

9.1 Splineräume und Approximationsgüte

Bei der Behandlung von Splines ist es bequemer, statt mit dem Grad von Polynomen, mit der Ordnung $k := \text{Grad} + 1$ zu arbeiten.

Für eine Knotenmenge $\tau = \{\tau_0, \dots, \tau_{\ell+1}\}$ mit

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_\ell < \tau_{\ell+1} = b$$

und $k \geq 1$ definieren wir den *Splineräum* der Splines der Ordnung k durch

$$\mathcal{P}_{1,\tau} = \{ f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid f|_{[\tau_i, \tau_{i+1})} \in \Pi_0, 0 \leq i \leq \ell \},$$

$$\mathcal{P}_{k,\tau} = \{ f \in C^{k-2}([a, b]) \mid f|_{[\tau_i, \tau_{i+1})} \in \Pi_{k-1}, 0 \leq i \leq \ell \}, k \geq 2.$$

Für $k = 4$ ergibt sich gerade der Raum der kubischen Splines.

Lemma 9.1. Es gilt:

$$\dim \mathcal{P}_{k,\tau} = k + \ell .$$

Bemerkung 9.2. Fehlerschranke für eine beste Näherung im Spline-
raum $\mathcal{P}_{k,\tau}$. Sei

$$h = \max_{j=0,\dots,\ell} (\tau_{j+1} - \tau_j) \quad \text{und} \quad \|g\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |g(x)| \quad (g \in C([a,b])) .$$

Für jedes $k \geq 2$ existiert eine positive Konstante $c < \infty$, so daß für
jedes $m \leq k$ und jede Funktion $f \in C^m([a,b])$ gilt

$$\min_{S_k \in \mathcal{P}_{k,\tau}} \|f - S_k\|_\infty \leq ch^m \|f^{(m)}\|_\infty .$$

Dieses Resultat kann für den Fall $m = 0$ verbessert werden: Sei $f \in C([a,b])$ und $k \geq 1$ beliebig, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $h > 0$, so daß

$$\min_{S_k \in \mathcal{P}_{k,\tau}} \|f - S_k\|_\infty \leq \varepsilon .$$

Bemerkung 9.3.

Da jedes Polynom insbesondere ein stückweises Polynom ist, das zudem sogar unendlich oft differenzierbar ist, gilt natürlich

$$\Pi_{k-1} \subset \mathcal{P}_{k,\tau}.$$

Außerdem sieht man leicht, daß

$$(\tau_i - x)_+^{k-1} \in \mathcal{P}_{k,\tau}, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

wobei, für $m \geq 0$,

$$x_+^m = \begin{cases} x^m & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

die sogenannten *abgebrochenen Potenzen* sind.

Die $k + \ell$ Funktionen

$$x^i, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad (\tau_i - x)_+^{k-1}, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

sind linear unabhängig.

Diese Funktionen bilden also eine Basis für $\mathcal{P}_{k,\tau}$.

△

9.1.1 B-Splines

Eine viel bessere Basis für $\mathcal{P}_{k,\tau}$ bilden die sogenannten B-Splines. Wir betrachten erst **den Fall $k = 1$** . Die *charakteristischen Funktionen*

$$N_{j,1}(x) := \chi_{[\tau_j, \tau_{j+1})}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [\tau_j, \tau_{j+1}) , \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad j = 0, \dots, \ell,$$

bilden eine Basis für $\mathcal{P}_{1,\tau}$. Der *Träger* („support“) der Funktion $N_{j,1}$ wird durch

$$\text{supp } N_{j,1} := \{x \in \mathbb{R} \mid N_{j,1}(x) \neq 0\}$$

definiert. Die Basis $N_{j,1}$, $0 \leq j \leq \ell$, ist *lokal*.

$$S(x) = \sum_{j=0}^{\ell} c_j N_{j,1}(x)$$

läßt sich mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{c} = (c_j)_{j=0}^{\ell}$ identifizieren. Es gilt

$$\|\mathbf{c}\|_{\infty} = \left\| \sum_{j=0}^{\ell} c_j N_{j,1} \right\|_{\infty}.$$

Die Basis ist in diesem Sinne *stabil*.

Der Fall $k = 2$.

Es werden zwei *Hilfsknoten* $\tau_{-1} < \tau_0 = a$, $\tau_{\ell+2} > \tau_{\ell+1} = b$ und zugehörige Hilfsfunktionen $N_{-1,1}$, $N_{\ell+1,1}$ eingeführt:

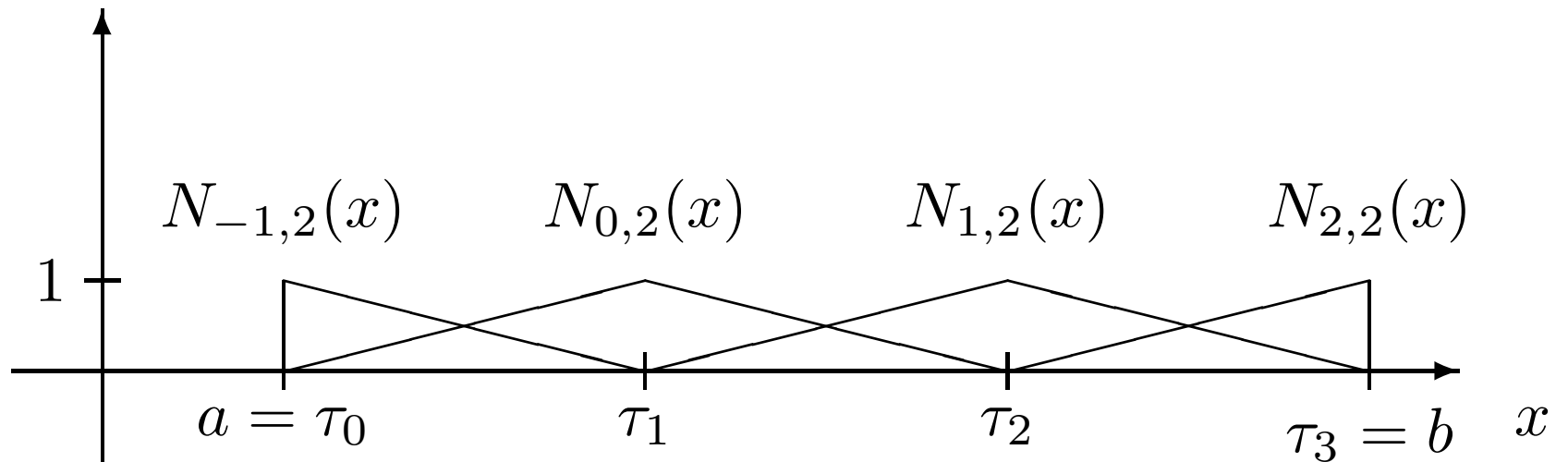
$$N_{-1,1} := \chi_{[\tau_{-1}, \tau_0)}, \quad N_{\ell+1,1} := \chi_{[\tau_{\ell+1}, \tau_{\ell+2})} .$$

Die Funktion

$$N_{j,2}(x) := \frac{x - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j} N_{j,1}(x) + \frac{\tau_{j+2} - x}{\tau_{j+2} - \tau_{j+1}} N_{j+1,1}(x) , \quad j = -1, \dots, \ell,$$

hat folgende Eigenschaften:

- 1) sie nimmt von Null verschiedene Werte nach Definition von $N_{j,1}(x)$ und $N_{j+1,1}(x)$ nur auf dem Intervall $[\tau_j, \tau_{j+2}]$ an;
- 2) auf jedem der Intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $[\tau_{j+1}, \tau_{j+2}]$ ist $N_{j,2}(x)$ linear;
- 3) $N_{j,2}(x)$ ist stetig.



Definition 9.4 (B-Splines). Sei $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ eine beliebige Folge von paarweise verschiedenen Knoten. Dann werden die B-Splines $N_{j,k}$ der Ordnung k ($1 \leq k < n$) rekursiv definiert durch

$$N_{j,1}(x) := \chi_{[t_j, t_{j+1})} \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1,$$

$$N_{j,k}(x) := \frac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} N_{j,k-1}(x) + \frac{t_{j+k} - x}{t_{j+k} - t_{j+1}} N_{j+1,k-1}(x),$$

für $k = 2, \dots, n-1$, und $j = 1, \dots, n-k$.

Lemma 9.5. Für diese B-Splines $N_{j,k}$ gilt:

- (i) $\text{supp } N_{j,k} \subset [t_j, t_{j+k}]$,
- (ii) $N_{j,k}(x) > 0$ für alle $x \in (t_j, t_{j+k})$,
- (iii) $(N_{j,k})|_{[t_i, t_{i+1})} \in \Pi_{k-1}$,
- (iv) $N_{j,k} \in C^{k-2}([t_1, t_n])$.

Für $1 \leq j \leq n - k$: die dividierte Differenz $[t_j, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)_+^{k-1}$ ist als führender Koeffizient des Lagrange-Interpolations-Polynoms der Funktion $f_{k-1}(s) := (s-x)_+^{k-1}$ an den Stützstellen t_j, \dots, t_{j+k} definiert.

Explizite Darstellung für die B-Splines:

Satz 9.6. Die B-Splines $N_{j,k}$ haben folgende Darstellung:

$$N_{j,k}(x) = (t_{j+k} - t_j)[t_j, \dots, t_{j+k}](\cdot - x)_+^{k-1},$$

für $1 \leq k < n, \quad 1 \leq j \leq n - k$.

Die dividierte Differenz wirkt auf das Argument \cdot . Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} [t_j, t_{j+1}](\cdot - x)_+^m &= \frac{[t_{j+1}](\cdot - x)_+^m - [t_j](\cdot - x)_+^m}{t_{j+1} - t_j} \\ &= \frac{(t_{j+1} - x)_+^m - (t_j - x)_+^m}{t_{j+1} - t_j}. \end{aligned}$$

Folgerung 9.8. Für $k \geq 3$ gilt

$$N'_{j,k}(x) = (k - 1) \left\{ \frac{N_{j,k-1}(x)}{t_{j+k-1} - t_j} - \frac{N_{j+1,k-1}(x)}{t_{j+k} - t_{j+1}} \right\},$$

d.h., die Ableitungen von B-Splines sind gewichtete Differenzen von B-Splines niedrigerer Ordnung.

9.1.2 B-Splines als Basis für den Splineraum

Ziel der bisherigen Überlegungen war, eine stabile Basis für $\mathcal{P}_{k,\tau}$ zu gewinnen. Sei $\mathcal{P}_{k,\tau}$ der Splineraum wie in (9.1). Zur Knotenmenge $\tau = \{\tau_0, \dots, \tau_{\ell+1}\}$ mit $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_\ell < \tau_{\ell+1} = b$ definieren wir eine *erweiterte Knotenmenge* T :

$$\begin{aligned} T &= \{t_1, \dots, t_n\} \quad \text{mit } n := 2k + \ell, \\ t_1 &< \dots < t_k = \tau_0, \\ t_{k+j} &= \tau_j \quad \text{für } j = 1, \dots, \ell, \\ \tau_{\ell+1} &= t_{k+\ell+1} < \dots < t_{2k+\ell}. \end{aligned}$$

Zu dieser erweiterten Knotenmenge T werden die B-Splines $N_{j,k}$, $1 \leq j \leq n - k = k + \ell$, wie in Definition 9.4 definiert.

Die Funktionswerte $N_{j,k}(x)$ sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Im Splineraum $\mathcal{P}_{k,\tau}$ sind nur die Werte $N_{j,k}(x)$ mit $x \in [a, b]$ von Interesse.

Wir definieren nun

$$S_{k,T} = \text{span}\{ N_{j,k}|_{[a,b]} \mid 1 \leq j \leq k + \ell \}.$$

Folgendes Hauptresultat zeigt, daß die (auf $[a, b]$ restringierten) B-Splines $N_{j,k}$ eine Basis für den Splineraum $\mathcal{P}_{k,\tau}$ bilden.

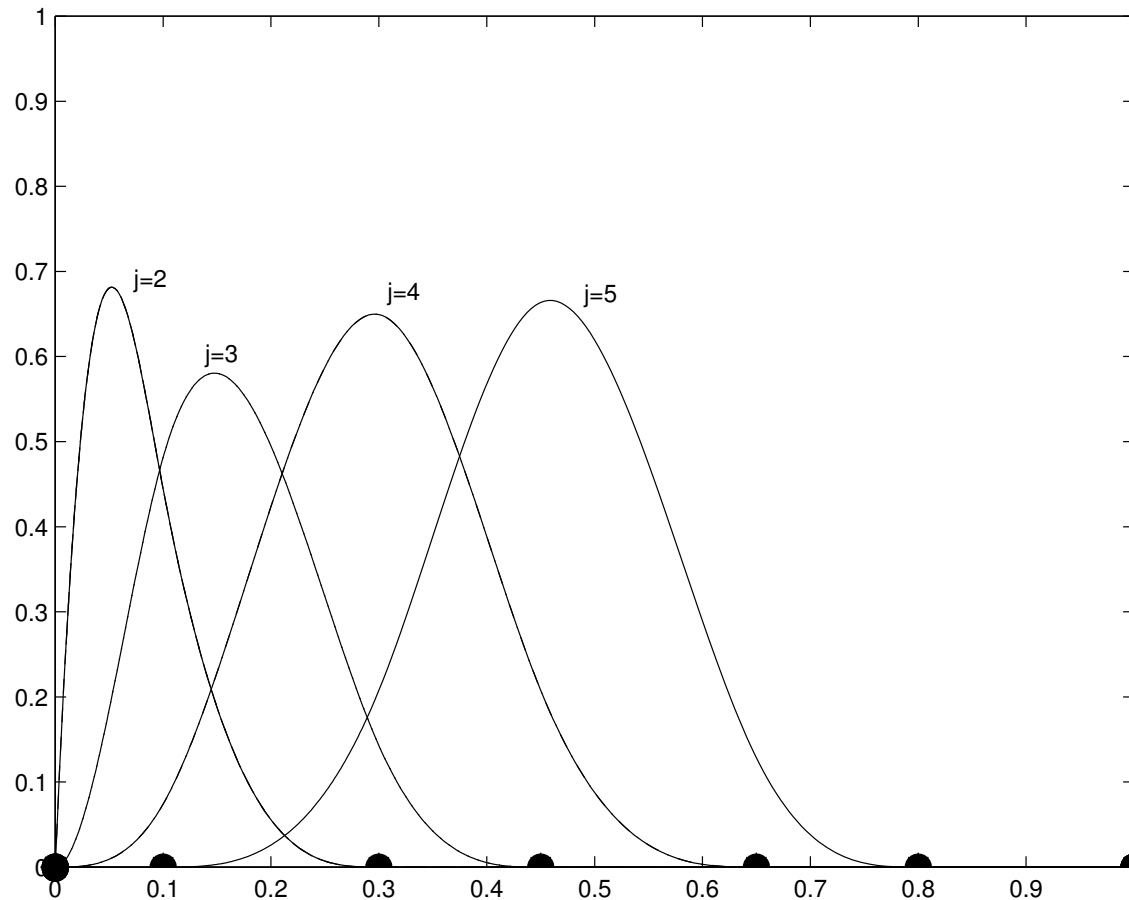
Satz 9.9. Es gilt

$$\mathcal{P}_{k,\tau} = S_{k,T} .$$

Bemerkung 9.10. Die Definition von $S_{k,T}$ ist unabhängig von der Wahl der Hilfsknoten $t_1, \dots, t_{k-1} < a$ und $t_{k+\ell+2}, \dots, t_{2k+\ell} > b$. Man läßt sie deshalb oft auf den jeweiligen Intervallenden a bzw. b *zusammenfallen*.

Beispiel 9.11.

Wir betrachten $[a, b] = [0, 1]$, $k = 4$, $l = 5$, $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$, $t_5 = 0.1$, $t_6 = 0.3$, $t_7 = 0.45$, $t_8 = 0.65$, $t_9 = 0.8$, $t_{10} = t_{11} = t_{12} = t_{13} = 1$. Für $j = 2, 3, 4, 5$ werden die kubische B-Splines $N_{j,4}$ unten abgebildet. \triangle



9.1.3 Rechnen mit Linearkombinationen von B-Splines

Jeder Spline $S \in \mathcal{P}_{k,\tau}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$S(x) = \sum_{j=1}^{k+\ell} c_j N_{j,k}(x) , \quad x \in [a, b].$$

Seien $c_1, \dots, c_{k+\ell}$ bekannt.

Hilfsgrößen für eine effiziente Auswertung von S :

$$c_j^{[p]}(x) = \begin{cases} c_j, & p = 0 \\ \frac{x - t_j}{t_{j+k-p} - t_j} c_j^{[p-1]}(x) + \frac{t_{j+k-p} - x}{t_{j+k-p} - t_j} c_{j-1}^{[p-1]}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Algorithmus 9.12 (Auswertung von S).

Gegeben: $x \in [a, b]$ und c_1, \dots, c_{k+l} aus der obigen Darstellung.

- Bestimme m mit $x \in [t_m, t_{m+1})$. (Es ist $k \leq m \leq k + l$.)
- Setze

$$c_j^{[0]}(x) = c_j, \quad j = 1, \dots, k + l.$$

- Für $p = 1, \dots, k - 1$ berechne

$$c_j^{[p]}(x), \quad j = m - k + 1 + p, \dots, m.$$

-

$$S(x) = c_m^{[k-1]}(x).$$

In analoger Weise kann man Ableitungen von Splinefunktionen behandeln. Es ergibt sich folgende Darstellung der p -ten Ableitung:

$$S^{(p)}(x) = \sum_{j=1+p}^{k+\ell} c_j^{(p)} N_{j,k-p}(x)$$

als Linearkombination von B-Splines der Ordnung $k - p$.

Die neuen Koeffizienten $c_j^{(p)}$ sind p -te Differenzen der ursprünglichen Koeffizienten:

$$c_j^{(p)} = \begin{cases} c_j, & p = 0, \\ (k - p) \frac{c_j^{(p-1)} - c_{j-1}^{(p-1)}}{t_{j+k-p} - t_j}, & 0 < p \leq k - 2. \end{cases}$$

9.1.4 Stabilität der B-Spline-Basis

Einer der Hauptgründe für die Wichtigkeit der B-Splines:

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert eine positive Konstante c , so daß für alle Knotenmengen $T = \{t_j\}_{j=1}^n$ wie in (9.10) und alle $\{c_j\}_{j=1}^{k+l}$ gilt

$$c \max_{j=1, \dots, k+l} |c_j| \leq \max_{x \in [a, b]} \left| \sum_{j=1}^{k+l} c_j N_{j,k}(x) \right| \leq \max_{j=1, \dots, k+l} |c_j|.$$

Das heißt kleine Änderungen in den Koeffizienten bewirken nur kleine Änderungen in der entsprechenden Splinefunktion und umgekehrt und zwar *unabhängig von der Lage der Knoten*.

9.2. Splineinterpolation

Der folgende Satz (von Schoenberg und Whitney) charakterisiert, wann ein Interpolationsproblem eindeutig für alle Daten lösbar ist.

Satz 9.15 Sei $T = \{t_j\}_{j=1}^n$ wie in (9.10).

Seien $x_1, \dots, x_{k+\ell} \in [a, b]$ Stützstellen und $f_1, \dots, f_{k+\ell}$ die zugehörigen Daten. Das Problem der Bestimmung eines $S \in S_{k,T}$, so daß

$$S(x_j) = f_j, \quad j = 1, \dots, k + \ell$$

gilt, hat genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn

$$x_j \in (t_j, t_{j+k}), \quad j = 1, \dots, k + \ell,$$

d.h., wenn in den Träger jedes B-Splines mindestens eine Stützstelle fällt. Man kann sogar zeigen, daß die Aussage für Hermite-Interpolation gültig bleibt.

Wir gehen nun auf den wichtigen Spezialfall der kubischen Splineinterpolation nochmals ein. Dies betrifft den Fall, daß $k = 4$ ist und Stützstellen und Knoten übereinstimmen:

$$x_j := t_{j+3} = \tau_{j-1} \quad \text{für } j = 1, \dots, \ell + 2 .$$

Dies liefert allerdings nur $\ell + 2$ Bedingungen.

Mögliche weitere Bedingungen ($\dim S_{4,T} = 4 + \ell$):

(a) Vollständige kubische Splineinterpolation:

$$S(t_j) = f(t_j), \quad j = 4, \dots, \ell + 5, \quad S'(a) = f'(a), \quad S'(b) = f'(b).$$

(b) Natürliche kubische Splineinterpolation:

$$S(t_j) = f(t_j), \quad j = 4, \dots, \ell + 5, \quad S''(a) = S''(b) = 0.$$

Lemma 9.18. Sei $g \in C^2([a, b])$ und $S \in S_{4,T}$, so daß

$$g(t_i) = S(t_i) \quad \text{für } i = 4, \dots, \ell + 5 ,$$
$$S''(b)(g'(b) - S'(b)) = S''(a)(g'(a) - S'(a)) .$$

Dann gilt

$$\int_a^b S''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx .$$

Für die *vollständige kubische Splineinterpolation* ergibt sich folgendes Resultat:

Satz 9.19. Zu jedem $f \in C^1([a, b])$ existiert ein eindeutiger Spline $I_4f \in S_{4,T}$, so daß

$$\begin{aligned}(I_4f)(t_j) &= f(t_j), & j &= 4, \dots, \ell + 5, \\ (I_4f)'(a) &= f'(a), & (I_4f)'(b) &= f'(b).\end{aligned}$$

Ferner erfüllt I_4f die Extremaleigenschaft

$$\int_a^b (I_4f)''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx$$

für alle Funktionen $g \in C^2([a, b])$, die die gleichen Interpolations- und Randbedingungen wie I_4f erfüllen.

Völlig analog kann man folgendes Resultat für die *natürliche kubische Splineinterpolation* beweisen:

Satz 9.20. Zu jedem $f \in C^2([a, b])$ existiert ein eindeutiger Spline $\hat{I}_4 f \in S_{4,T}$, so daß

$$(\hat{I}_4 f)(t_j) = f(t_j), \quad j = 4, \dots, \ell + 5,$$

$$(\hat{I}_4 f)''(a) = (\hat{I}_4 f)''(b) = 0.$$

Ferner erfüllt $\hat{I}_4 f$ die Extremaleigenschaft

$$\int_a^b (\hat{I}_4 f)''(x)^2 dx \leq \int_a^b g''(x)^2 dx$$

für alle Funktionen $g \in C^2([a, b])$ die die gleichen Interpolations- und Randbedingungen wie $\hat{I}_4 f$ erfüllen.

Bemerkung 9.21.

Sei

$$h = \max_{j=1, \dots, \ell} (\tau_{j+1} - \tau_j)$$

und $f \in C^4([a, b])$.

Man kann beweisen, daß

$$\|f - I_4 f\|_\infty \leq \frac{h^4}{16} \|f^{(4)}\|_\infty$$

gilt, wobei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm auf $[a, b]$ ist.

Der Vergleich mit Bemerkung 9.2 zeigt, daß die kubische Interpolation (unabhängig von der Lage der Knoten!) die *bestmögliche Approximationsordnung* realisiert. △

Berechnung der vollständigen kubischen Splineinterpolation

Sei I_4f die vollständige Splineinterpolation einer Funktion $f \in C^1([a, b])$.
Wegen Satz 9.9 hat I_4f die Form

$$(I_4f)(x) = \sum_{j=1}^{\ell+4} c_j N_{j,4}(x).$$

Die Lösung des Interpolationsproblems verlangt nun, die Koeffizienten c_j über die Interpolationsbedingungen (9.25) zu bestimmen.

Es gilt

$$c_1 = f(t_4), \quad c_{\ell+4} = f(t_{\ell+5}),$$

$$c_2 = \frac{f'(a) - f(a)N'_{1,4}(a)}{N'_{2,4}(a)},$$

$$c_{\ell+3} = \frac{f'(b) - f(b)N'_{\ell+4,4}(b)}{N'_{\ell+3,4}(b)}.$$

Es sind lediglich noch die Koeffizienten $(c_3, \dots, c_{\ell+2})^T = \mathbf{c}$ zu bestimmen sind. Dafür ergibt sich das Gleichungssystem

$$A_T \mathbf{c} = \mathbf{f},$$

wobei

$$\mathbf{f} = (f_3, \dots, f_{\ell+2})^T$$

mit

$$\begin{aligned} f_3 &= f(t_5) - c_2 N_{2,4}(t_5), \\ f_{\ell+2} &= f(t_{\ell+4}) - c_{\ell+3} N_{\ell+3,4}(t_{\ell+4}), \\ f_j &= f(t_{j+2}), \quad j = 4, \dots, \ell + 1, \end{aligned}$$

und

$$A_T = \begin{pmatrix} N_{3,4}(t_5) & N_{4,4}(t_5) & & & & \\ N_{3,4}(t_6) & N_{4,4}(t_6) & N_{5,4}(t_6) & & & \\ & N_{4,4}(t_7) & N_{5,4}(t_7) & \dots & & \emptyset \\ \emptyset & & \dots & \dots & & N_{\ell+2,4}(t_{\ell+3}) \\ & & & N_{\ell+1,4}(t_{\ell+4}) & & N_{\ell+2,4}(t_{\ell+4}) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 9.22.

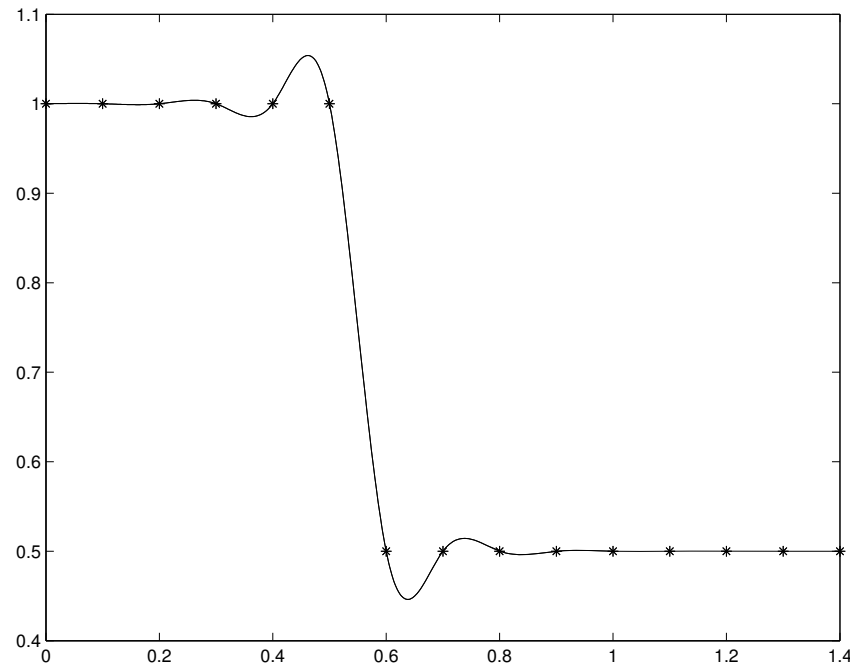
Seien

$$\tau_j = j * 0.1, \quad j = 0, \dots, 14,$$

$$f_j = 1, \quad j = 0, \dots, 5,$$

$$f_j = 0.5, \quad j = 6, \dots, 14.$$

Die entsprechende natürliche kubische-Splineinterpolation ist in Abb. 9.4 dargestellt. Man stellt fest, daß wegen des Sprunges in den Daten Oszillationen auftreten. △



9.3 Datenfit-Smoothing Splines

Gegeben seien Messungen f_j , $j = 1, \dots, m$, die gewissen Abszissen x_j , $j = 1, \dots, m$, in einem Intervall $[a, b]$ zugeordnet werden.

Eine Approximation $S \in S_{k,T}$ läßt sich dann folgendermaßen bestimmen: Finde $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{k+\ell})^T$, so daß $S(x) = \sum_{j=1}^{k+\ell} c_j N_{j,k}(x)$

$$\sum_{j=1}^m (S(x_j) - f_j)^2 = \min_{\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{k+\ell}} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\ell=1}^{k+\ell} \tilde{c}_\ell N_{\ell,k}(x_j) - f_j \right)^2$$

erfüllt. Hierbei ist i.a. $m \gg k + \ell$, und die x_j müssen natürlich nicht mit den Knoten t_j übereinstimmen. Diese Aufgabe ist ein lineares Ausgleichsproblem der Form

$$\|A_T \mathbf{c} - \mathbf{f}\|_2 = \min,$$

wobei hier

$$A_T = \left(N_{j,k}(x_i) \right)_{i=1, j=1}^{m, k+\ell} \in \mathbb{R}^{m \times (k+\ell)},$$

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T \in \mathbb{R}^m.$$

Auch beim obigen Ausgleichsansatz können stark fehlerbehaftete Datensätze und starke „Datenausreißer“ ein „Überfitten“ mit entsprechenden Oszillationen bewirken.

Das Konzept des „*Smoothing-Splines*“ schafft da Abhilfe.

Ein „Strafterm“ soll starke Ausschläge unterdrücken und die Daten „glätten“. Für ein $\theta \geq 0$ sucht man dasjenige $S \in S_{k,T}$, das

$$\sum_{j=1}^m (S(x_j) - f_j)^2 + \theta^2 \|S''\|_2^2 = \min_{\tilde{S} \in S_{k,T}} \sum_{j=1}^m (\tilde{S}(x_j) - f_j)^2 + \theta^2 \|\tilde{S}''\|_2^2$$

erfüllt.

Wegen (9.17) und (9.20) für $p = 2$ gilt für $S(x) = \sum_{j=1}^{k+\ell} c_j N_{j,k}(x)$

$$c^2 \sum_{j=3}^{k+\ell} \left(c_j^{(2)} \|N_{j,k-2}\|_2 \right)^2 \leq \|S''\|_2^2 \leq C^2 \sum_{j=3}^{k+\ell} \left(c_j^{(2)} \|N_{j,k-2}\|_2 \right)^2.$$

Man erhält also im Wesentlichen das qualitativ selbe Funktional, wenn man $\|S''\|_2^2$ durch $\sum_{j=3}^{k+l} \hat{c}_j^2$, mit $\hat{c}_j := c_j^{(2)} \|N_{j,k-2}\|_2$, ersetzt.

Dies führt zu folgendem Minimierungsproblem:

Finde $S(x) = \sum_{j=1}^{k+l} c_j N_{j,k}(x)$ so daß,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{k+l} c_i N_{i,k}(x_j) - f_j \right)^2 + \theta^2 \sum_{j=3}^{k+l} \hat{c}_j^2 \\ &= \min_{\tilde{c} \in \mathbb{R}^{k+l}} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{k+l} \tilde{c}_i N_{i,k}(x_j) - f_j \right)^2 + \theta^2 \sum_{j=3}^{k+l} \hat{c}_j^2. \end{aligned}$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned} c_j^{(2)} = & \frac{(k-1)(k-2)}{t_{j+k-2} - t_j} \left[\frac{1}{t_{j+k-2} - t_{j-1}} c_{j-2} \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{t_{j+k-1} - t_j} + \frac{1}{t_{j+k-2} - t_{j-1}} \right) c_{j-1} + \frac{1}{t_{j+k-1} - t_j} c_j \right], \end{aligned}$$

für $j = 3, \dots, k+l$.

Mit $\hat{\mathbf{c}} := (\hat{c}_3, \dots, \hat{c}_{k+l})^T$ ergibt sich $\hat{\mathbf{c}} = B_T \mathbf{c}$,

$$B_T := \begin{pmatrix} b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & & & & \\ & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & & & \emptyset \\ \emptyset & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & b_{k+l,k+l-2} & b_{k+l,k+l-1} & b_{k+l,k+l} & \end{pmatrix},$$

$$d_j := \frac{(k-1)(k-2)\|N_{j,k-2}\|_2}{t_{j+k-2} - t_j}, \quad b_{j,j-2} := \frac{d_j}{t_{j+k-2} - t_{j-1}},$$

$$b_{j,j} := \frac{d_j}{t_{j+k-1} - t_j}, \quad b_{j,j-1} := -(b_{j,j-2} + b_{j,j}).$$

Das Minimierungsproblem erhält dann die Form

$$\|A_T \mathbf{c} - \mathbf{f}\|_2^2 + \theta^2 \|B_T \mathbf{c}\|_2^2 = \min_{\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{k+l}} \|A_T \tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{f}\|_2^2 + \theta^2 \|B_T \tilde{\mathbf{c}}\|_2^2,$$

was wiederum gleichbedeutend mit

$$\left\| \begin{pmatrix} A_T \\ \theta B_T \end{pmatrix} \mathbf{c} - \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \rightarrow \min$$

und somit ein Standard-Ausgleichsproblem ist.

Beispiel 9.23.

Messungen (x_j, f_j) , $j = 1, \dots, 20$ (* in Abbildung).

Zur Approximation (und Glättung) dieser Daten benutzen wir kubische Splines mit äquidistanten Knoten $\tau_j = j * 0.1$, $j = 0, \dots, 10$.

Für drei Parameterwerte $\theta = 0, 10^{-3}, 10^{-2}$ werden die Splinefunktionen $S(x) = \sum_{j=1}^{13} c_j N_{j,4}(x)$ gezeigt. \triangle

