0, x_2]). \quad (2)$$

Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung ergibt sich

- für $x_0 = x - \frac{1}{2}h$, $x_1 = x + \frac{1}{2}h$ in (1)

$$f'(x) = \frac{f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)}{h} - \frac{h^2}{24}f'''(\xi) \quad (\text{zentrale Differenzen}),$$

- für $x_0 = x - h$, $x_1 = x$, $x_2 = x + h$ in (2)

$$f''(x) = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi).$$

$$\Delta_h := \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Fehler in den Daten:

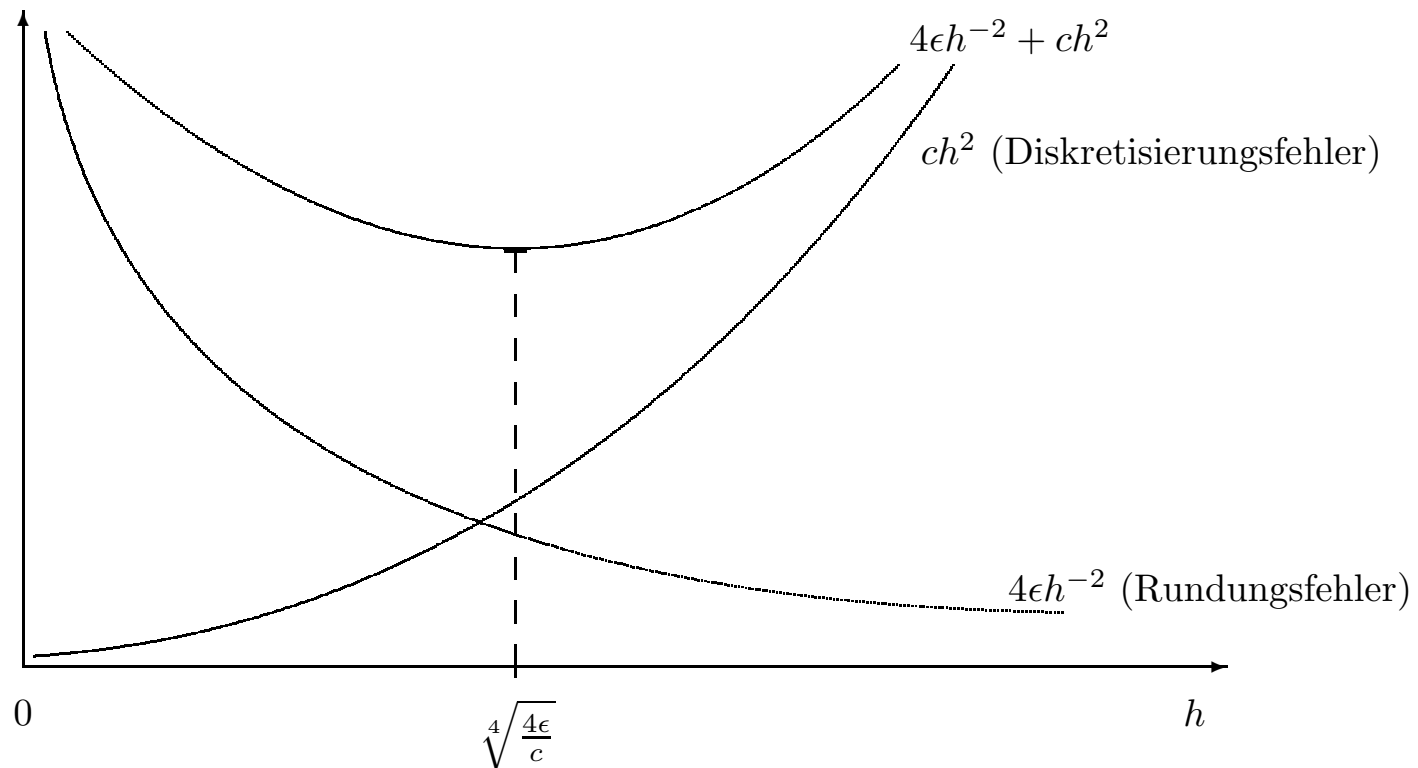
$$\tilde{\Delta}_h := \frac{\tilde{f}(x+h) - 2\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-h)}{h^2}.$$

Wegen Datenfehler ($|f(y) - \tilde{f}(y)| \leq \epsilon$)

$$\begin{aligned} |\Delta_h - \tilde{\Delta}_h| &= \frac{1}{h^2} \left| (f(x+h) - \tilde{f}(x+h)) - 2(f(x) - \tilde{f}(x)) \right. \\ &\quad \left. + (f(x-h) - \tilde{f}(x-h)) \right| \leq \frac{4\epsilon}{h^2}. \end{aligned}$$

$$|\tilde{\Delta}_h - f''(x)| \leq |\tilde{\Delta}_h - \Delta_h| + |\Delta_h - f''(x)| \leq 4\epsilon h^{-2} + ch^2$$

Offensichtlich wird die Schranke für $h = \sqrt[4]{4\epsilon/c}$ minimal.
Bei $\epsilon = 10^{-9}$ läßt sich also $h \approx 10^{-2}$ wählen.
Kleineres h bringt nur eine Verschlechterung.



Merke: Man sollte stets dafür sorgen, daß Rundungsfehler einen kleineren Einfluß haben als Diskretisierungsfehler.

Beispiel 8.27.

Aufgabe: Annäherung der zweiten Ableitung von $f(x) = \sin x + 3x^2$ an der Stelle $x = 0.6$ mit dem Differenzenquotienten

$$\Delta_h = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Wir rechnen auf einer Maschine mit $\text{eps} \approx 10^{-16}$, also erwartet man, daß für $h \approx 10^{-4}$ der Gesamtfehler minimal ist. Die Tabelle bestätigt dies:

h	$\tilde{\Delta}_h$	$ \tilde{\Delta}_h - f''(x) $
10^{-2}	<u>5.4353622319</u>	4.71e-06
10^{-3}	<u>5.4353575738</u>	4.72e-08
10^{-4}	<u>5.4353575196</u>	6.98e-09
10^{-5}	<u>5.4353566092</u>	9.17e-07
10^{-6}	<u>5.4352078394</u>	1.50e-04
10^{-7}	<u>5.4400928207</u>	4.74e-03

8.2.7 Hermite-Interpolation

Zu

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$$

definiere für $j = 0, 1, \dots, n$:

$$\mu_j(f) := f^{(\ell_j)}(x_j), \quad \ell_j = \max\{r \mid x_j = x_{j-r}\}.$$

Beispiel 8.28. Sei

$$x_0 = 0, \quad x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = 1.$$

Dann hat man $\ell_0 = 0$, $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = 1$, $\ell_3 = 3$, $\ell_4 = 0$, und

$$\begin{aligned} \mu_0(f) &= f(0), \\ \mu_1(f) &= f\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mu_2(f) = f'\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mu_3(f) = f''\left(\frac{1}{2}\right), \\ \mu_4(f) &= f(1). \end{aligned}$$

△

Das allgemeine *Hermite-Interpolationsproblem mit Polynomen (HIP)* läßt sich nun folgendermaßen beschreiben:

Aufgabe 8.29 (Hermite-Interpolation). Sei $f \in C^k([a, b])$ und μ_j wie oben mit $x_j \in [a, b]$ und $\ell_j \leq k$ für alle j . Man bestimme $P_n \in \Pi_n$, so daß

$$\mu_j(P_n) = \mu_j(f) , \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Diese Aufgabe ist eindeutig lösbar:

Satz 8.30. Die Interpolationsaufgabe (8.29) hat eine eindeutige Lösung.

Die Lagrange-Interpolation ist ein Spezialfall der Hermite-Interpolation, der sich für paarweise verschiedene Stützstellen ergibt, da dann

$$\mu_i(f) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

gerade die Punktauswertungen sind.

Ein zweiter interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn *alle* Stützstellen zusammenfallen:

$$x_0 = \dots = x_n \quad \Longrightarrow \quad \mu_i(f) = f^{(i)}(x_0), \quad i = 0, \dots, n.$$

In diesem Fall können wir das Interpolationspolynom direkt angeben, nämlich das *Taylor-Polynom*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f^{(j)}(x_0) \frac{(x - x_0)^j}{j!}.$$

Bestimmung des Hermite-Interpolationspolynoms

Definition 8.31. Wir bezeichnen für beliebige reelle Stützstellen x_i , wieder mit $[x_i, \dots, x_k]f$ den jeweils *führenden Koeffizienten* des entsprechenden *Hermite-Interpolationspolynoms* $P(f|x_0, \dots, x_k) \in \Pi_k$.

Folgerung 8.32. Für $x_0 = \dots = x_k$ gilt

$$[x_0, \dots, x_k]f = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Wir können nun Lemma 8.16 erweitern.

Lemma 8.33. Gegeben seien $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. Dann gilt für x_i, x_j aus der Menge $\{x_0, \dots, x_k\}$

$$[x_0, \dots, x_k]f = \begin{cases} \frac{[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k]f - [x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k]f}{x_j - x_i}, & \text{falls } x_i \neq x_j, \\ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & \text{falls } x_0 = \dots = x_k, \end{cases}$$

Beispiel 8.35.

Sei $x_0 = 0, x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1$. Man bestimme $P_4 \in \Pi_4$, so daß

$$P_4(0) = 1, P_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{2}, P_4'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, P_4''\left(\frac{1}{2}\right) = 0, P_4(1) = 2\frac{1}{2}$$

Dividierte Differenzen (die fettgedruckten Einträge sind die Daten):

0	1					
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	>	1			
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	>	$\frac{1}{2}$	>	-1	
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	>	$\frac{1}{2}$	>	0	>
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	>	$\frac{1}{2}$	>	3	>
1	$2\frac{1}{2}$	>	2	>	6	>
						4

Das gesuchte Hermite-Interpolationspolynom ist

$$P_4(x) = 1 + x - x\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4x\left(x - \frac{1}{2}\right)^3. \quad \triangle$$

Wie vorher beim Spezialfall der Lagrange-Interpolation stellt sich die Frage nach Abschätzungen für den Interpolationsfehler.

Dazu folgendes Resultat:

Bemerkung 8.36. Die Fehlerdarstellung und -abschätzung aus Satz 8.22 bleibt unverändert gültig. D. h., die Aussage von Satz 8.22 gilt auch für beliebige, nicht notwendigerweise paarweise verschiedene Stützstellen x_i , $i = 0, \dots, n$.

8.3 Grenzen der Polynominterpolation

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist auf ganz \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar.

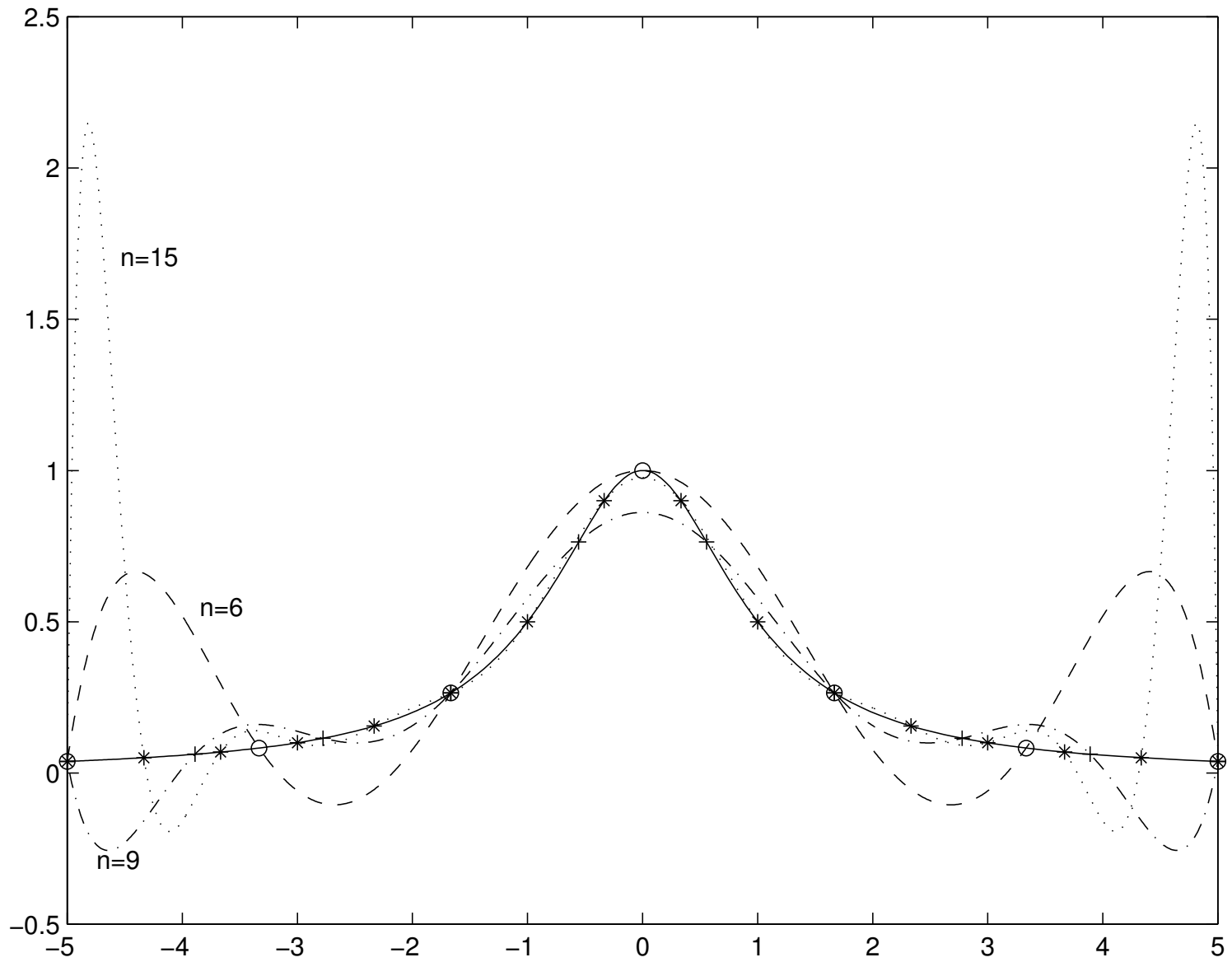
Dennoch zeigt sich, daß die Folge der Interpolationspolynome

$$P_n(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$$

für

$$x_j = -5 + \frac{10j}{n}, \quad j = 0, \dots, n,$$

auf $[-5, 5]$ divergiert.



Fazit: Als Mittel, über immer mehr Stützstellen immer bessere Approximationen zu gewinnen, taugt die Polynominterpolation im allgemeinen nicht.

Eine geeignete Alternative bietet das folgende Vorgehen:

Im Interpolationsintervall $[a, b]$ wird eine Approximation der Funktion f konstruiert, die **stückweise polynomial** ist.

Dies ist der Grundgedanke der sogenannten **Splinefunktionen**.

8.4 Beispiel einer Splineinterpolation

Splinefunktionen bilden ein flexibles und effizientes Hilfsmittel, um größere Datenmengen zu interpolieren oder zu approximieren. Seien

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Stützstellen und

$$f_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

die entsprechenden Daten an diesen Stützstellen.

Der Raum der *kubischen Splines* ist:

$$S_3^n := \left\{ g \in C^2([a, b]) \mid g|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Es gilt

$$\dim S_3^n = n + 3.$$

Zur Lösung des Interpolationsproblems wird $S \in S_3^n$ gesucht, so daß

$$S(x_j) = f_j, \quad j = 0, \dots, n.$$

Aufgabe 8.37. Finde zu den Daten f_0, f_1, \dots, f_n eine Funktion $S \in S_3^n$, so daß

$$S(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$S''(a) = S''(b) = 0.$$

Lemma 8.38. Sei g eine beliebige Funktion aus $C^2([a, b])$ mit $g(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, \dots, n$ und $g''(a) = g''(b) = 0$.

Für die eindeutige Lösung S der Aufgabe 8.37 gilt

$$\int_a^b S''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx.$$

Diese Eigenschaft bedeutet, daß der kubische Spline S unter allen Funktionen $g \in C^2([a, b])$, die dieselben Interpolationsforderungen erfüllen *näherungsweise die mittlere quadratische Krümmung minimiert.*

Allgemeine effiziente Methoden zur Berechnung von Splineinterpolationen werden in Kapitel 9 diskutiert. Wichtig dabei ist die Wahl einer geeigneten Basis der sogenannten B -Splines.

Wir betrachten eine für das Einführungsbeispiel geeignete einfache Methode.

Äquidistante Stützstellen: $x_{j+1} - x_j = h, j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Bezeichnungen

$$m_j := S''(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

und

$$I_j := [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Wegen $S|_{I_j} \in \Pi_3$ ergibt sich, daß $S''|_{I_j}$ linear ist und daß

$$S''|_{I_j}(x) = \frac{(x_{j+1} - x)m_j + (x - x_j)m_{j+1}}{h}. \quad (1)$$

Zweifache Integration zusammen mit den Forderungen

$$S(x_j) = f_j, \quad S(x_{j+1}) = f_{j+1} \quad (2)$$

ergibt

$$S|_{I_j}(x) = \frac{(x_{j+1} - x)^3 m_j + (x - x_j)^3 m_{j+1}}{6h} + \frac{(x_{j+1} - x)f_j + (x - x_j)f_{j+1}}{h} - \frac{1}{6}h[(x_{j+1} - x)m_j + (x - x_j)m_{j+1}].$$

Für dieses stückweise Polynom S gilt

$$S|_{I_j} \in \Pi_3, \quad S \in C([a, b]),$$

$$S''|_{I_j}(x_{j+1}) = m_{j+1} = S''|_{I_{j+1}}(x_{j+1}).$$

Die Stetigkeit folgt aus den Interpolationsbedingungen in (2).

Die Stetigkeit der zweiten Ableitung folgt aus (1).

Man muß nun die noch unbekanntenen Größen m_j so wählen, daß die erste Ableitung von S in den Stützstellen x_j stetig ist.

Es soll also

$$S'|_{I_{j-1}}(x_j) = S'|_{I_j}(x_j), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

gelten. Man erhält daraus die Bedingungen

$$m_{j-1} + 4m_j + m_{j+1} = \frac{6}{h^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Es gilt

$$m_0 = m_n = 0.$$

Insgesamt ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & \cdots & & & & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & 0 & & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ f_1 - 2f_2 + f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel 8.40.

Daten:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	2.5	2.0	0.5	0.5	1.5	1.0	1.125	0.0

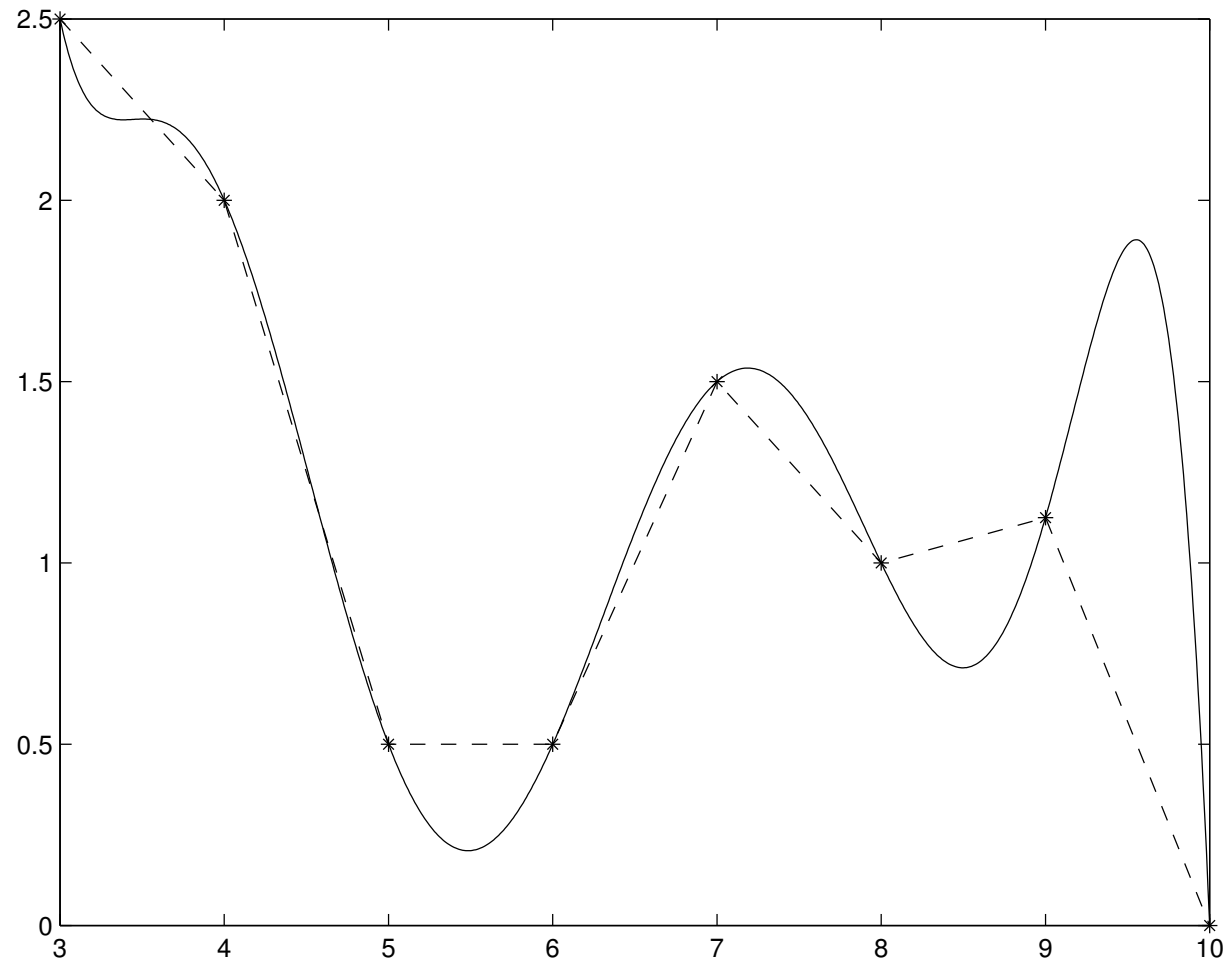
Für die Splineinterpolation $S \in S_3^7$ mit den Endbedingungen $S''(3) = S''(10) = 0$ wird das zugehörige System

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 1 \\ -1.5 \\ 0.625 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

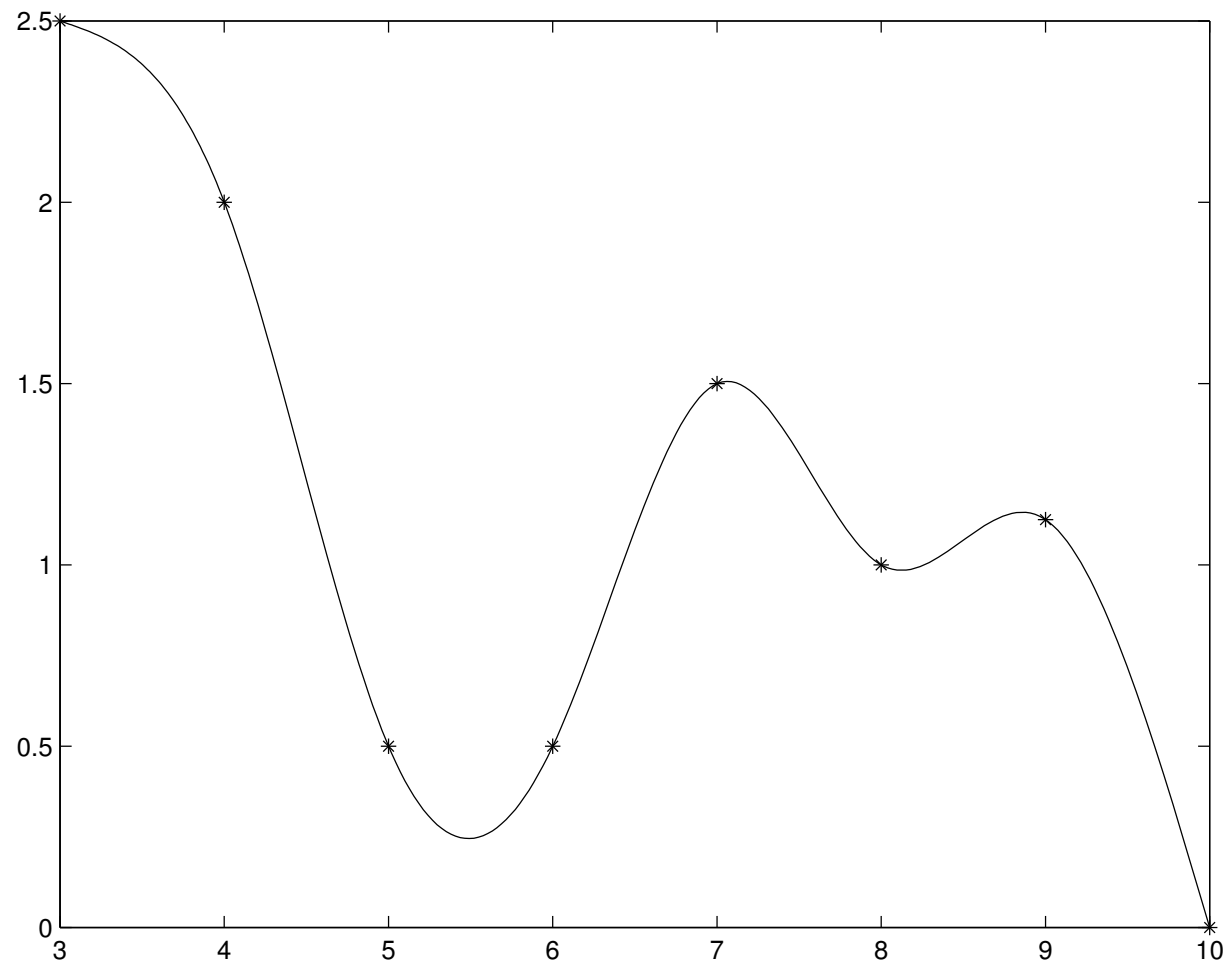
gelöst.

Das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad 7

$$P_7 = P(f|3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$



Die Splineinterpolation $S \in S_3^7$



Bemerkung 8.41. Bezeichnet $h := \max_{i=0,\dots,n-1} x_{i+1} - x_i$ den maximalen Knotenabstand, kann man die Abschätzung

$$\|f - S\|_{L_\infty([a,b])} \leq Ch^4 \|f^{(4)}\|_{L_\infty([a,b])}$$

für eine von h und f unabhängige Konstante C zeigen.

Höhere Genauigkeit gewinnt man also durch Verringerung der Schrittweite bzw. Erhöhung der Knotenzahl.