

Wavelets – Eine Tour durch die Skalen

Wolfgang Dahmen

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

RWTH AACHEN

Wozu noch **Mathematik** ?

Wozu noch **Mathematik** ? – da Computer doch immer leistungsfähiger werden

¹

Wozu noch **Mathematik** ? – da Computer doch immer leistungsfähiger werden

These:

Wozu noch **Mathematik** ? – da Computer doch immer leistungsfähiger werden

These: Mehr Rechenleistung

Wozu noch **Mathematik** ? – da Computer doch immer leistungsfähiger werden

These: Mehr Rechenleistung \leadsto “mehr” Mathematik

Wozu noch **Mathematik** ? – da Computer doch immer leistungsfähiger werden

These: Mehr Rechenleistung \leadsto “mehr” Mathematik

- Immer komplexere mathematische Modelle/Methoden

Wozu noch **Mathematik** ? – da Computer doch immer leistungsfähiger werden

These: Mehr Rechenleistung \leadsto “mehr” Mathematik

- Immer komplexere **mathematische Modelle/Methoden**, die das Problem erst für den Rechner **bearbeitbar** machen

Wozu noch **Mathematik** ? – da Computer doch immer leistungsfähiger werden

These: Mehr Rechenleistung \leadsto “mehr” Mathematik

- Immer komplexere **mathematische Modelle/Methoden**, die das Problem erst für den Rechner **bearbeitbar** machen
- Wachsende **Informationsflut** wird zum größten Hindernis ihrer Verwertung



Wozu noch **Mathematik** ? – da Computer doch immer leistungsfähiger werden

These: Mehr Rechenleistung \leadsto “mehr” Mathematik

- Immer komplexere **mathematische Modelle/Methoden**, die das Problem erst für den Rechner **bearbeitbar** machen
- Wachsende **Informationsflut** wird zum größten Hindernis ihrer Verwertung

\leadsto

Mehrskaligkeit

Wie kann (Angewandte ?) Mathematik “wirken”?

- Komplexe Real-Anwendungen

Wie kann (Angewandte ?) Mathematik “wirken”?

- Komplexe Real-Anwendungen
- Rigoros begründete mathematische Modelle/Methoden

Wie kann (Angewandte ?) Mathematik “wirken”?

- Komplexe Real-Anwendungen
- Rigoros begründete mathematische Modelle/Methoden

Suche nach

- Einsichten

Wie kann (Angewandte ?) Mathematik “wirken”?

- Komplexe Real-Anwendungen
- Rigoros begründete mathematische Modelle/Methoden

Suche nach

- Einsichten
- Abkürzungen

Wie kann (Angewandte ?) Mathematik “wirken”?

- Komplexe Real-Anwendungen
- Rigoros begründete mathematische Modelle/Methoden

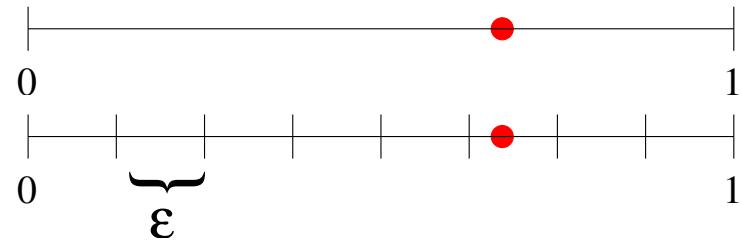
Suche nach

- Einsichten
- Abkürzungen
- Analysis \leadsto Neue algorithmische Konzepte

Ein Beispiel:

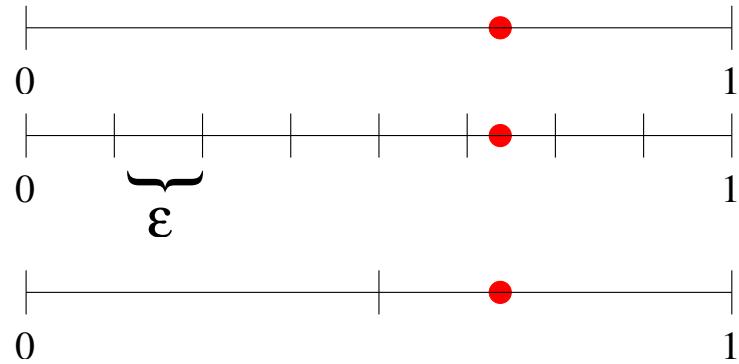


Ein Beispiel:



$\leadsto \sim 1/\varepsilon$ Fragen

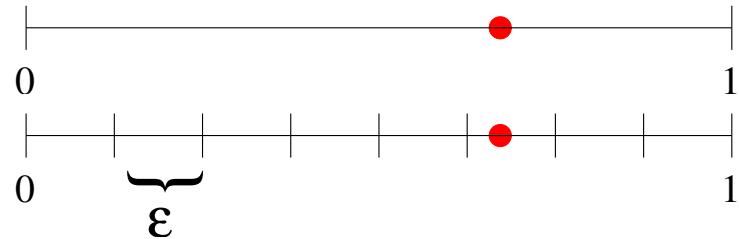
Ein Beispiel:



$\rightsquigarrow \sim 1/\varepsilon$ Fragen

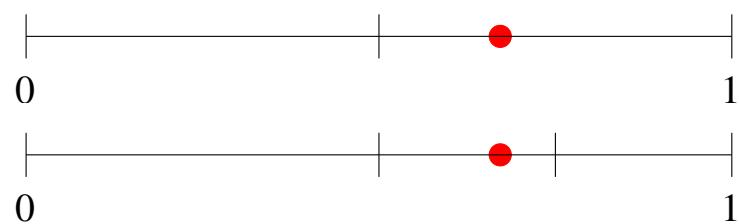
klügere Strategie

Ein Beispiel:

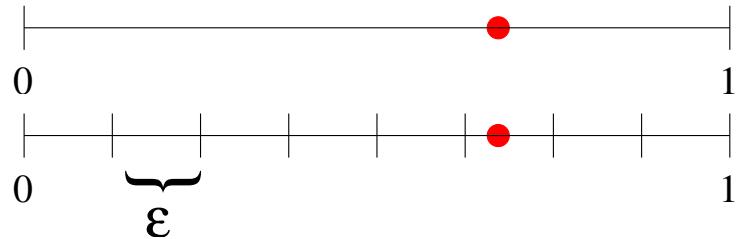


$\rightsquigarrow \sim 1/\varepsilon$ Fragen

klügere Strategie

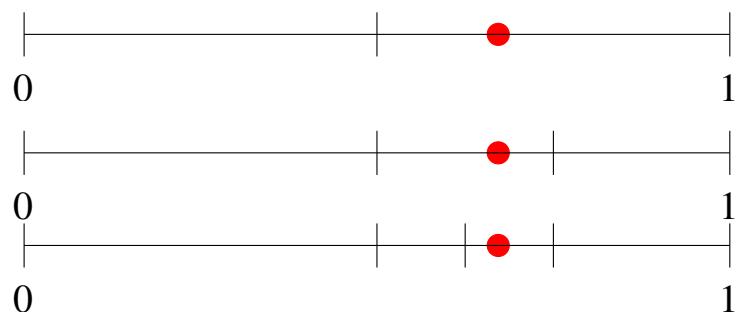


Ein Beispiel:



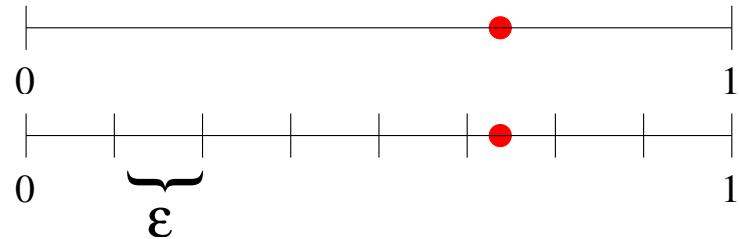
$\rightsquigarrow \sim 1/\varepsilon$ Fragen

klügere Strategie



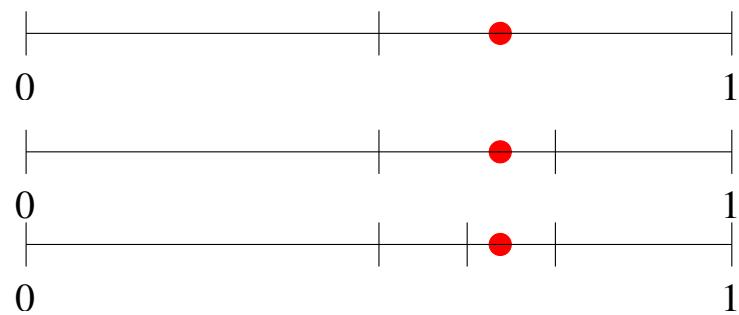
$\rightsquigarrow \sim |\log_2 \varepsilon|$ Fragen

Ein Beispiel:



$\rightsquigarrow \sim 1/\varepsilon$ Fragen

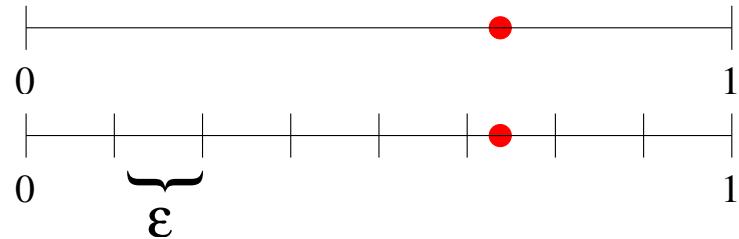
klügere Strategie



$\rightsquigarrow \sim |\log_2 \varepsilon|$ Fragen

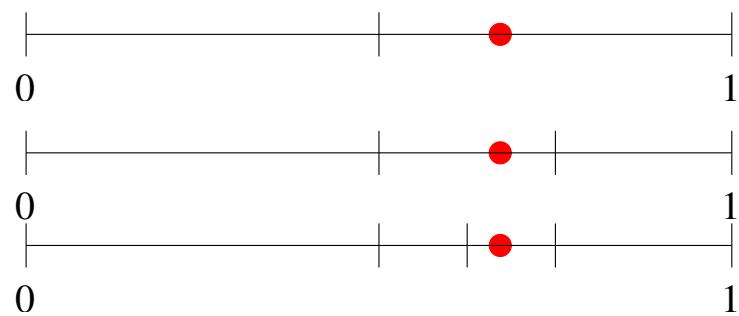
Dynamische Verwertung bereits gewonnener Information

Ein Beispiel:



$\rightsquigarrow \sim 1/\varepsilon$ Fragen

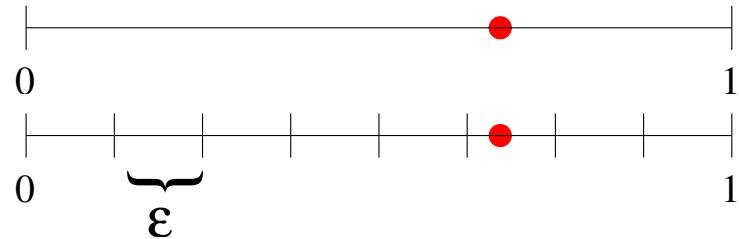
klügere Strategie



$\rightsquigarrow \sim |\log_2 \varepsilon|$ Fragen

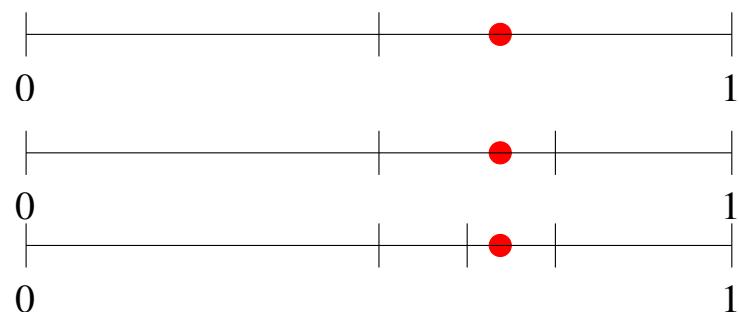
Dynamische Verwertung bereits gewonnener Information – **Adaptivität**

Ein Beispiel:



$\rightsquigarrow \sim 1/\varepsilon$ Fragen

klügere Strategie

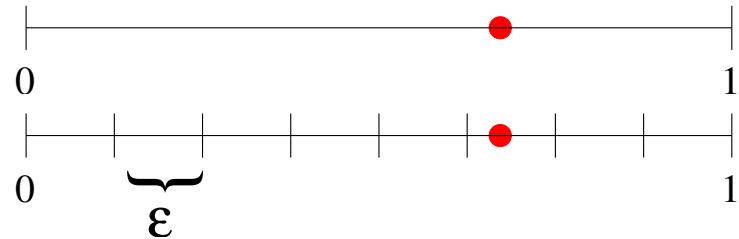


$\rightsquigarrow \sim |\log_2 \varepsilon|$ Fragen

Dynamische Verwertung bereits gewonnener Information – **Adaptivität**

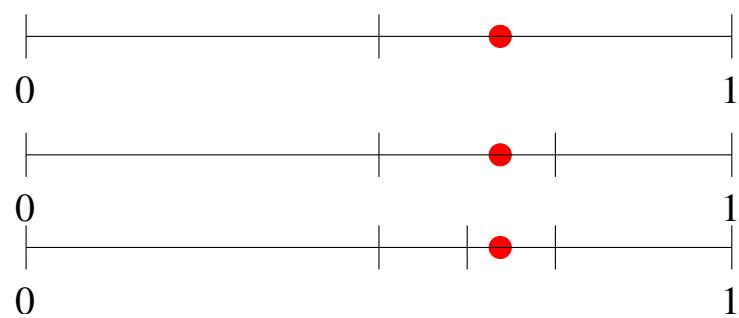
Bildkompression/Kodierung

Ein Beispiel:



$\rightsquigarrow \sim 1/\varepsilon$ Fragen

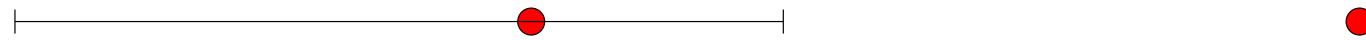
klügere Strategie

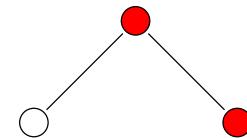


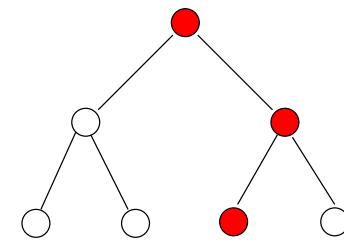
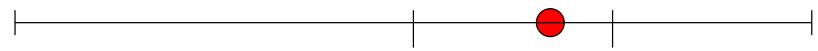
$\rightsquigarrow \sim |\log_2 \varepsilon|$ Fragen

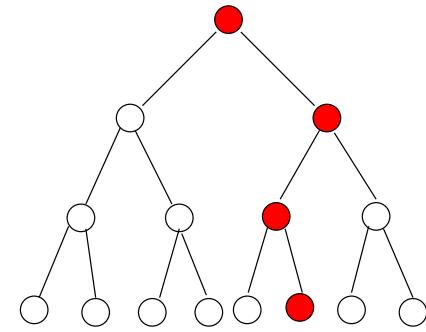
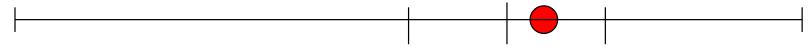
Dynamische Verwertung bereits gewonnener Information – **Adaptivität**

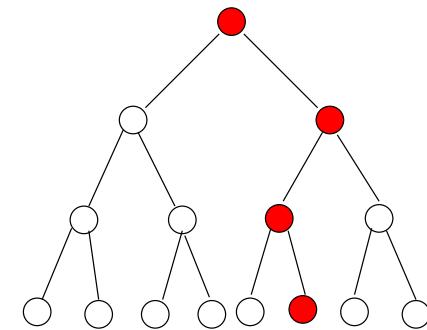
Bildkompression/Kodierung – Numerische Simulation











Geeignete mathematische “Instrumente”?

Zerlegung komplexer Strukturen in einfache **Bausteine**

Zerlegung komplexer Strukturen in einfache **Bausteine** – Darstellungen

- $\pi \approx 3.141592654\dots = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + \dots$

Zerlegung komplexer Strukturen in einfache **Bausteine** – Darstellungen

- $\pi \approx 3.141592654\dots = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + \dots$

$$x \in I\!\!R \rightsquigarrow x = \pm \sum_{j=-\infty}^J d_j b^j$$

Zerlegung komplexer Strukturen in einfache **Bausteine** – Darstellungen

- $\pi \approx 3.141592654\dots = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + \dots$

$$x \in I\!\!R \rightsquigarrow x = \pm \sum_{j=-\infty}^J d_j b^j$$

- **Ziffernfolge:** $x \leftrightarrow \mathbf{d} = (d_j)_j$

Zerlegung komplexer Strukturen in einfache **Bausteine** – Darstellungen

- $\pi \approx 3.141592654\dots = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + \dots$

$$x \in I\!\!R \rightsquigarrow x = \pm \sum_{j=-\infty}^J d_j b^j$$

- Ziffernfolge: $x \leftrightarrow \mathbf{d} = (d_j)_j$

Zifferndarstellungen für Funktionen ?

$$f(x) = \sum_{\lambda} d_{\lambda} \psi_{\lambda}(x) \quad f \leftrightarrow \mathbf{d}$$

Zerlegung komplexer Strukturen in einfache **Bausteine** – Darstellungen

- $\pi \approx 3.141592654\dots = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + \dots$

$$x \in I\!\!R \rightsquigarrow x = \pm \sum_{j=-\infty}^J d_j b^j$$

- Ziffernfolge: $x \leftrightarrow \mathbf{d} = (d_j)_j$

Zifferndarstellungen für **Funktionen** ?

$$f(x) = \sum_{\lambda} d_{\lambda} \psi_{\lambda}(x) \quad f \leftrightarrow \mathbf{d}$$

Was sind gute Basisfunktionen – Bausteine ψ_{λ} ?

Beispiel: Bildkompression



Beispiel: Bildkompression

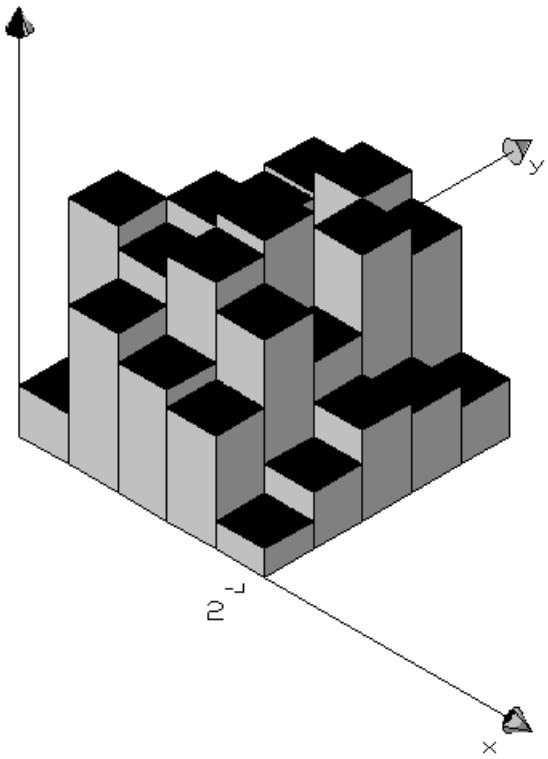


- links: Original 768×512 Pixel 8 Bit Grauwerttiefe \leadsto 384 KB bei **naiver Speicherung**

Beispiel: Bildkompression



- links: Original 768×512 Pixel 8 Bit Grauwerttiefe \leadsto 384 KB bei **naiver Speicherung**
- rechts: komprimierte Version ca. **3.5 % Speicherbedarf**



Bild

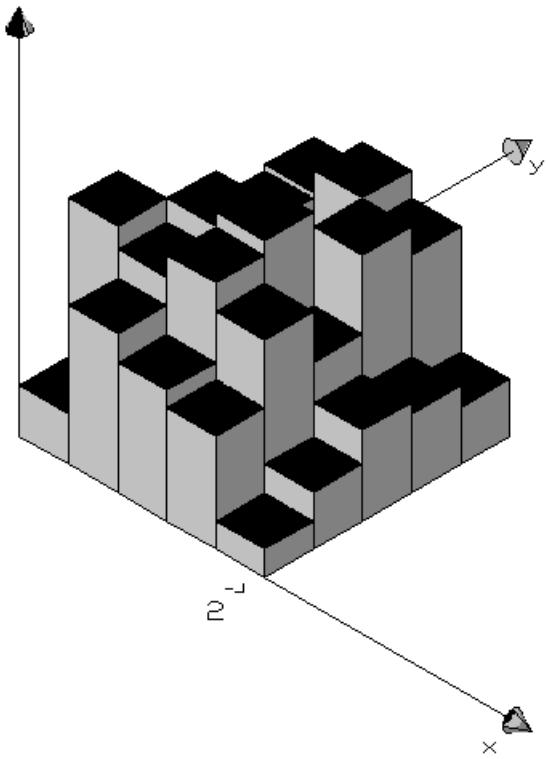


Bild
Histogramm

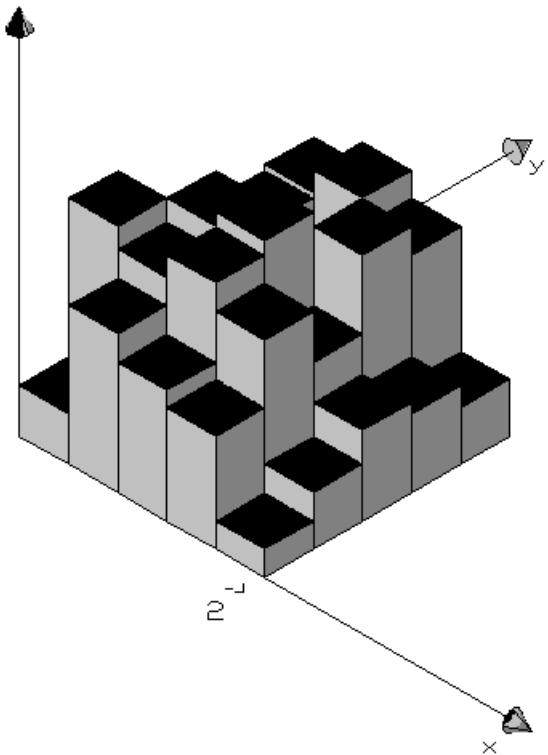
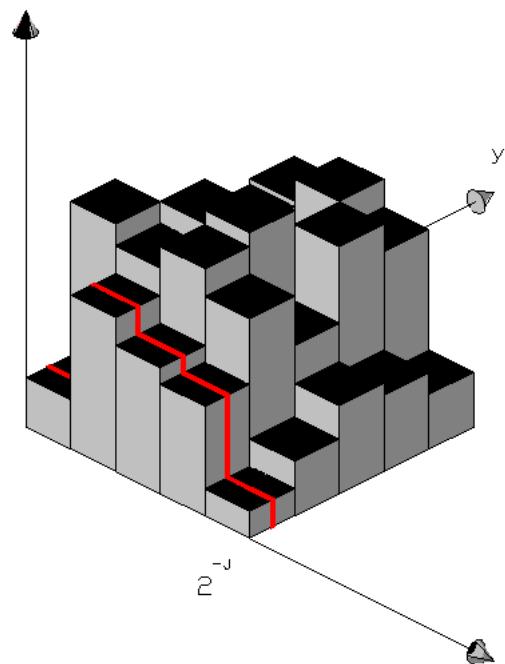
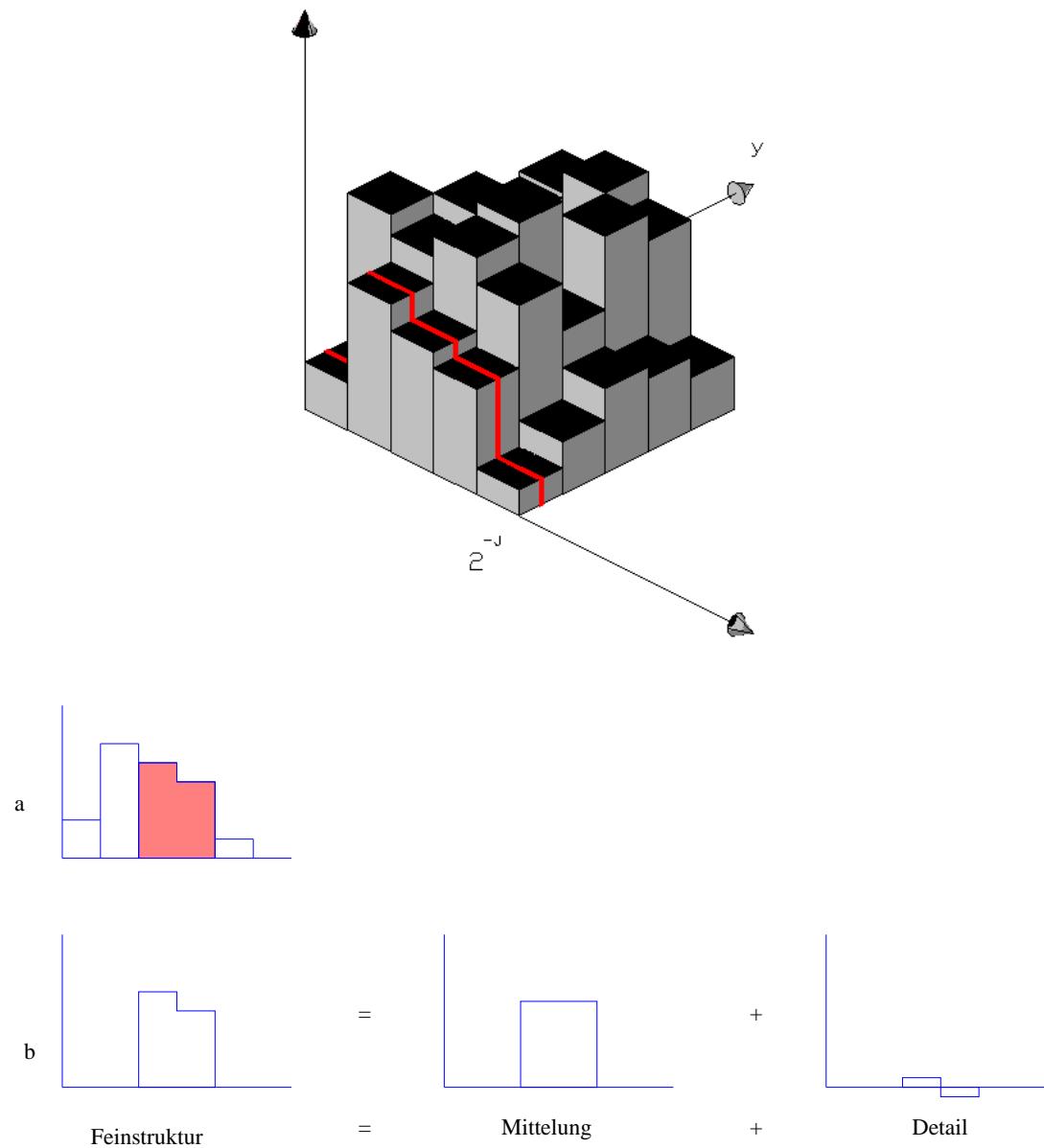
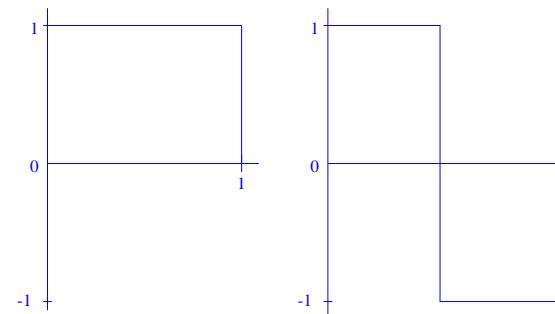


Bild
Histogramm
Funktion

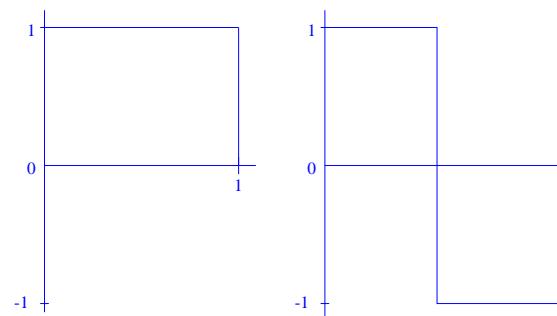
$$f(x) = \sum_{\square} p_{\square} \chi_{\square}(x)$$

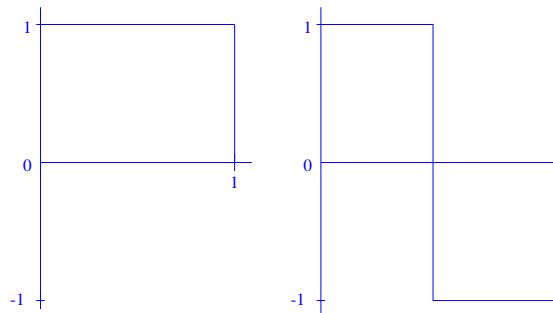




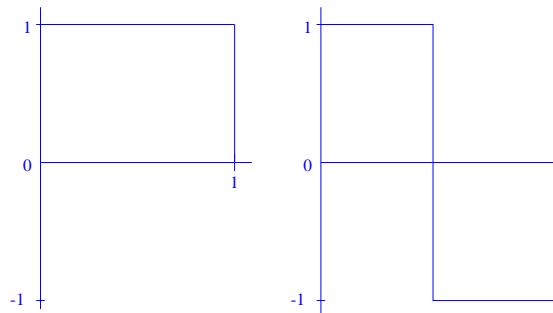


12

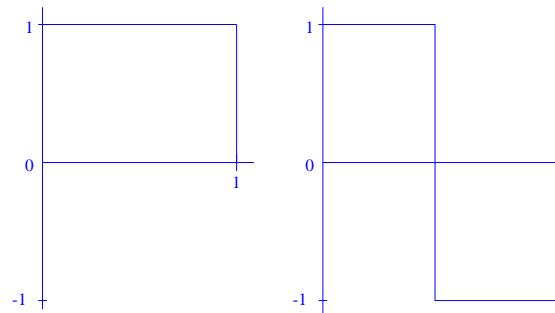

$$\phi(x)$$



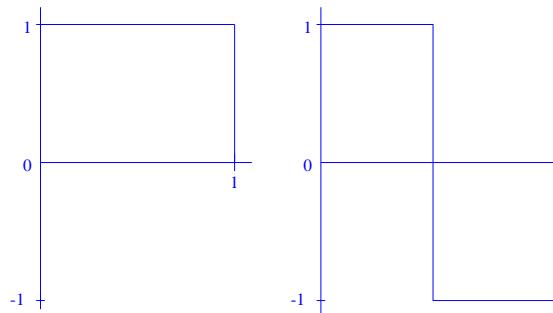
$$\phi(x), \phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k)$$



$$\phi(x), \phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k), \quad \psi(x)$$

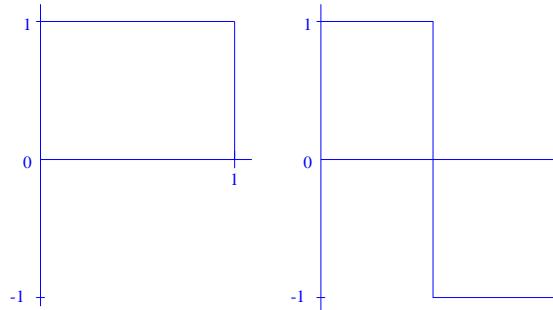


$$\phi(x), \phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k), \quad \psi(x), \psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$$



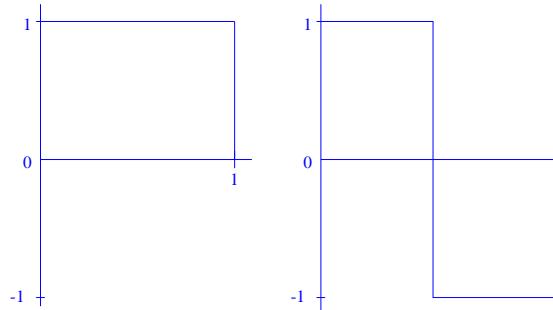
$$\phi(x), \phi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}(x) = \phi(2^{\mathbf{j}}x - \mathbf{k}), \quad \psi(x), \psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}(x) = \psi(2^{\mathbf{j}}x - \mathbf{k})$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} p_{J,k} \phi_{\mathbf{J}, \mathbf{k}}(x)$$



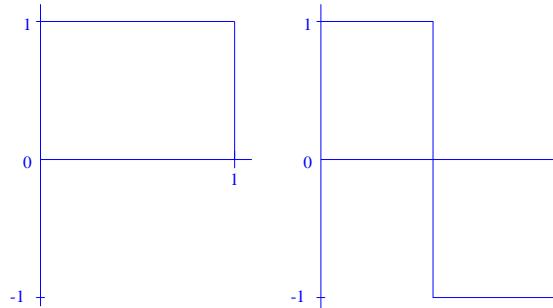
$$\phi(x), \phi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}(x) = \phi(2^{\mathbf{j}}x - \mathbf{k}), \quad \psi(x), \psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}(x) = \psi(2^{\mathbf{j}}x - \mathbf{k})$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} p_{J,k} \phi_{J,k}(x) = \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} p_{J-1,k} \phi_{J-1,k}(x)$$



$$\phi(x), \phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k), \quad \psi(x), \psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$$

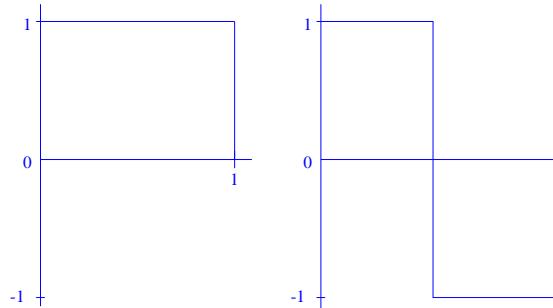
$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} p_{J,k} \phi_{J,k}(x) = \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} p_{J-1,k} \phi_{J-1,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} d_{J-1,k} \psi_{J-1,k}(x)$$



$$\phi(x), \phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k), \quad \psi(x), \psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} p_{J,k} \phi_{J,k}(x) = \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} p_{J-1,k} \phi_{J-1,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} d_{J-1,k} \psi_{J-1,k}(x)$$

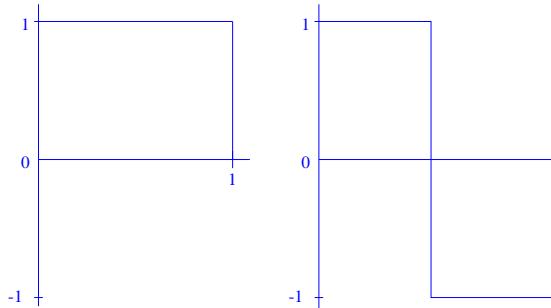
$$p_{J-1,k} = \frac{1}{2} (p_{J,2k} + p_{J,2k+1}),$$



$$\phi(x), \phi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}(x) = \phi(2^{\mathbf{j}}x - \mathbf{k}), \quad \psi(x), \psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}(x) = \psi(2^{\mathbf{j}}x - \mathbf{k})$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} p_{J,k} \phi_{J,k}(x) = \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} p_{J-1,k} \phi_{J-1,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} d_{J-1,k} \psi_{J-1,k}(x)$$

$$p_{J-1,k} = \frac{1}{2} (p_{J,2k} + p_{J,2k+1}), \quad d_{J-1,k} = \frac{1}{2} (p_{J,2k} - p_{J,2k+1})$$



$$\phi(x), \phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k), \quad \psi(x), \psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} p_{J,k} \phi_{J,k}(x) = \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} p_{J-1,k} \phi_{J-1,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} d_{J-1,k} \psi_{J-1,k}(x)$$

$$p_{J-1,k} = \frac{1}{2} (p_{J,2k} + p_{J,2k+1}), \quad d_{J-1,k} = \frac{1}{2} (p_{J,2k} - p_{J,2k+1})$$

$$f(x) = p_{0,0} \phi(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

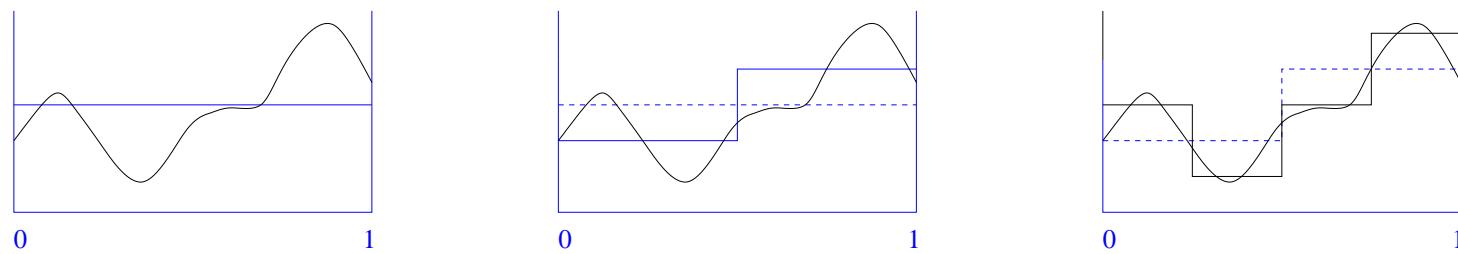


Abbildung 1: verschiedene Auflösungsstufen von f

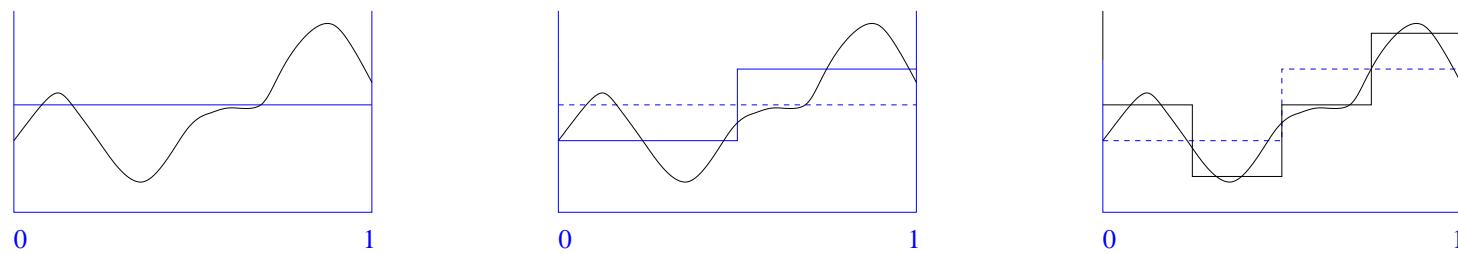
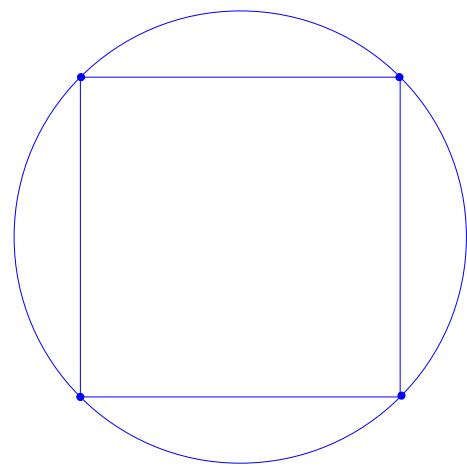


Abbildung 1: verschiedene Auflösungsstufen von f



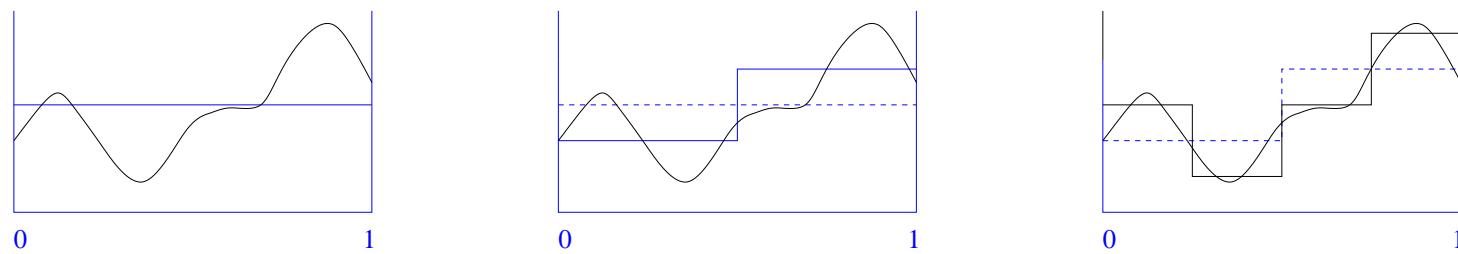
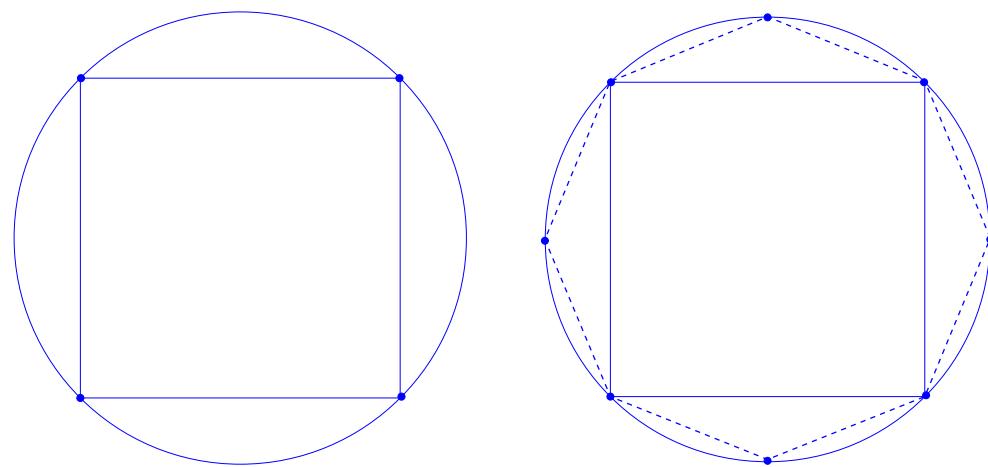


Abbildung 1: verschiedene Auflösungsstufen von f



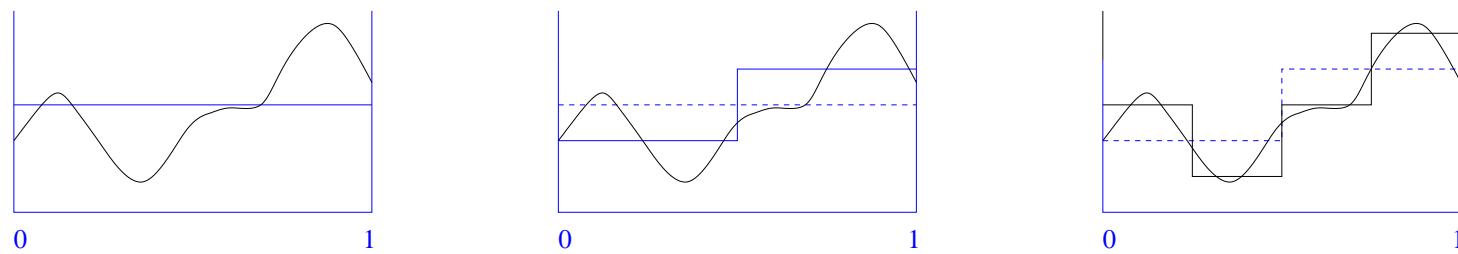
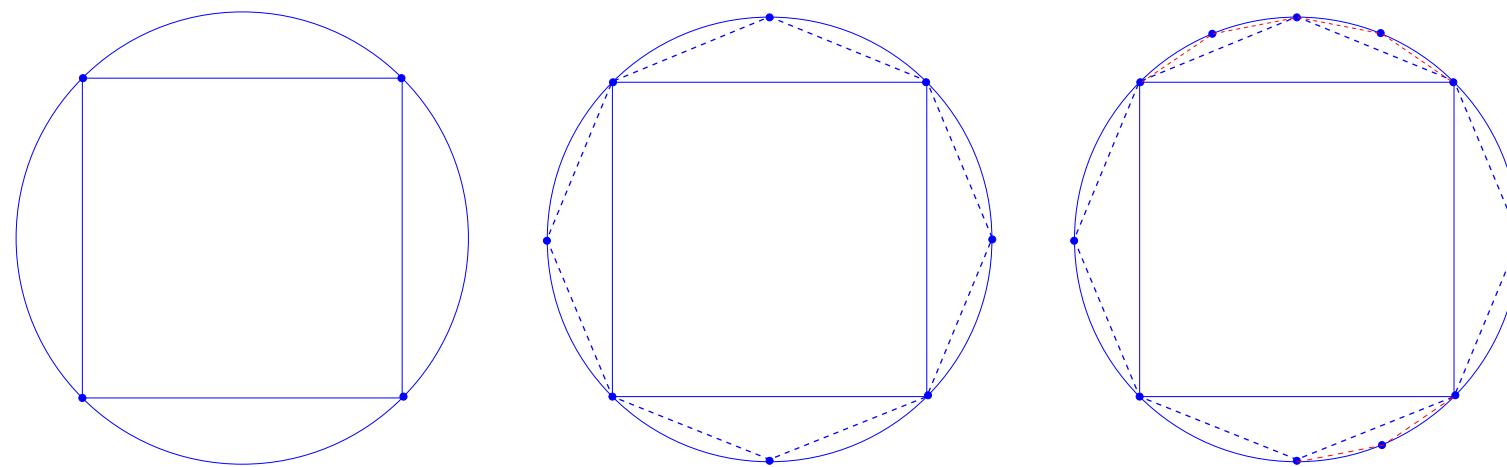
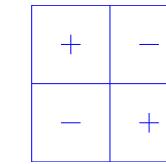
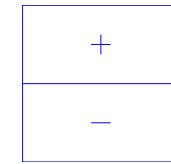
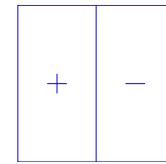
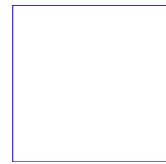


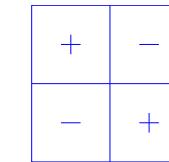
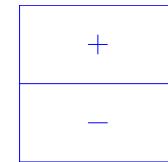
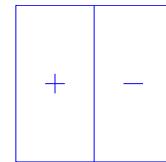
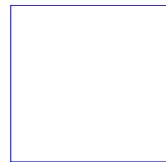
Abbildung 1: verschiedene Auflösungsstufen von f



L_2 -Normalisierung – Tensor-Produkte \rightsquigarrow (orthonormal) wavelet-basis

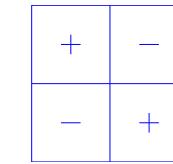
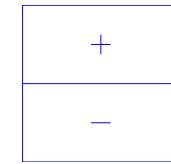
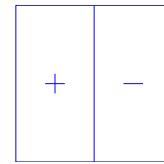
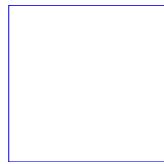


L_2 -Normalisierung – Tensor-Produkte \rightsquigarrow (orthonormal) wavelet-basis



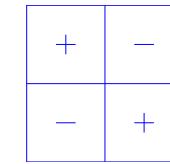
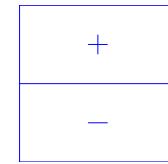
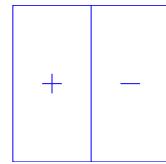
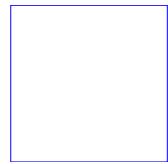
$$f(x) = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \psi_{\lambda}(x), \quad f_{\lambda} = \langle f, \psi_{\lambda} \rangle := \int_{\Omega} f(x) \psi_{\lambda}(x) dx$$

L_2 -Normalisierung – Tensor-Produkte \rightsquigarrow (orthonormal) wavelet-basis



$$f(x) = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \psi_{\lambda}(x), \quad f_{\lambda} = \langle f, \psi_{\lambda} \rangle := \int_{\Omega} f(x) \psi_{\lambda}(x) dx \quad (\lambda = (j, k))$$

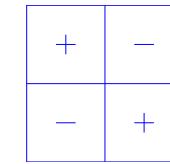
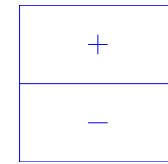
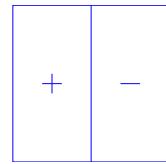
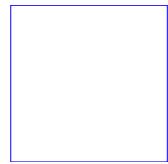
L_2 -Normalisierung – Tensor-Produkte \rightsquigarrow (orthonormal) wavelet-basis



$$f(x) = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \psi_{\lambda}(x), \quad f_{\lambda} = \langle f, \psi_{\lambda} \rangle := \int_{\Omega} f(x) \psi_{\lambda}(x) dx \quad (\lambda = (j, k))$$

$$\left(\sum_{\lambda} |f_{\lambda}|^2 \right)^{1/2} =: \|\mathbf{f}\|_{\ell_2} = \|f\|_{L_2} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

L_2 -Normalisierung – Tensor-Produkte \rightsquigarrow (orthonormal) wavelet-basis



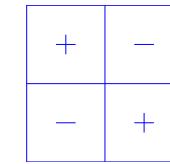
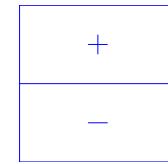
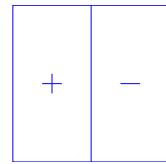
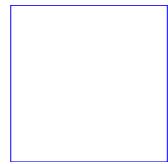
$$f(x) = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \psi_{\lambda}(x), \quad f_{\lambda} = \langle f, \psi_{\lambda} \rangle := \int_{\Omega} f(x) \psi_{\lambda}(x) dx \quad (\lambda = (j, k))$$

$$\left(\sum_{\lambda} |f_{\lambda}|^2 \right)^{1/2} =: \|\mathbf{f}\|_{\ell_2} = \|f\|_{L_2} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

Wann sind die Koeffizienten (Ziffern) f_{λ} von f klein? ($S_{\lambda} := \text{supp } \psi_{\lambda}$)

$$|f_{\lambda}| = |\langle f, \psi_{\lambda} \rangle|$$

L_2 -Normalisierung – Tensor-Produkte \rightsquigarrow (orthonormal) wavelet-basis



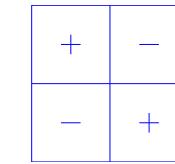
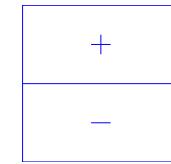
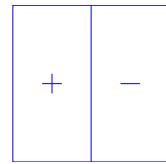
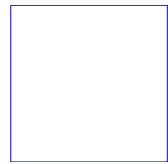
$$f(x) = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \psi_{\lambda}(x), \quad f_{\lambda} = \langle f, \psi_{\lambda} \rangle := \int_{\Omega} f(x) \psi_{\lambda}(x) dx \quad (\lambda = (j, k))$$

$$\left(\sum_{\lambda} |f_{\lambda}|^2 \right)^{1/2} =: \|\mathbf{f}\|_{\ell_2} = \|f\|_{L_2} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

Wann sind die Koeffizienten (**Ziffern**) f_{λ} von f klein? ($S_{\lambda} := \text{supp } \psi_{\lambda}$)

$$|f_{\lambda}| = |\langle f, \psi_{\lambda} \rangle| = \inf_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}} |\langle f - \mathbf{c}, \psi_{\lambda} \rangle|$$

L_2 -Normalisierung – Tensor-Produkte \rightsquigarrow (orthonormal) wavelet-basis

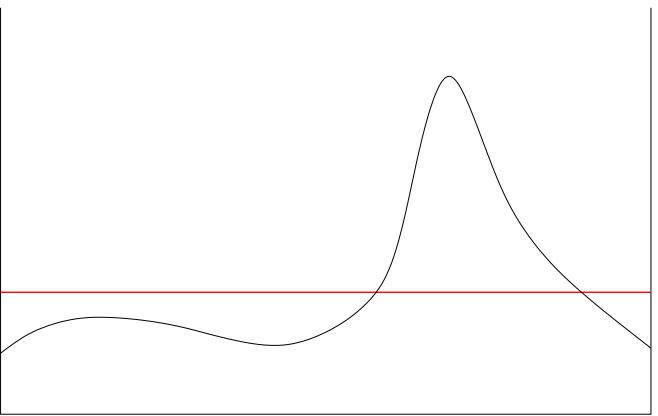


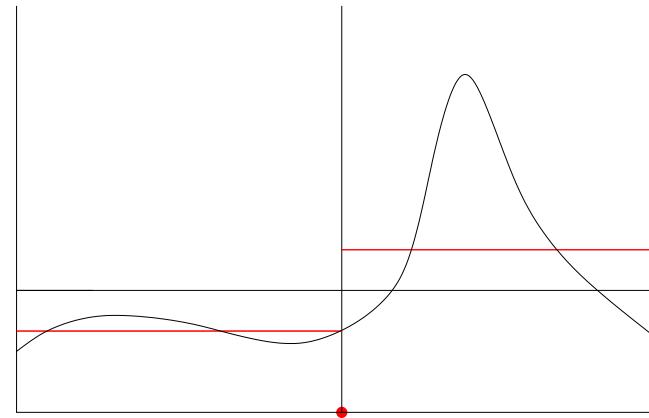
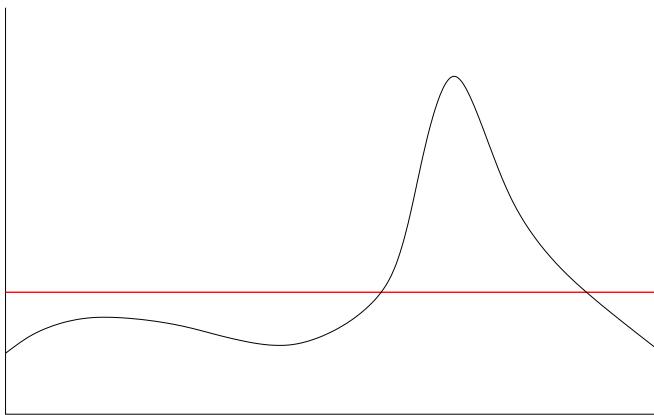
$$f(x) = \sum_{\lambda} f_{\lambda} \psi_{\lambda}(x), \quad f_{\lambda} = \langle f, \psi_{\lambda} \rangle := \int_{\Omega} f(x) \psi_{\lambda}(x) dx \quad (\lambda = (j, k))$$

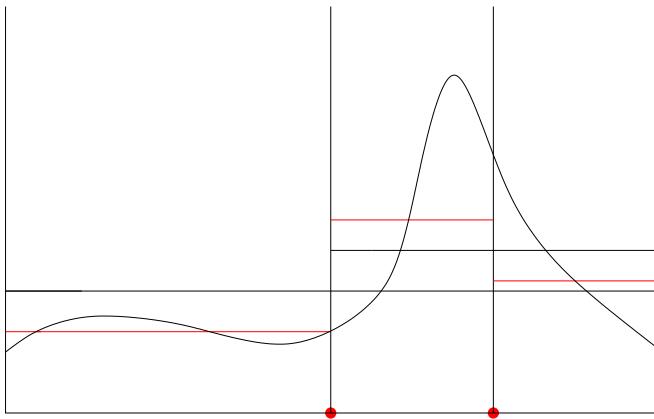
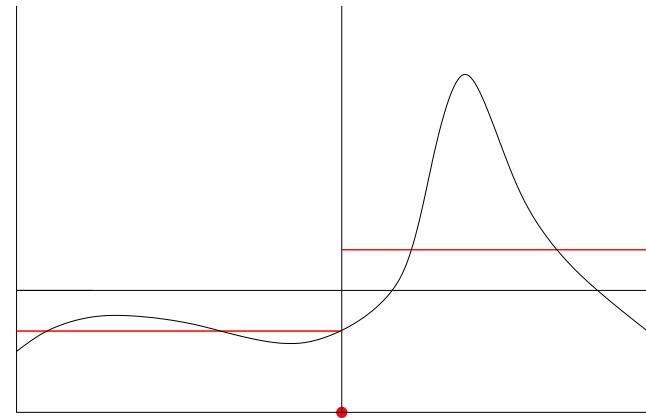
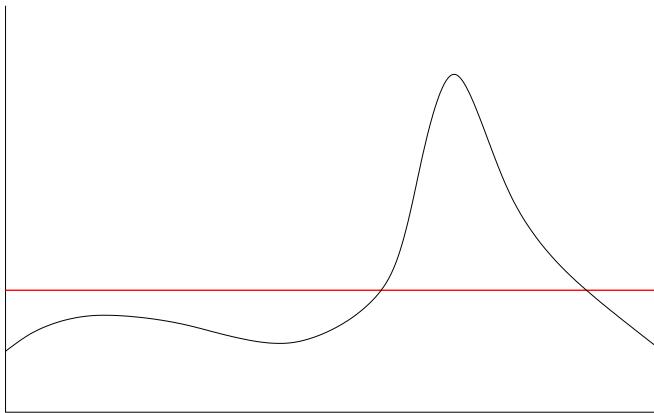
$$\left(\sum_{\lambda} |f_{\lambda}|^2 \right)^{1/2} =: \|\mathbf{f}\|_{\ell_2} = \|f\|_{L_2} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

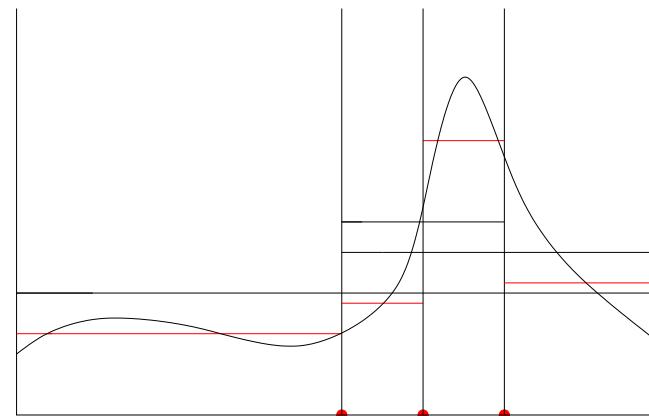
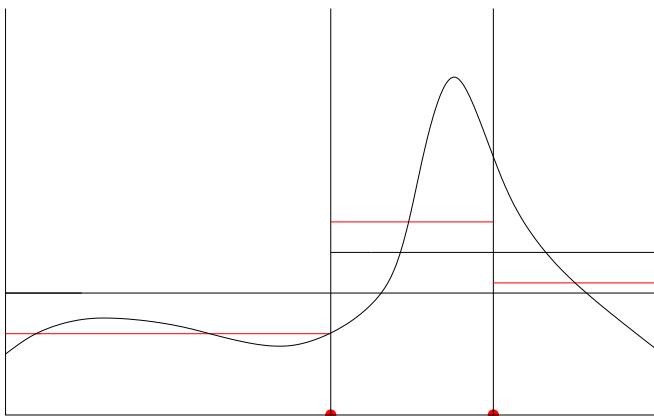
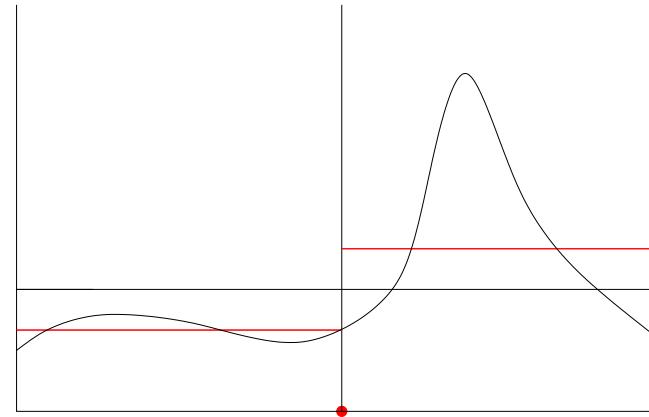
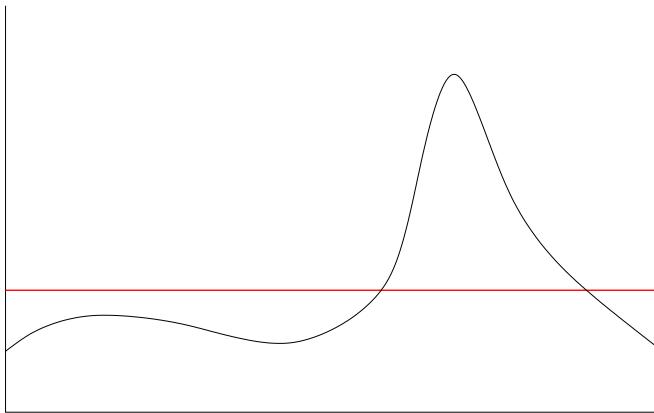
Wann sind die Koeffizienten (Ziffern) f_{λ} von f klein? ($S_{\lambda} := \text{supp } \psi_{\lambda}$)

$$|f_{\lambda}| = |\langle f, \psi_{\lambda} \rangle| = \inf_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}} |\langle f - \mathbf{c}, \psi_{\lambda} \rangle| \leq \inf_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}} \|f - \mathbf{c}\|_{L_2(S_{\lambda})} \leq 2^{-j} \|f'\|_{L_2(S_{\lambda})}$$









Kern-Eigenschaften:

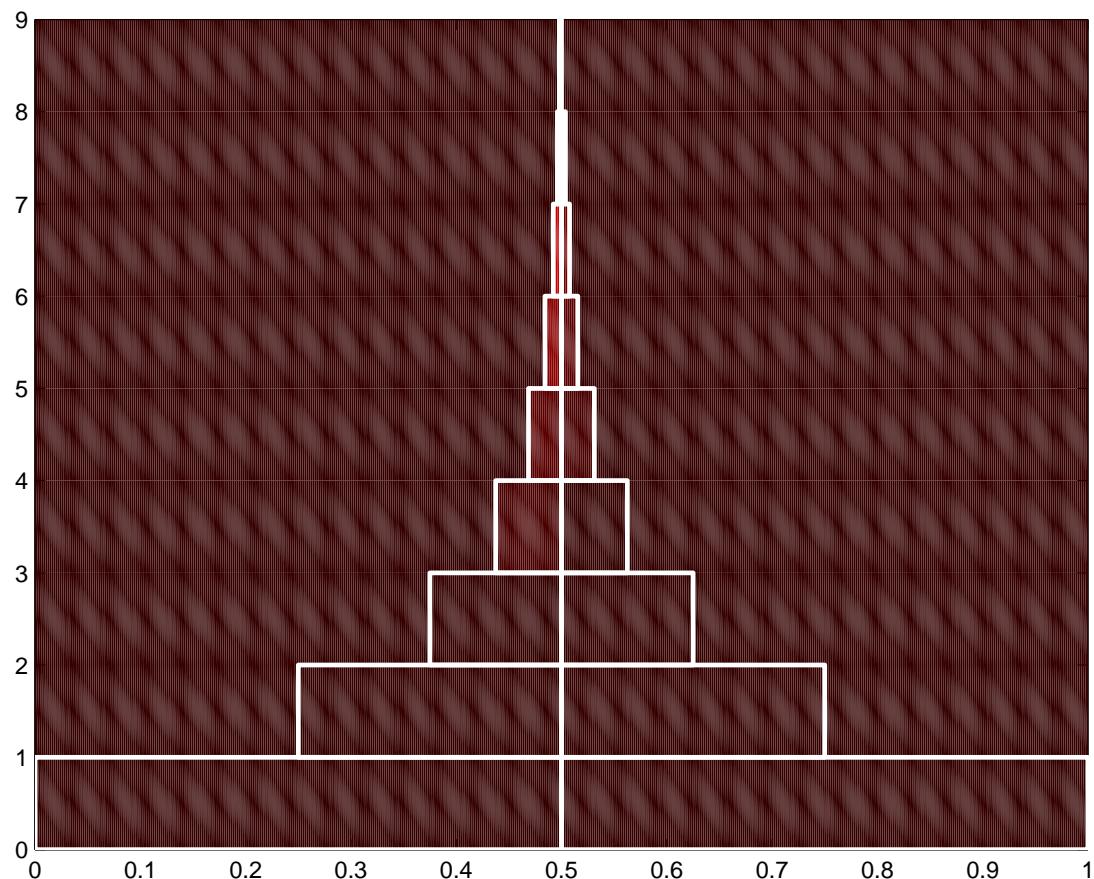
- Normäquivalenzen (NÄ): Funktionen \leftrightarrow Folgen
- Verschwindende Momente (VM)

~> Lokalisierung im Orts- und Frequenzraum

Kern-Eigenschaften:

- Normäquivalenzen (NÄ): Funktionen \leftrightarrow Folgen
- Verschwindende Momente (VM)

~> Lokalisierung im Orts- und Frequenzraum – Aufspüren von Singularitäten



Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f}

Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f} ;
- Quantisiere $\mathbf{f} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ und kodiere $\tilde{\mathbf{f}}$ als Bit Stream B

Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f} ;
- Quantisiere $\mathbf{f} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ und kodiere $\tilde{\mathbf{f}}$ als Bit Stream B ;
 - ★ Schwellwert: $\eta > 0$

Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f} ;
- Quantisiere $\mathbf{f} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ und kodiere $\tilde{\mathbf{f}}$ als Bit Stream B ;
 - ★ Schwellwert: $\eta > 0$; $f_\lambda \rightarrow 0$ falls $|f_\lambda| \leq \eta$

Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f} ;
- Quantisiere $\mathbf{f} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ und kodiere $\tilde{\mathbf{f}}$ als Bit Stream B ;
 - ★ Schwellwert: $\eta > 0$; $f_\lambda \rightarrow 0$ falls $|f_\lambda| \leq \eta$
 - ★ Binärschubladen:

Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f} ;
- Quantisiere $\mathbf{f} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ und kodiere $\tilde{\mathbf{f}}$ als Bit Stream B ;
 - ★ Schwellwert: $\eta > 0$; $f_\lambda \rightarrow 0$ falls $|f_\lambda| \leq \eta$
 - ★ Binärschubladen: Falls $2^{k-1}\eta < |f_\lambda| \leq 2^k\eta$ ($k \geq 1$), kodiere f_λ mit k Bits

Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f} ;
- Quantisiere $\mathbf{f} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ und kodiere $\tilde{\mathbf{f}}$ als Bit Stream B ;
 - ★ Schwellwert: $\eta > 0$; $f_\lambda \rightarrow 0$ falls $|f_\lambda| \leq \eta$
 - ★ Binärschubladen: Falls $2^{k-1}\eta < |f_\lambda| \leq 2^k\eta$ ($k \geq 1$), kodiere f_λ mit k Bits
 $\rightsquigarrow |f_\lambda - \tilde{f}_\lambda| \leq \eta$

Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f} ;
- Quantisiere $\mathbf{f} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ und kodiere $\tilde{\mathbf{f}}$ als Bit Stream B ;
 - ★ Schwellwert: $\eta > 0$; $f_\lambda \rightarrow 0$ falls $|f_\lambda| \leq \eta$
 - ★ Binärschubladen: Falls $2^{k-1}\eta < |f_\lambda| \leq 2^k\eta$ ($k \geq 1$), kodiere f_λ mit k Bits
 $\rightsquigarrow |f_\lambda - \tilde{f}_\lambda| \leq \eta$; \rightsquigarrow encoder E_η

Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f} ;
- Quantisiere $\mathbf{f} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ und kodiere $\tilde{\mathbf{f}}$ als Bit Stream B ;
 - ★ Schwellwert: $\eta > 0$; $f_\lambda \rightarrow 0$ falls $|f_\lambda| \leq \eta$
 - ★ Binärschubladen: Falls $2^{k-1}\eta < |f_\lambda| \leq 2^k\eta$ ($k \geq 1$), kodiere f_λ mit k Bits
 $\rightsquigarrow |f_\lambda - \tilde{f}_\lambda| \leq \eta$; \rightsquigarrow encoder E_η
 - ★ Haken: man muß auch die Adressen kodieren

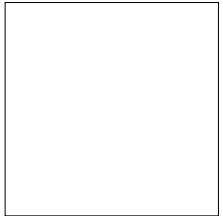
Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f} ;
- Quantisiere $\mathbf{f} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ und kodiere $\tilde{\mathbf{f}}$ als Bit Stream B ;
 - ★ Schwellwert: $\eta > 0$; $f_\lambda \rightarrow 0$ falls $|f_\lambda| \leq \eta$
 - ★ Binärschubladen: Falls $2^{k-1}\eta < |f_\lambda| \leq 2^k\eta$ ($k \geq 1$), kodiere f_λ mit k Bits
 $\rightsquigarrow |f_\lambda - \tilde{f}_\lambda| \leq \eta$; \rightsquigarrow encoder E_η
 - ★ Haken: man muß auch die Adressen kodieren
 Bilde kleinste Baumhüllen

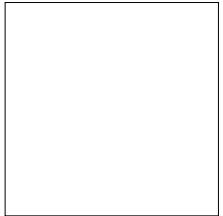
Kompression - Kodierung:

- Transformiere Pixel Array $\mathbf{p} = (p_I : I \in \mathcal{D}_J)$ in Wavelet Koordinaten \mathbf{f} ;
- Quantisiere $\mathbf{f} \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}$ und kodiere $\tilde{\mathbf{f}}$ als Bit Stream B ;
 - ★ Schwellwert: $\eta > 0$; $f_\lambda \rightarrow 0$ falls $|f_\lambda| \leq \eta$
 - ★ Binärschubladen: Falls $2^{k-1}\eta < |f_\lambda| \leq 2^k\eta$ ($k \geq 1$), kodiere f_λ mit k Bits
 $\rightsquigarrow |f_\lambda - \tilde{f}_\lambda| \leq \eta$; \rightsquigarrow encoder E_η
 - ★ Haken: man muß auch die Adressen kodieren
 Bilde kleinste Baumhüllen
- übertrage B und dekodierte $B \rightarrow \tilde{\mathbf{p}}$ – (Decoder D_η)

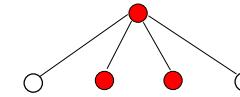
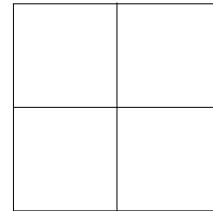
Quantisierung, Baumstrukturen



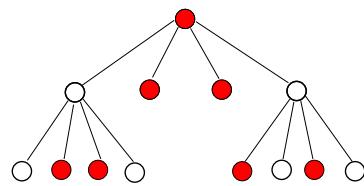
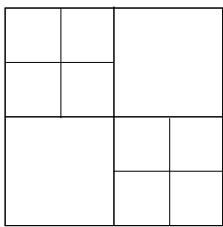
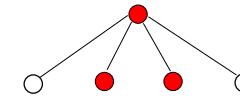
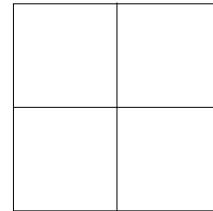
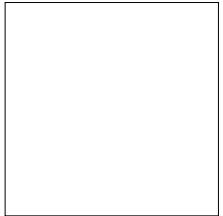
Quantisierung, Baumstrukturen



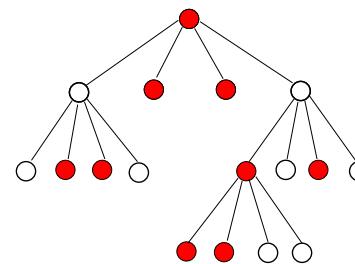
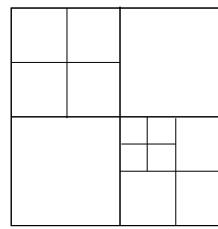
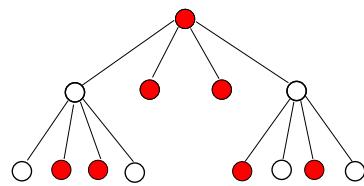
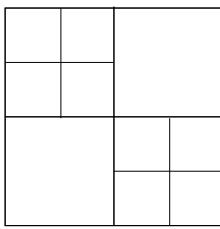
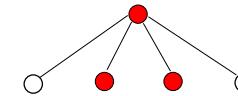
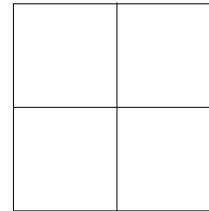
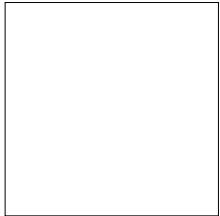
•



Quantisierung, Baumstrukturen



Quantisierung, Baumstrukturen

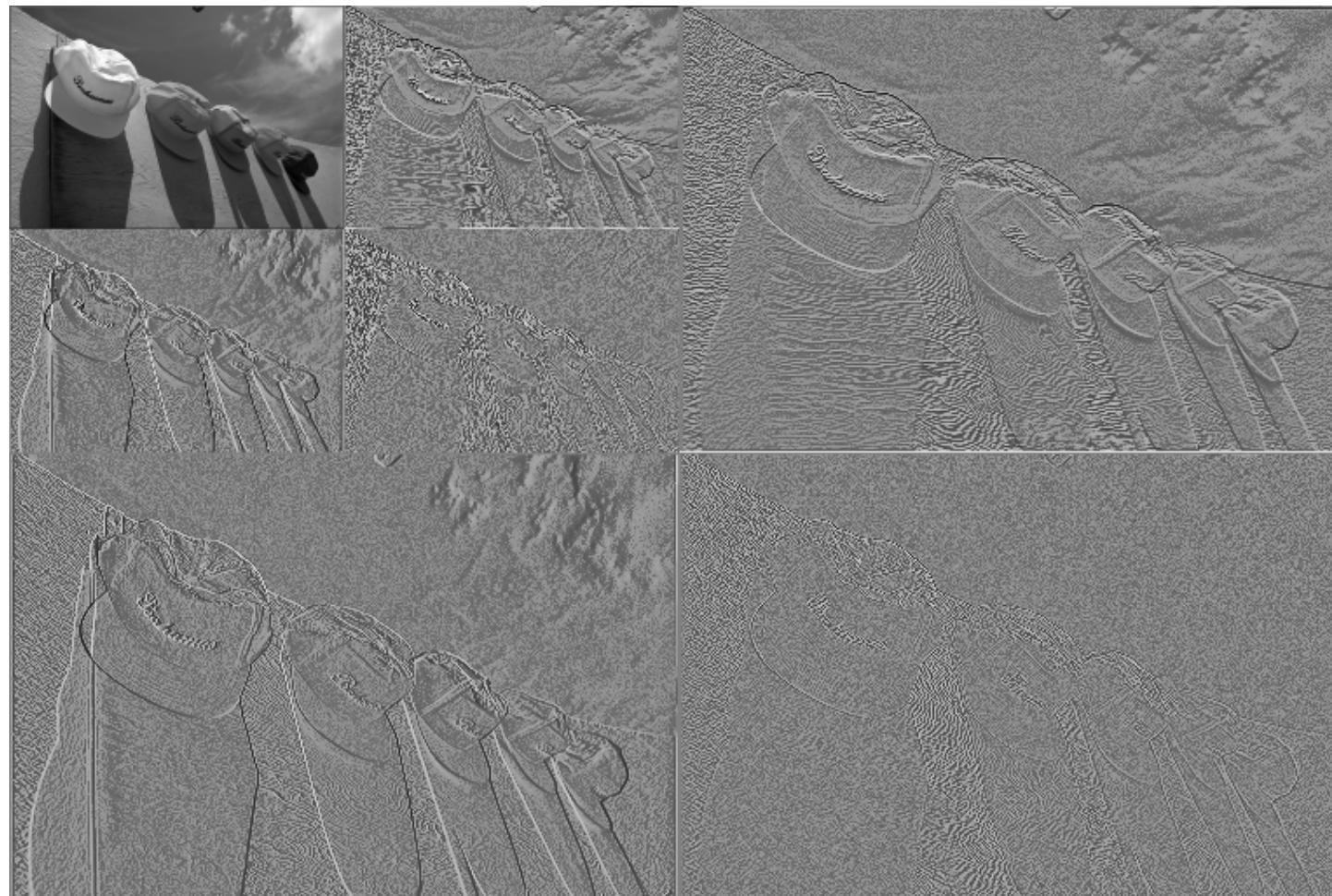




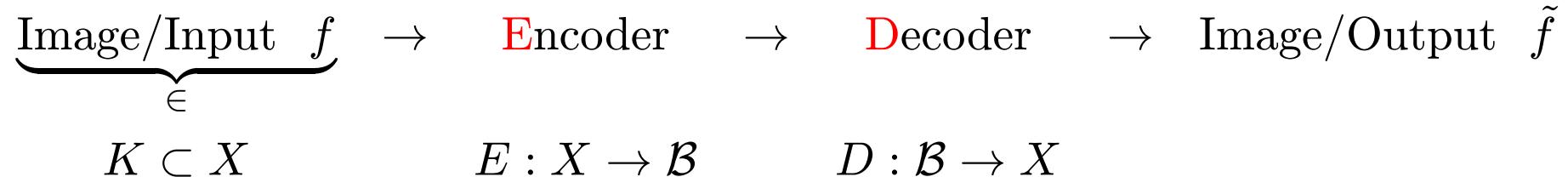




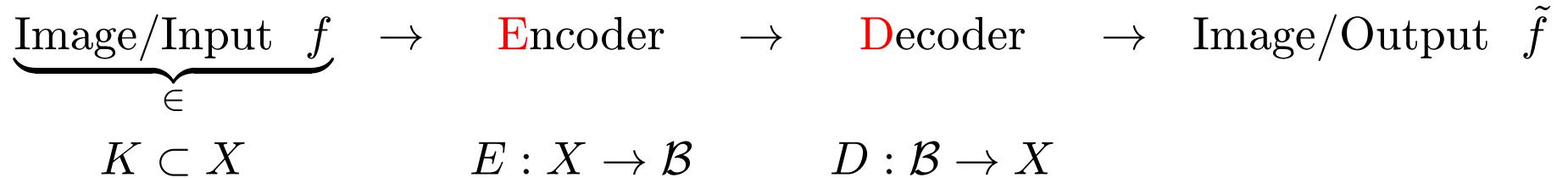




Was ist bestmöglich? – ein Modell

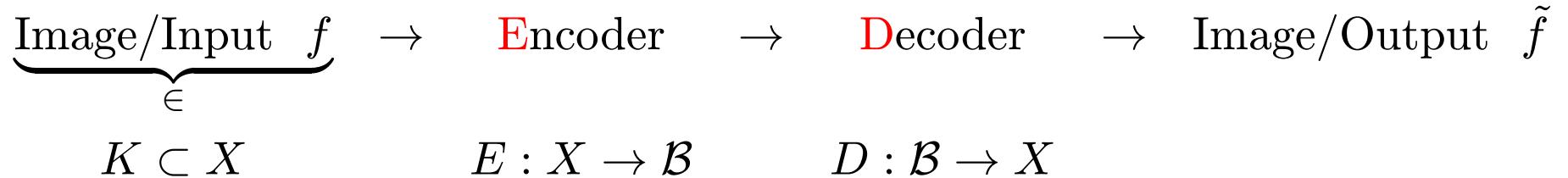


Was ist bestmöglich? – ein Modell



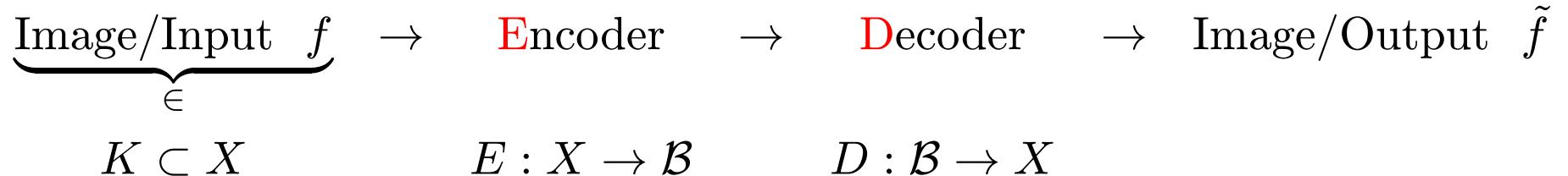
$$d_N(K) := \inf_{(E,D) : \max \{\#(E(f)) : f \in K\} \leq N}$$

Was ist bestmöglich? – ein Modell



$$d_N(K) := \inf_{(E,D) : \max \{ \#(E(f)) : f \in K \} \leq N} \left\{ \sup_{f \in K} \text{dist}(D(Ef), f) \right\}$$

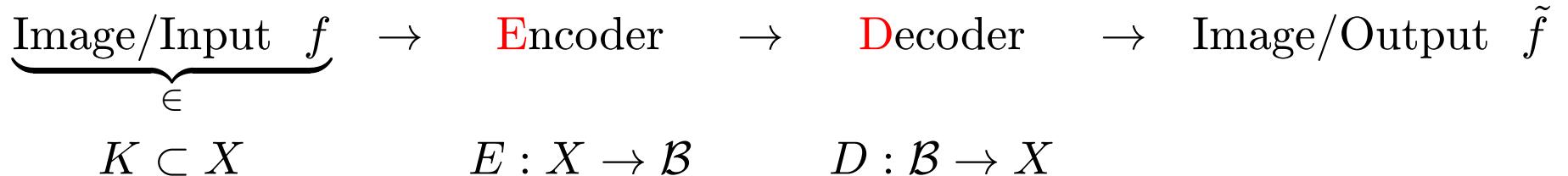
Was ist bestmöglich? – ein Modell



$$d_N(K) := \inf_{(E,D) : \max \{ \#(E(f)) : f \in K \} \leq N} \left\{ \sup_{f \in K} \text{dist}(D(Ef), f) \right\}$$

Kolmogorov-Entropie: $H_\epsilon(K), := \lceil \log_2 N_\epsilon(K) \rceil$

Was ist bestmöglich? – ein Modell

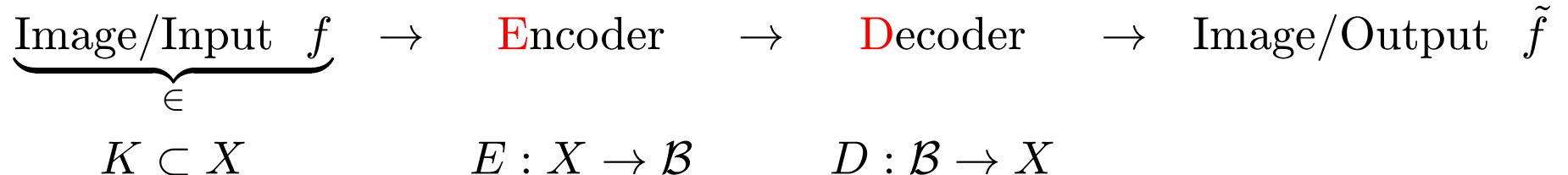


$$d_N(K) := \inf_{(E,D) : \max \{ \#(E(f)) : f \in K \} \leq N} \left\{ \sup_{f \in K} \text{dist}(D(Ef), f) \right\}$$

Kolmogorov-Entropie: $H_\epsilon(K), := \lceil \log_2 N_\epsilon(K) \rceil$

$$N_\epsilon(K) := \min_{f_i \in K} \{ N : K \subset \bigcup_{i=1}^N K_\epsilon(f_i) \}$$

Was ist bestmöglich? – ein Modell

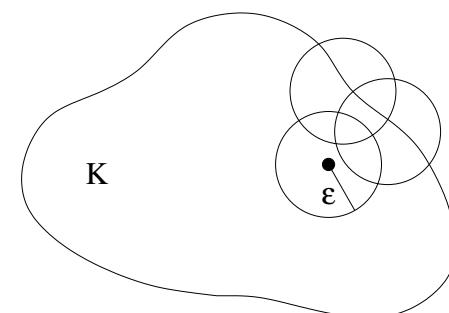


$$d_N(K) := \inf_{(E,D) : \max \{ \#(E(f)) : f \in K \} \leq N} \left\{ \sup_{f \in K} \text{dist}(D E f, f) \right\}$$

Kolmogorov-Entropie: $H_\epsilon(K), := \lceil \log_2 N_\epsilon(K) \rceil$

$$N_\epsilon(K) := \min_{f_i \in K} \{ N : K \subset \bigcup_{i=1}^N K_\epsilon(f_i) \}$$

$$\rightsquigarrow \min \{ N : d_N(K) \leq \epsilon \} \geq H_\epsilon(K)$$



Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist
Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$

Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\|f\|_{L_p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$)

Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\|f\|_{L_p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$)

$$K = \circ W^{\textcolor{red}{s}}(L_{\textcolor{red}{q}}),$$

Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\|f\|_{L_p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$)

$$K = \circ W^s(L_q), \quad \frac{1}{q} < \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$$

Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\|f\|_{L_p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$)

$$K = \circ W^s(L_q), \quad \frac{1}{q} < \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$$

Mathematische Konzepte:

- Norm-Äquivalenzen

Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\|f\|_{L_p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$)

$$K = \circ W^s(L_q), \quad \frac{1}{q} < \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$$

Mathematische Konzepte:

- Norm-Äquivalenzen – Funktionen sind auch nur Folgen

Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\|f\|_{L_p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$)

$$K = \circ W^s(L_q), \quad \frac{1}{q} < \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$$

Mathematische Konzepte:

- Norm-Äquivalenzen – Funktionen sind auch nur Folgen

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \psi_\lambda \right\|_{W^s(L_p)} \sim \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda|^p}$$

Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\|f\|_{L_p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$)

$$K = \circ W^s(L_q), \quad \frac{1}{q} < \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$$

Mathematische Konzepte:

- Norm-Äquivalenzen – Funktionen sind auch nur Folgen

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \psi_\lambda \right\|_{W^s(L_p)} \sim \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda|^p \underbrace{\|\psi_\lambda\|_{W^s(L_p)}^p}_{\text{Norm-Äquivalenz}}}$$

Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\|f\|_{L_p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$)

$$K = \circ W^s(L_q), \quad \frac{1}{q} < \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$$

Mathematische Konzepte:

- Norm-Äquivalenzen – Funktionen sind auch nur Folgen

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \psi_\lambda \right\|_{W^s(L_p)} \sim \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda|^p \underbrace{\|\psi_\lambda\|_{W^s(L_p)}^p}_{2^{pj(\lambda)(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \right)^{1/p}$$

Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\|f\|_{L_p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$)

$$K = \circ W^s(L_q), \quad \frac{1}{q} < \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$$

Mathematische Konzepte:

- Norm-Äquivalenzen – Funktionen sind auch nur Folgen

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \psi_\lambda \right\|_{W^s(L_p)} \sim \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda|^p \underbrace{\|\psi_\lambda\|_{W^s(L_p)}^p}_{2^{pj(\lambda)(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \right)^{1/p} = \left\| (f_\lambda \|\psi_\lambda\|_{W^s(L_p)})_\lambda \right\|_{\ell_p}$$

Theorem: (A. Cohen, W.D., I. Daubechies, R. DeVore) Obiger Kodierer ist Entropie-optimal für $X = L_p$, $0 < p \leq \infty$ ($\|f\|_{L_p} = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$)

$$K = \circ W^s(L_q), \quad \frac{1}{q} < \frac{s}{d} + \frac{1}{p}$$

Mathematische Konzepte:

- Norm-Äquivalenzen – Funktionen sind auch nur Folgen

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \psi_\lambda \right\|_{W^s(L_p)} \sim \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda|^p \underbrace{\|\psi_\lambda\|_{W^s(L_p)}^p}_{2^{pj(\lambda)(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \right)^{1/p} = \left\| (f_\lambda \|\psi_\lambda\|_{W^s(L_p)})_\lambda \right\|_{\ell_p}$$

- N -Term-Approximation, Baum-Approximation

→

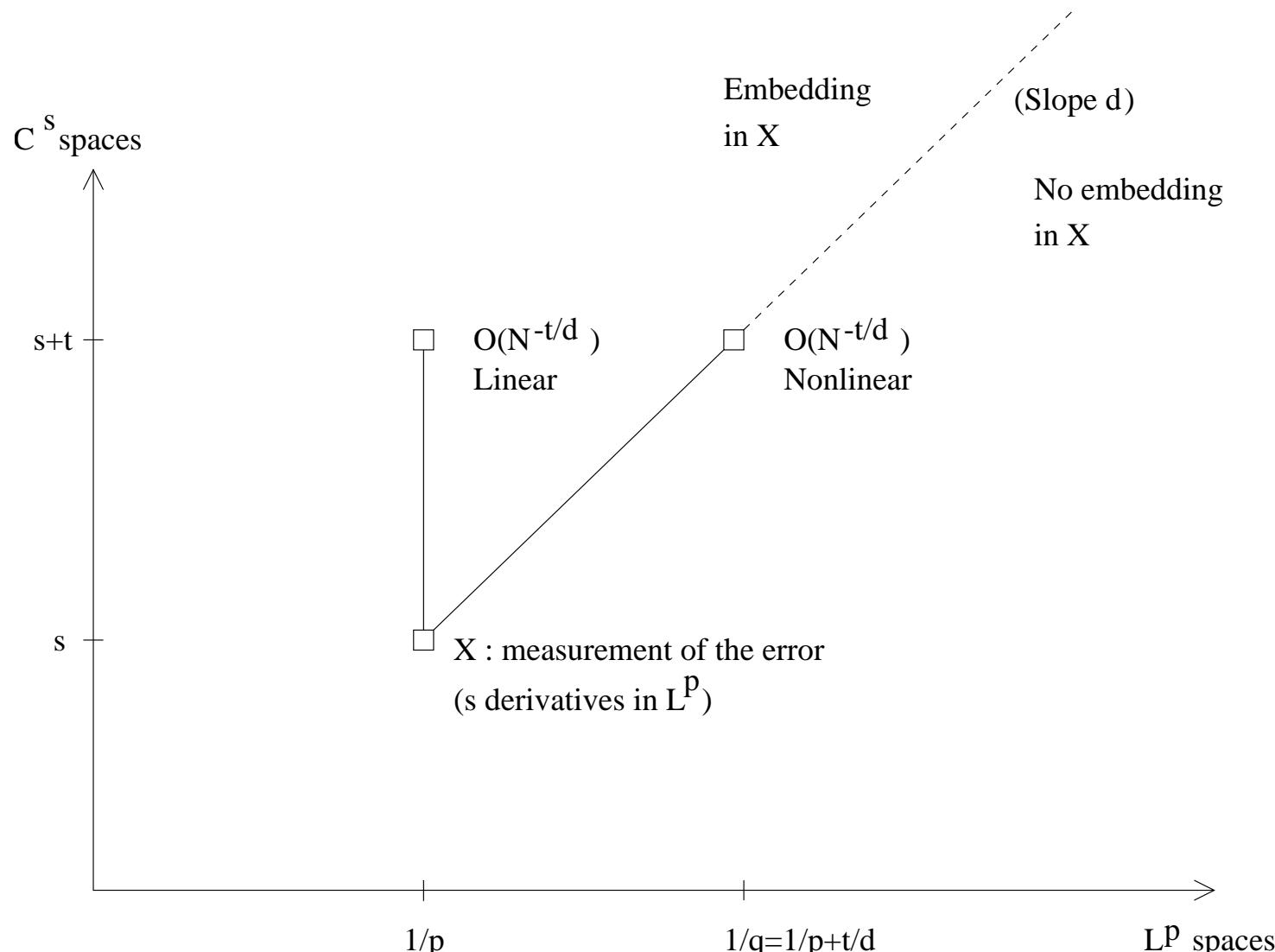


Abbildung 2: Topographie von Funktionenräumen

Numerische Simulation

- Physikalisch/technischer Prozess

Numerische Simulation

- Physikalisch/technischer Prozess (Bilanzgesetze für Masse, Impuls und Energie)

Numerische Simulation

- Physikalisch/technischer Prozess (Bilanzgesetze für Masse, Impuls und Energie) \leadsto **Mathematisches Modell** (Differentialgleichungen)

Numerische Simulation

- Physikalisch/technischer Prozess (Bilanzgesetze für Masse, Impuls und Energie) \leadsto **Mathematisches Modell** (Differentialgleichungen)
Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen?

Numerische Simulation

- Physikalisch/technischer Prozess (Bilanzgesetze für Masse, Impuls und Energie) \leadsto **Mathematisches Modell** (Differentialgleichungen)
Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen?
- **Diskretisierung:**

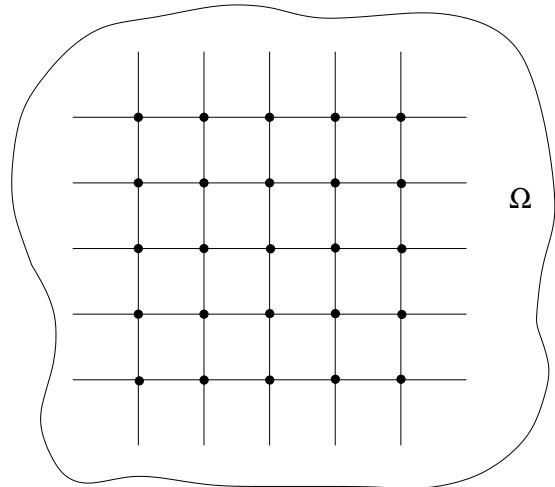
Numerische Simulation

- Physikalisch/technischer Prozess (Bilanzgesetze für Masse, Impuls und Energie) \leadsto **Mathematisches Modell** (Differentialgleichungen)
Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen?
- **Diskretisierung:** kontinuierliches Problem \rightarrow **riesiges** Gleichungssystem

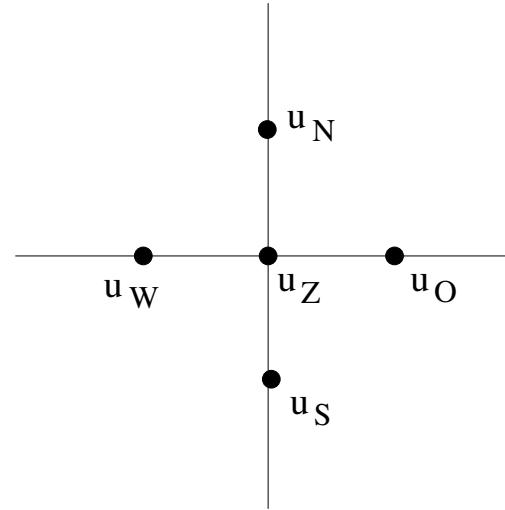
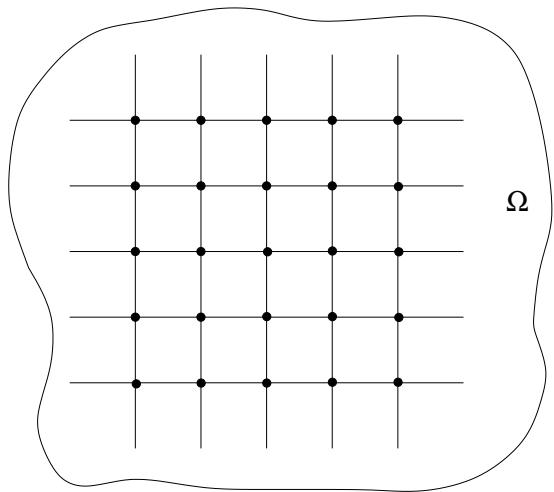
Numerische Simulation

- Physikalisch/technischer Prozess (Bilanzgesetze für Masse, Impuls und Energie) \leadsto **Mathematisches Modell** (Differentialgleichungen)
Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen?
- **Diskretisierung:** kontinuierliches Problem \rightarrow **riesiges** Gleichungssystem
- Effiziente Lösung dieser Gleichungssysteme "**in endlicher Zeit**"

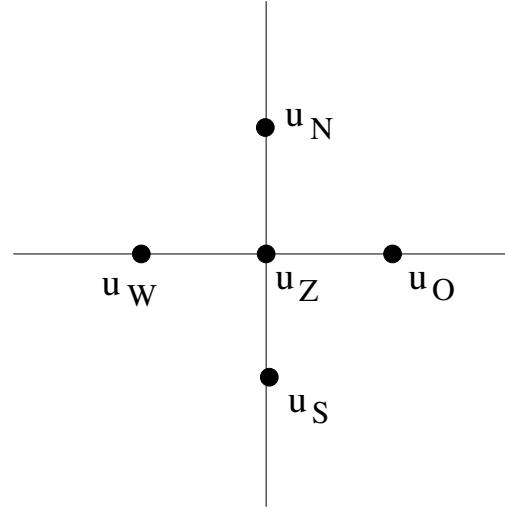
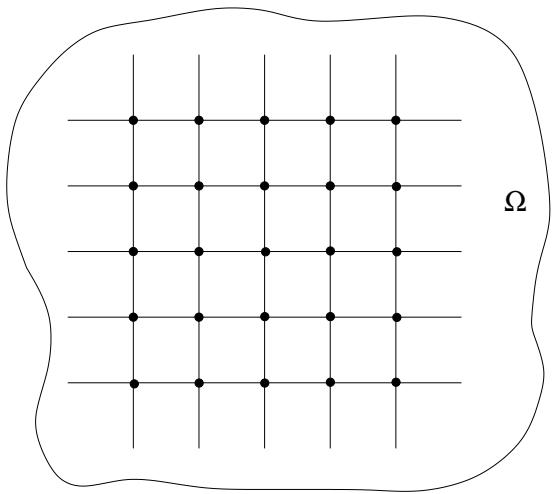
Ein Modell-Problem: $-(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$



Ein Modell-Problem: $-(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$

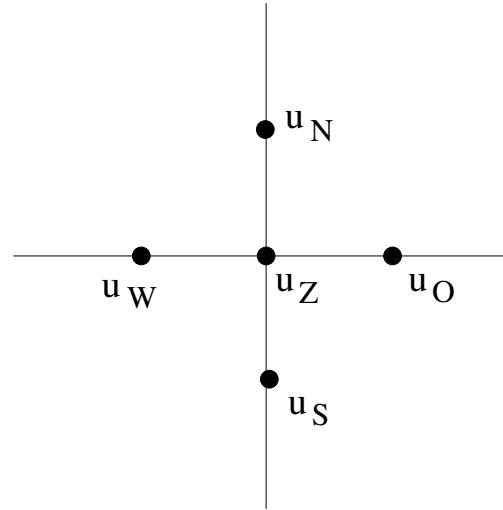
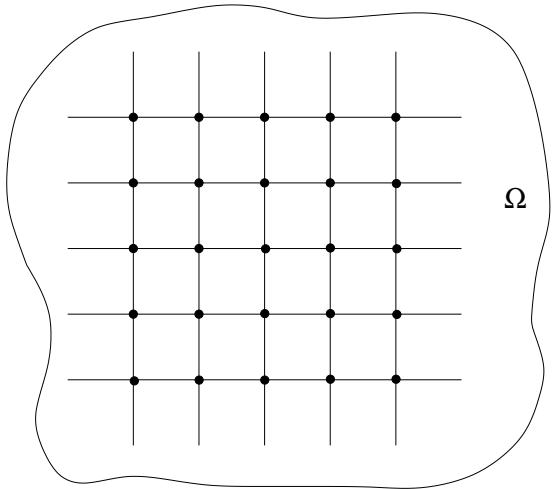


Ein Modell-Problem: $-(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$



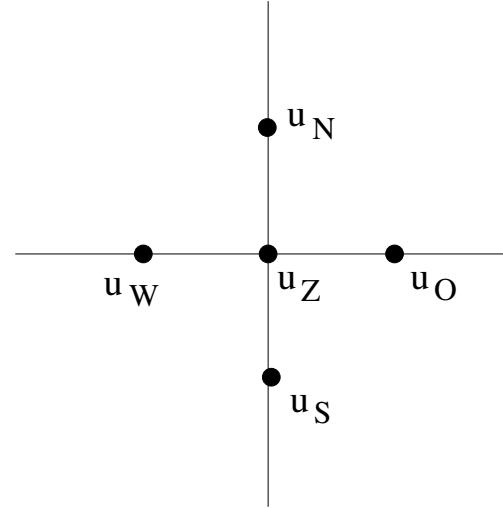
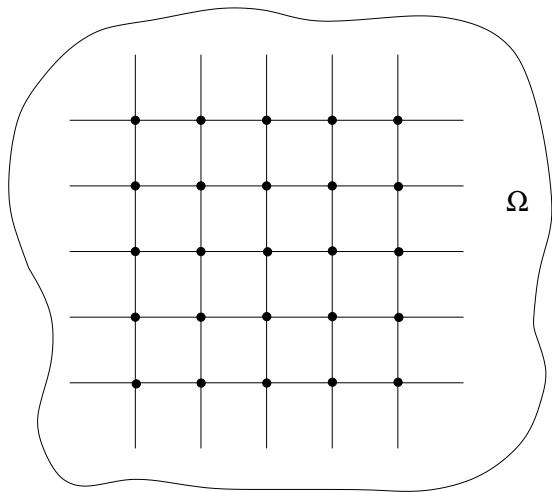
$$u(z) \approx u_z$$

Ein Modell-Problem: $-(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$



$$u(z) \approx u_z - \frac{1}{h^2} (4u_{\textcolor{red}{z}} - u_{\textcolor{red}{N}} - u_{\textcolor{red}{S}} - u_{\textcolor{red}{W}} - u_{\textcolor{red}{O}}) = f(\textcolor{red}{z}), \quad z \in \Omega_h$$

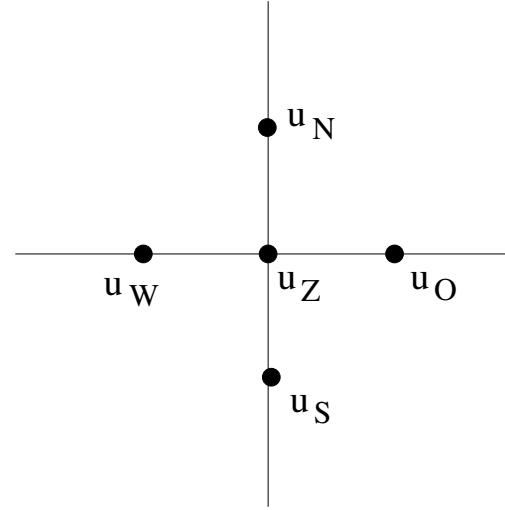
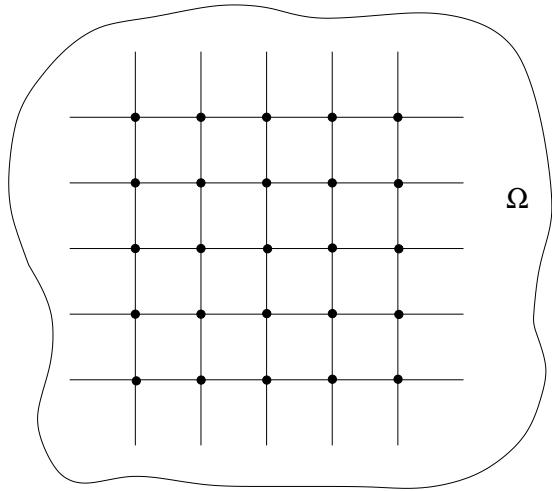
Ein Modell-Problem: $-(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$



$$u(z) \approx u_z - \frac{1}{h^2} (4u_z - u_N - u_S - u_W - u_O) = f(z), \quad z \in \Omega_h$$

- Direkte Verfahren:

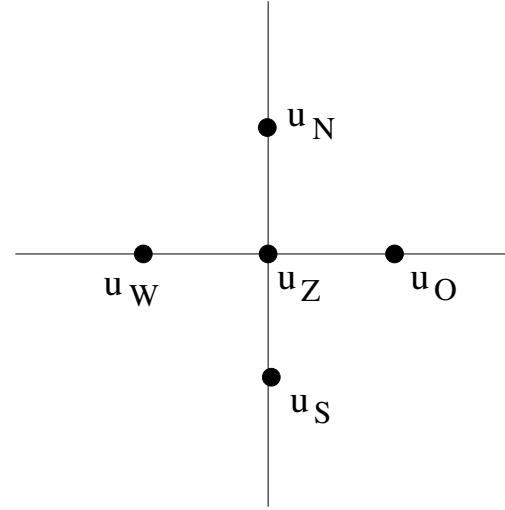
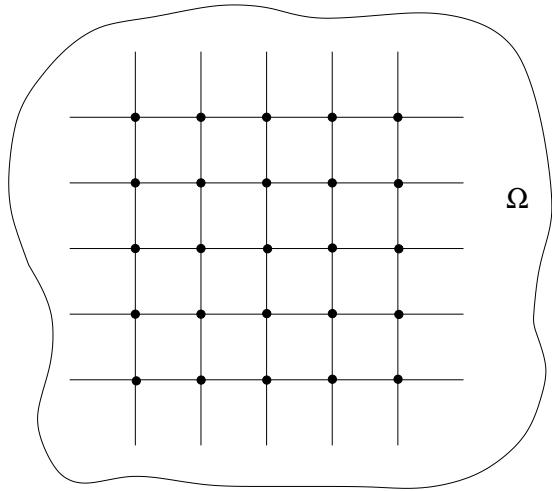
Ein Modell-Problem: $-(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$



$$u(z) \approx u_z - \frac{1}{h^2} (4u_z - u_N - u_S - u_W - u_O) = f(z), \quad z \in \Omega_h$$

- Direkte Verfahren: Komplexität/Speicher $\sim N^\alpha$, $\alpha > 1$

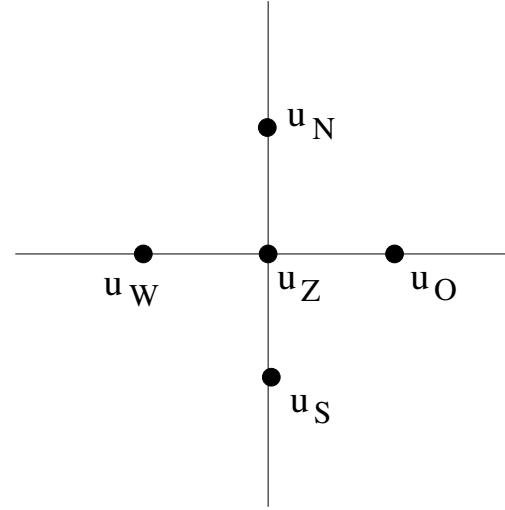
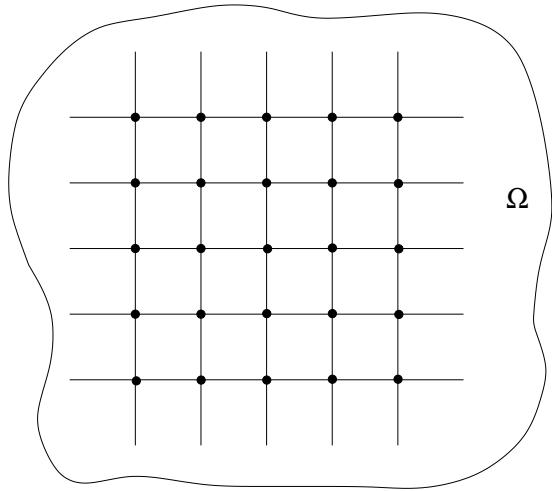
Ein Modell-Problem: $-(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$



$$u(z) \approx u_z - \frac{1}{h^2} (4u_z - u_N - u_S - u_W - u_O) = f(z), \quad z \in \Omega_h$$

- Direkte Verfahren: Komplexität/Speicher $\sim N^\alpha$, $\alpha > 1$
- Iterative Verfahren:

Ein Modell-Problem: $-(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$



$$u(z) \approx u_z - \frac{1}{h^2} (4u_z - u_N - u_S - u_W - u_O) = f(z), \quad z \in \Omega_h$$

- Direkte Verfahren: Komplexität/Speicher $\sim N^\alpha$, $\alpha > 1$
- Iterative Verfahren: Wachsende Kondition $\sim h^{-2}$

Eine andere Sicht

Ansatz: $u = \sum_{\lambda} u_{\lambda} \psi_{\lambda}$

Eine andere Sicht

Ansatz: $u = \sum_{\lambda} u_{\lambda} \psi_{\lambda}$ $u_{\lambda} = ???$

$$F(u) = f \iff \int_{\Omega} \psi_{\lambda} F(u) dx = \int_{\Omega} \psi_{\lambda} f dx$$

Eine andere Sicht

Ansatz: $u = \sum_{\lambda} u_{\lambda} \psi_{\lambda}$ $u_{\lambda} = ???$

$$F(u) = f \iff \int_{\Omega} \psi_{\lambda} F(u) dx = \int_{\Omega} \psi_{\lambda} f dx =: \langle \psi_{\lambda}, f \rangle \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Eine andere Sicht

Ansatz: $u = \sum_{\lambda} u_{\lambda} \psi_{\lambda}$ $u_{\lambda} = ???$

$$F(u) = f \iff \int_{\Omega} \psi_{\lambda} F(u) dx = \int_{\Omega} \psi_{\lambda} f dx =: \langle \psi_{\lambda}, f \rangle \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\underbrace{(\langle \psi_{\lambda}, F(u) \rangle)_{\lambda \in \Lambda}}_{\mathbf{F}(u)} = \underbrace{(\langle \psi_{\lambda}, f \rangle)_{\lambda \in \Lambda}}_{=\mathbf{f}}$$

Eine andere Sicht

Ansatz: $u = \sum_{\lambda} u_{\lambda} \psi_{\lambda}$ $u_{\lambda} = ???$

$$F(u) = f \iff \int_{\Omega} \psi_{\lambda} F(u) dx = \int_{\Omega} \psi_{\lambda} f dx =: \langle \psi_{\lambda}, f \rangle \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\underbrace{(\langle \psi_{\lambda}, F(u) \rangle)_{\lambda \in \Lambda}}_{\mathbf{F}(u)} = \underbrace{(\langle \psi_{\lambda}, f \rangle)_{\lambda \in \Lambda}}_{= \mathbf{f}}$$

Transformiertes System “lebt” in ℓ_2

Norm-Äquivalenzen \rightsquigarrow Separation verschiedener Längenskalen – Kondition

Eine andere Sicht

Ansatz: $u = \sum_{\lambda} u_{\lambda} \psi_{\lambda}$ $u_{\lambda} = ???$

$$F(u) = f \iff \int_{\Omega} \psi_{\lambda} F(u) dx = \int_{\Omega} \psi_{\lambda} f dx =: \langle \psi_{\lambda}, f \rangle \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\underbrace{(\langle \psi_{\lambda}, F(u) \rangle)_{\lambda \in \Lambda}}_{\mathbf{F}(u)} = \underbrace{(\langle \psi_{\lambda}, f \rangle)_{\lambda \in \Lambda}}_{=\mathbf{f}}$$

Transformiertes System “lebt” in ℓ_2

Norm-Äquivalenzen \rightsquigarrow Separation verschiedener Längenskalen – Kondition
 Verschwindende Momente \rightsquigarrow sparse Darstellungen - schnelle Numerik

Ein neues algorithmisches Konzept (A. Cohen, W.D., R. DeVore)

- Korrekt-gestelltes Variationsproblem: $F(u) = f$ resp. $\langle v, F(u) \rangle = \langle v, f \rangle$,
 $\forall v \in \mathcal{H}$

Ein neues algorithmisches Konzept (A. Cohen, W.D., R. DeVore)

- Korrekt-gestelltes Variationsproblem: $F(u) = f$ resp. $\langle v, F(u) \rangle = \langle v, f \rangle$,
 $\forall v \in \mathcal{H}, F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ topologischer Isomorphismus

Ein neues algorithmisches Konzept (A. Cohen, W.D., R. DeVore)

- Korrekt-gestelltes Variationsproblem: $F(u) = f$ resp. $\langle v, F(u) \rangle = \langle v, f \rangle$,
 $\forall v \in \mathcal{H}, \quad F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ topologischer Isomorphismus
- Wavelet-Basis für \mathcal{H} (Normäquivalenzen) \leadsto \longleftrightarrow

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{korrekt gestellt in } \ell_2$$

Ein neues algorithmisches Konzept (A. Cohen, W.D., R. DeVore)

- Korrekt-gestelltes Variationsproblem: $F(u) = f$ resp. $\langle v, F(u) \rangle = \langle v, f \rangle$,
 $\forall v \in \mathcal{H}, \quad F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ topologischer Isomorphismus
- Wavelet-Basis für \mathcal{H} (Normäquivalenzen) \leadsto \longleftrightarrow

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{korrekt gestellt in } \ell_2$$

- (Idealisierte) Iteration

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathbf{C}_n(\mathbf{f} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{n+1}\|_{\ell_2} \leq \rho \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^n\|_{\ell_2}$$

Ein neues algorithmisches Konzept (A. Cohen, W.D., R. DeVore)

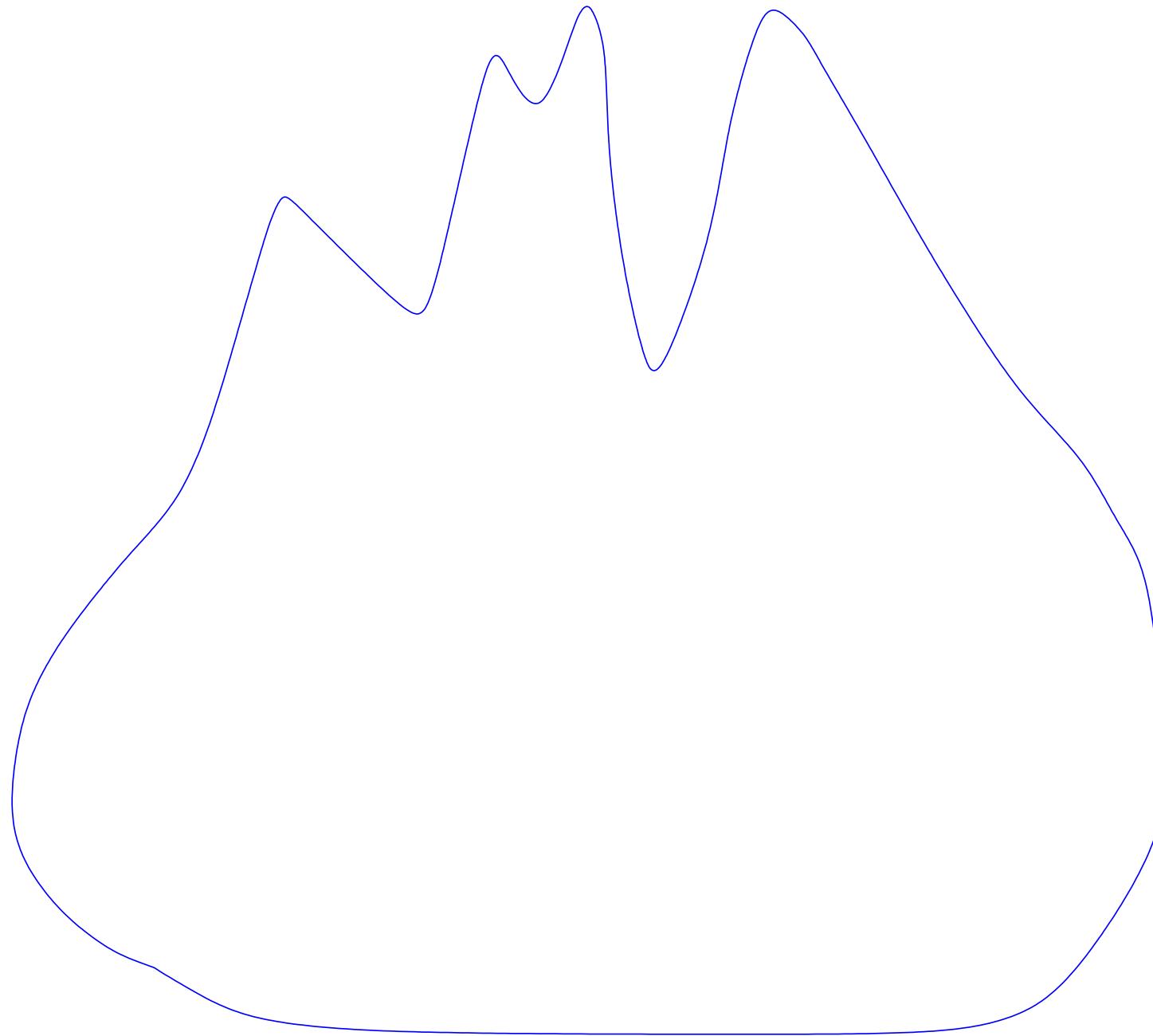
- Korrekt-gestelltes Variationsproblem: $F(u) = f$ resp. $\langle v, F(u) \rangle = \langle v, f \rangle$,
 $\forall v \in \mathcal{H}, F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ topologischer Isomorphismus
- Wavelet-Basis für \mathcal{H} (Normäquivalenzen) \rightsquigarrow \longleftrightarrow

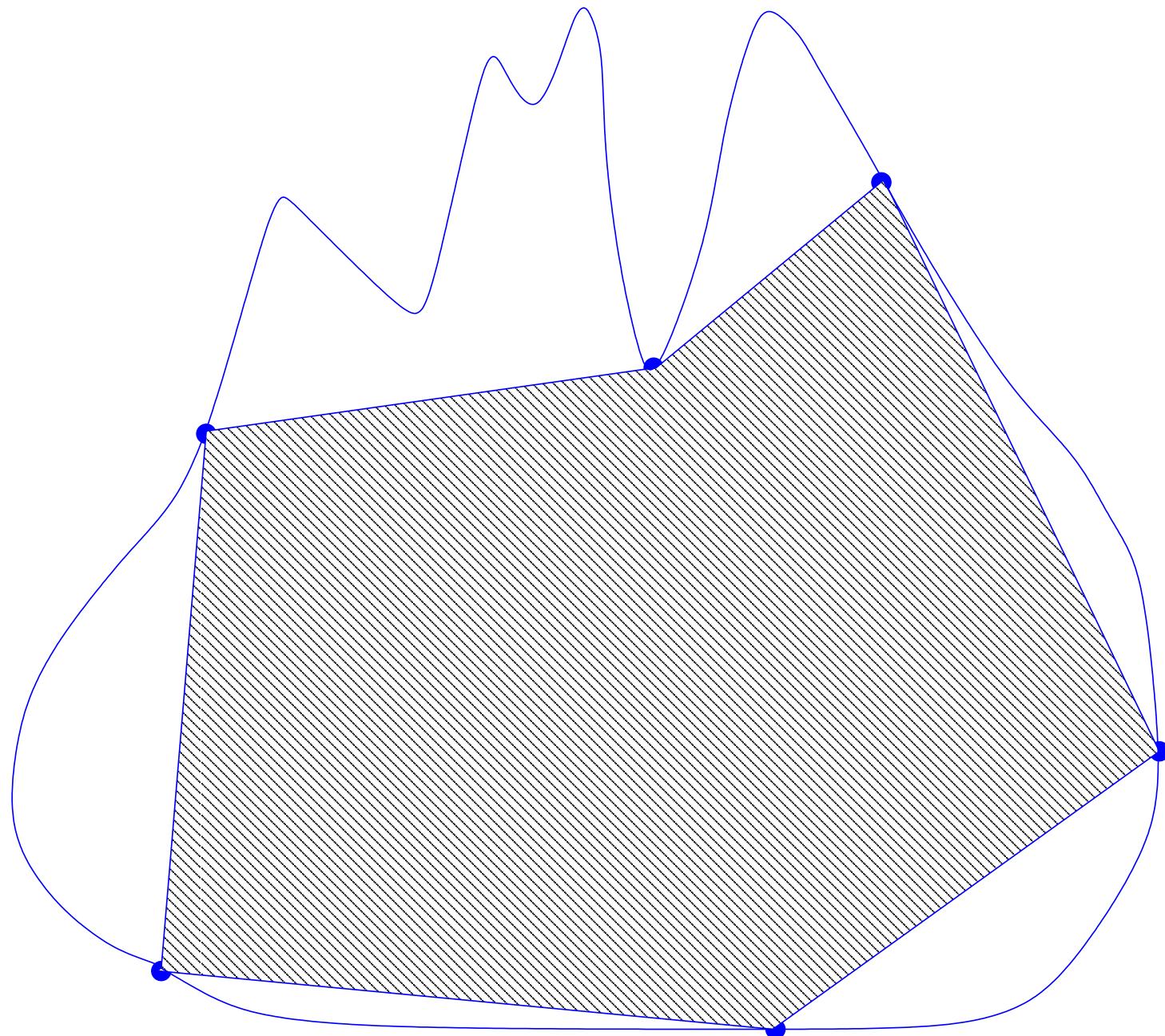
$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{korrekt gestellt in } \ell_2$$

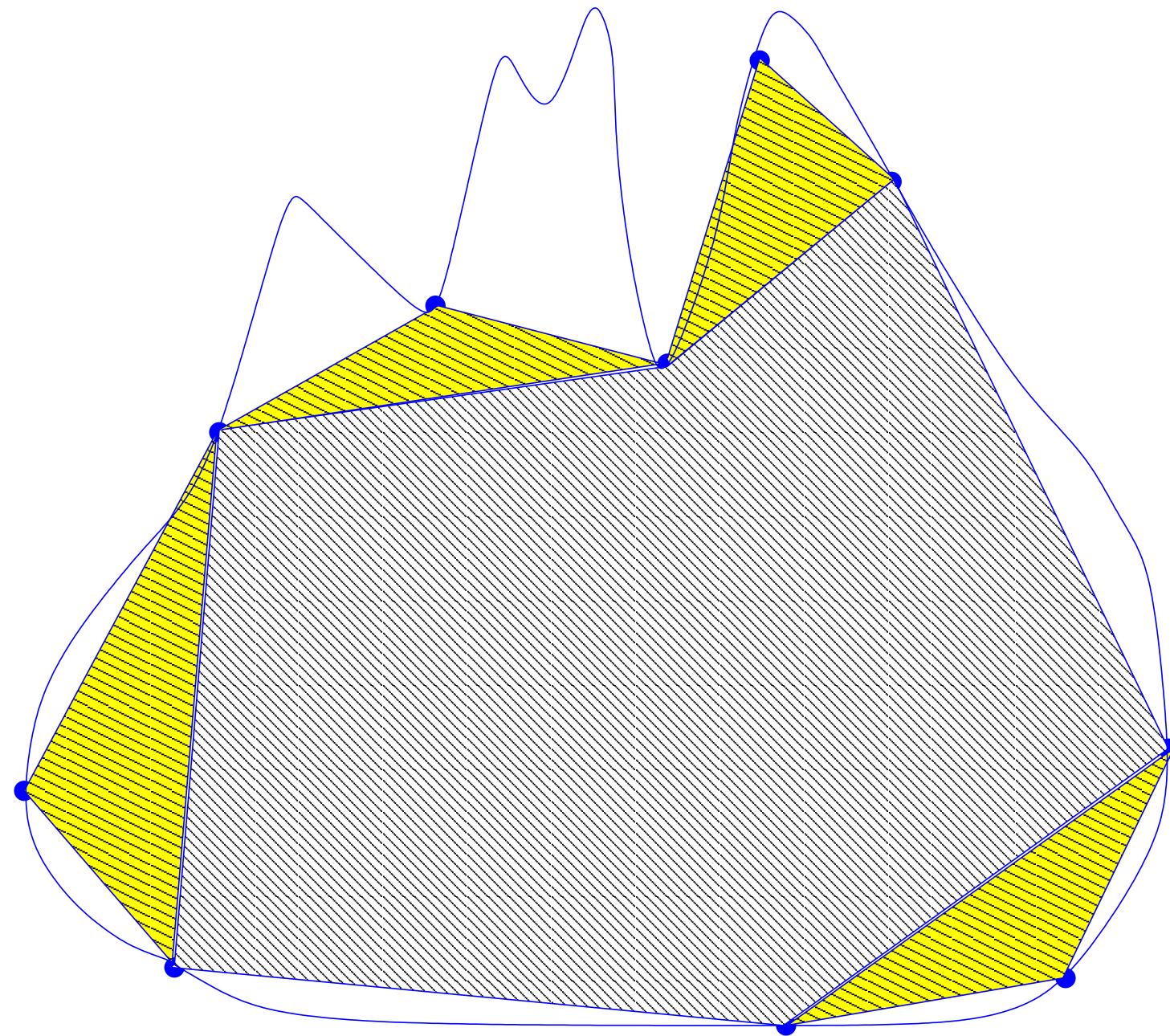
- (Idealisierte) Iteration

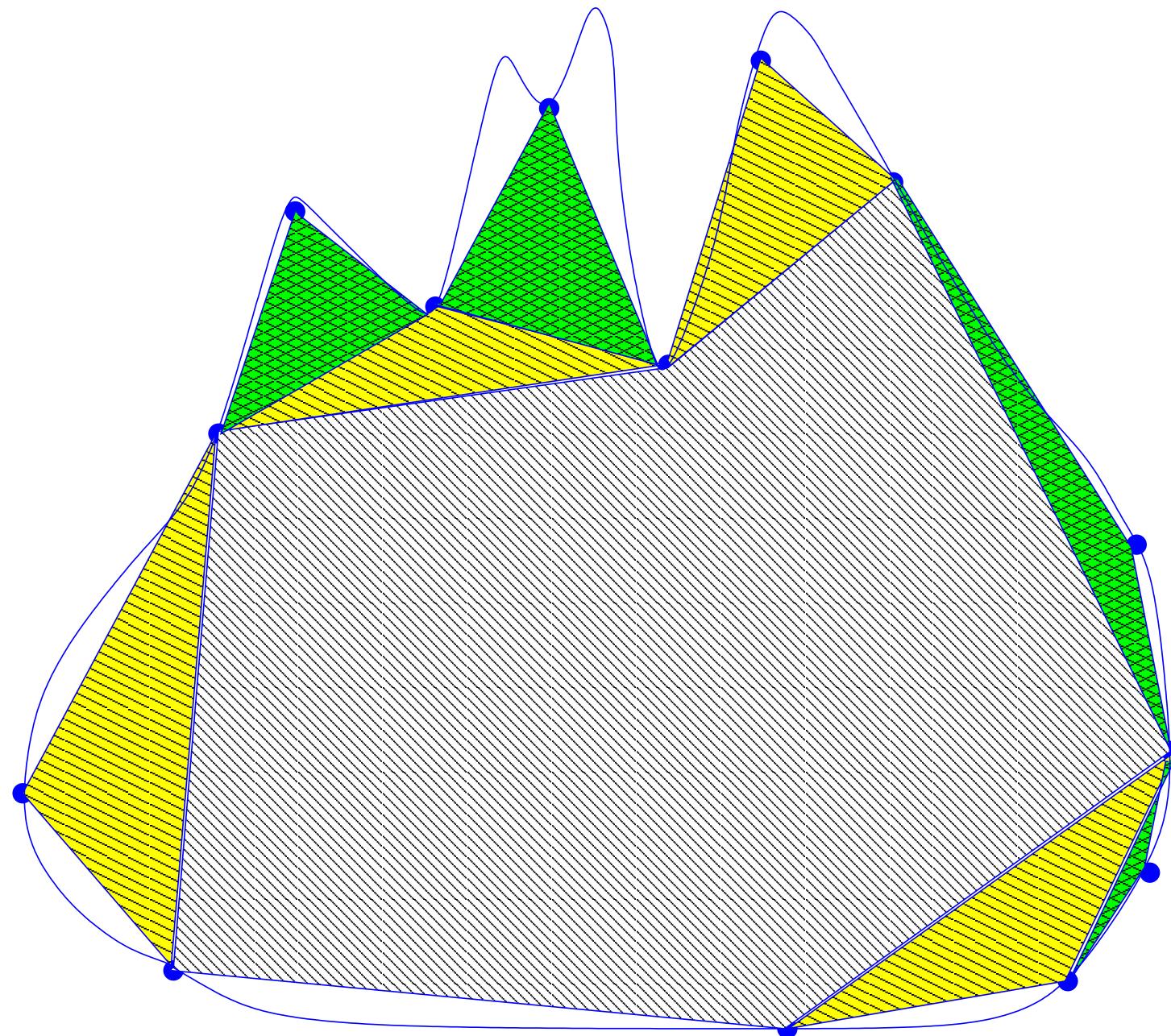
$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathbf{C}_n(\mathbf{f} - \mathbf{F}(\mathbf{u}^n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{n+1}\|_{\ell_2} \leq \rho \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^n\|_{\ell_2}$$

- Adaptive Auswertung von $\mathbf{F}(\mathbf{u}^n)$ (CP) \rightsquigarrow asympt. optimale Komplexität
(Verschwindende Momente)









“Skaleninteraktion” unter Nichtlinearitäten

Theorem: F habe p -tes Potenzwachstum

“Skaleninteraktion” unter Nichtlinearitäten

Theorem: F habe p -tes Potenzwachstum z.B. $F(u) = -\Delta u + u^3$,
 $F(u) = -\Delta u + u^T \nabla u$

“Skaleninteraktion” unter Nichtlinearitäten

Theorem: F habe p -tes Potenzwachstum z.B. $F(u) = -\Delta u + u^3$,
 $F(u) = -\Delta u + u^T \nabla u \rightsquigarrow$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{v})_\lambda| \lesssim \sup_{S_\mu \cap S_\lambda \neq \emptyset} |v_\mu| 2^{-\gamma(|\lambda|-|\mu|)},$$

“Skaleninteraktion” unter Nichtlinearitäten

Theorem: F habe p -tes Potenzwachstum z.B. $F(u) = -\Delta u + u^3$,
 $F(u) = -\Delta u + u^T \nabla u \rightsquigarrow$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{v})_\lambda| \lesssim \sup_{S_\mu \cap S_\lambda \neq \emptyset} |v_\mu| 2^{-\gamma(|\lambda|-|\mu|)}, \quad (\gamma = t + r + d/2)$$

“Skaleninteraktion” unter Nichtlinearitäten

Theorem: F habe p -tes Potenzwachstum z.B. $F(u) = -\Delta u + u^3$,
 $F(u) = -\Delta u + u^T \nabla u \rightsquigarrow$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{v})_\lambda| \lesssim \sup_{S_\mu \cap S_\lambda \neq \emptyset} |v_\mu| 2^{-\gamma(|\lambda|-|\mu|)}, \quad (\gamma = t + r + d/2) \rightsquigarrow$$

“Skaleninteraktion” unter Nichtlinearitäten

Theorem: F habe p -tes Potenzwachstum z.B. $F(u) = -\Delta u + u^3$,
 $F(u) = -\Delta u + u^T \nabla u \rightsquigarrow$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{v})_\lambda| \lesssim \sup_{S_\mu \cap S_\lambda \neq \emptyset} |v_\mu| 2^{-\gamma(|\lambda|-|\mu|)}, \quad (\gamma = t + r + d/2) \rightsquigarrow$$

A-posteriori Information



$$\mathcal{T}_\epsilon(\mathbf{v}) \text{ s.d. } \|\mathbf{v} - \mathbf{v}|_{\mathcal{T}_\epsilon(\mathbf{v})}\|_{\ell_2} \leq \epsilon \rightsquigarrow$$

“Skaleninteraktion” unter Nichtlinearitäten

Theorem: F habe p -tes Potenzwachstum z.B. $F(u) = -\Delta u + u^3$,
 $F(u) = -\Delta u + u^T \nabla u \rightsquigarrow$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{v})_\lambda| \lesssim \sup_{S_\mu \cap S_\lambda \neq \emptyset} |v_\mu| 2^{-\gamma(|\lambda|-|\mu|)}, \quad (\gamma = t + r + d/2) \rightsquigarrow$$

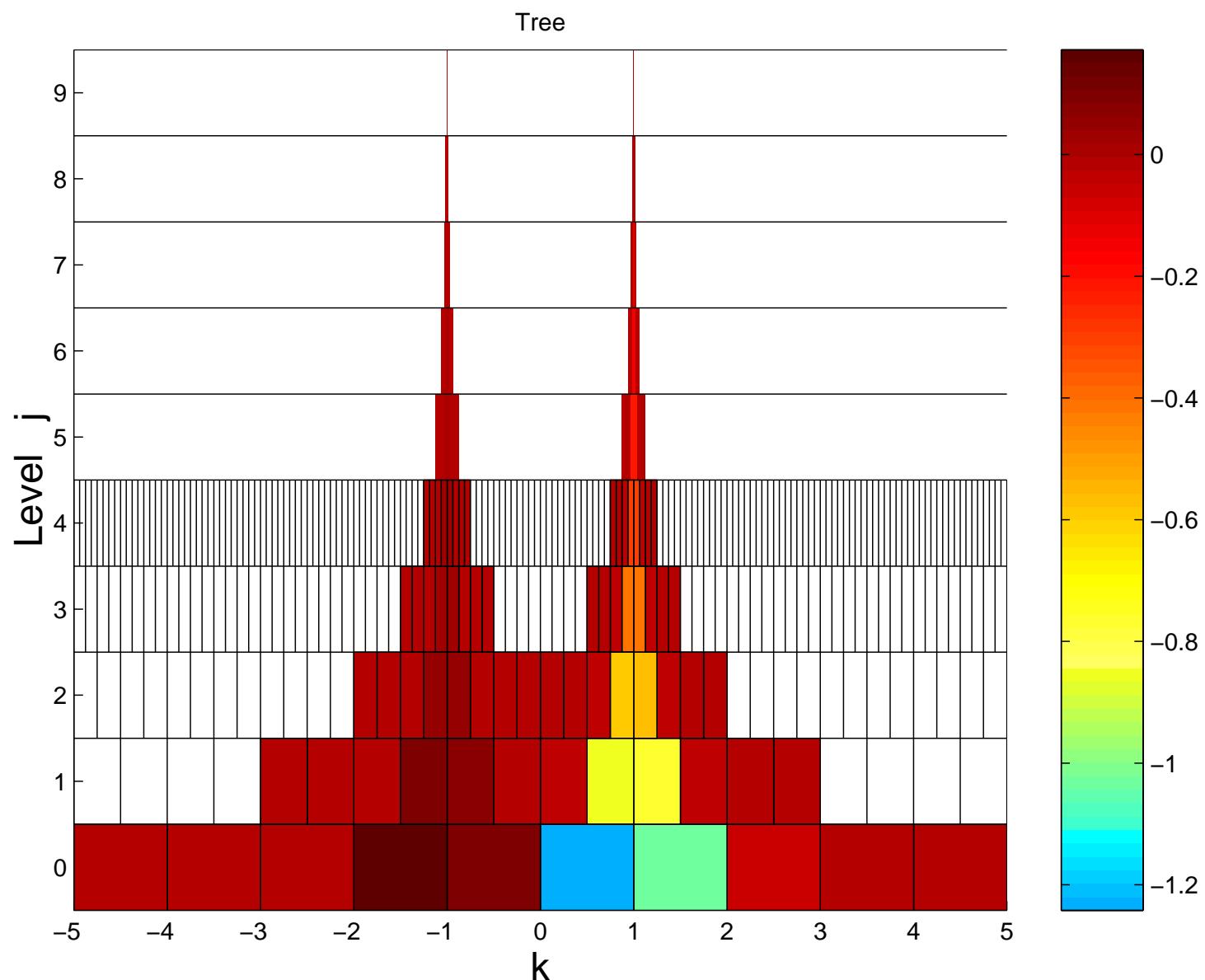
A-posteriori Information

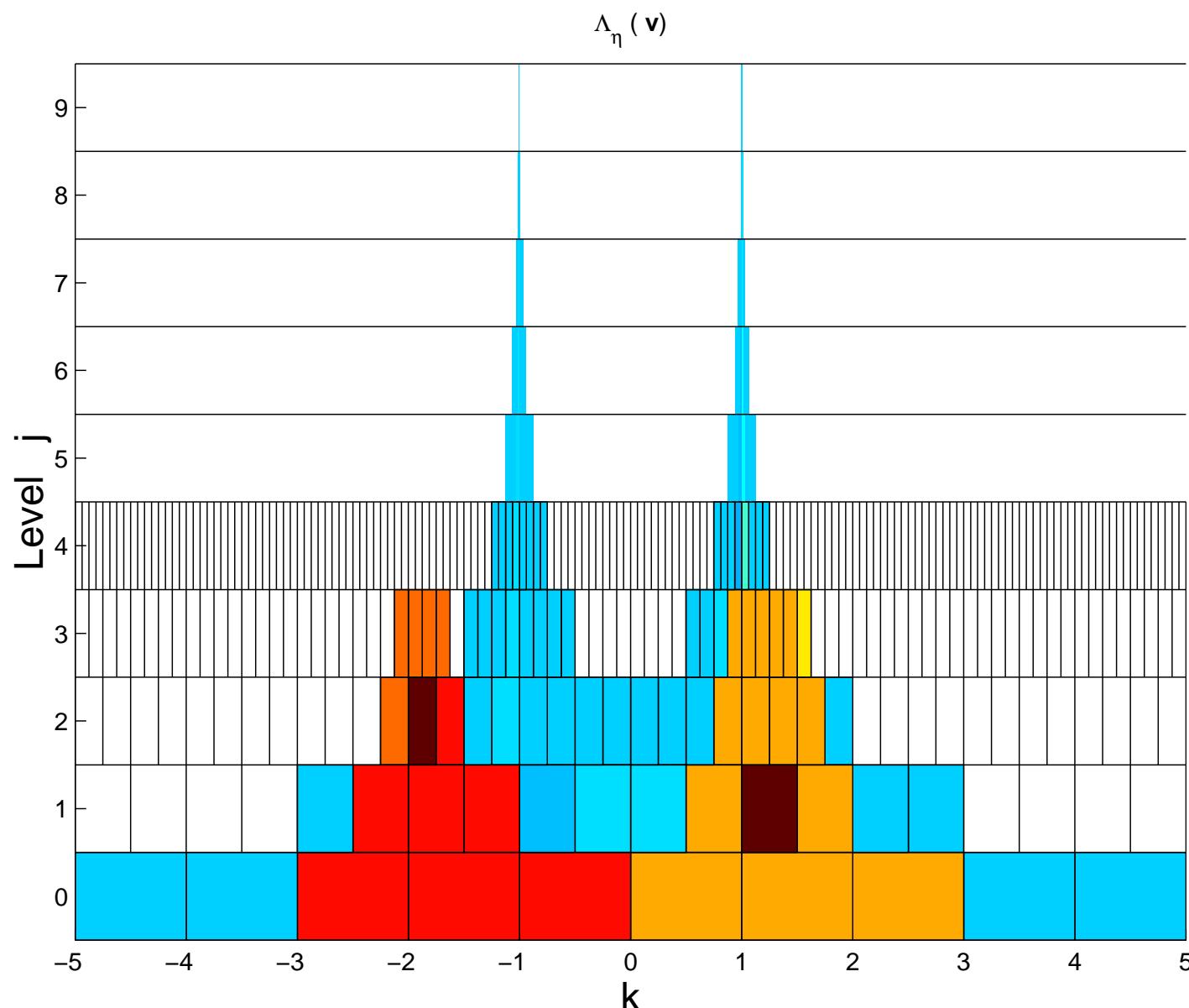


$$\mathcal{T}_\epsilon(\mathbf{v}) \text{ s.d. } \|\mathbf{v} - \mathbf{v}|_{\mathcal{T}_\epsilon(\mathbf{v})}\|_{\ell_2} \leq \epsilon \rightsquigarrow$$

(asympt. opt.) Prädiktion

$$\mathcal{T}_\epsilon(\mathbf{F}(\mathbf{v})) \text{ s.d. } \|\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{v})|_{\mathcal{T}_\epsilon(\mathbf{F}(\mathbf{v}))}\|_{\ell_2} \leq \epsilon$$





Hauptresultat: (A. Cohen, W.D., R. DeVore)

Wenn immer die unbekannte Lösung u von $F(u) = f$ (bei vollständiger Information) über N Freiheitsgrade mit Genauigkeit $O(N^{-s})$ (für ein $s > 0$) approximiert werden kann

Hauptresultat: (A. Cohen, W.D., R. DeVore)

Wenn immer die unbekannte Lösung u von $F(u) = f$ (bei vollständiger Information) über N Freiheitsgrade mit Genauigkeit $O(N^{-s})$ (für ein $s > 0$) approximiert werden kann – Genauigkeit $\epsilon \leftrightarrow$ Aufwand $\epsilon^{-1/s}$

Hauptresultat: (A. Cohen, W.D., R. DeVore)

Wenn immer die unbekannte Lösung u von $F(u) = f$ (bei vollständiger Information) über N Freiheitsgrade mit Genauigkeit $O(N^{-s})$ (für ein $s > 0$) approximiert werden kann – Genauigkeit $\epsilon \leftrightarrow$ Aufwand $\epsilon^{-1/s}$

dann produziert die adaptive Methode für jede Zielgenauigkeit ϵ eine Näherungslösung u_ϵ , so daß

$$\|u - u_\epsilon\| \leq \epsilon$$

gilt,

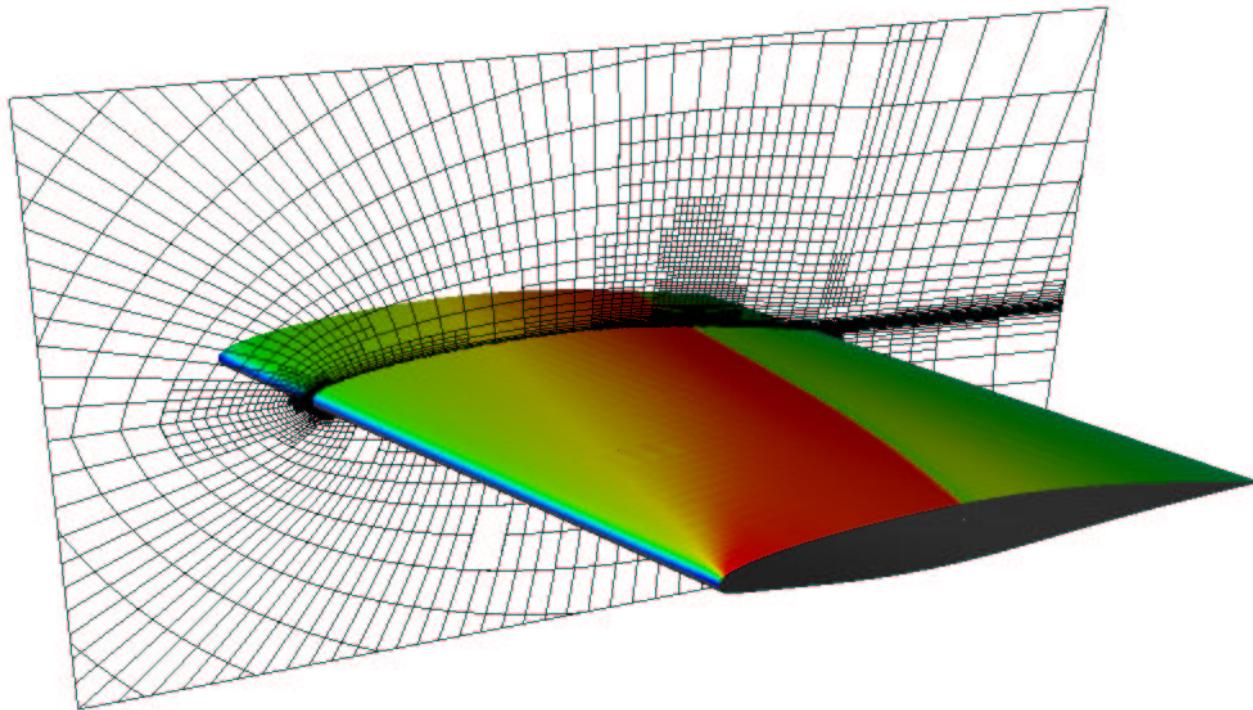
Hauptresultat: (A. Cohen, W.D., R. DeVore)

Wenn immer die unbekannte Lösung u von $F(u) = f$ (bei vollständiger Information) über N Freiheitsgrade mit Genauigkeit $O(N^{-s})$ (für ein $s > 0$) approximiert werden kann – Genauigkeit $\epsilon \leftrightarrow$ Aufwand $\epsilon^{-1/s}$

dann produziert die adaptive Methode für jede Zielgenauigkeit ϵ eine Näherungslösung u_ϵ , so daß

$$\|u - u_\epsilon\| \leq \epsilon$$

gilt, wobei der Rechenaufwand höchstens wie $C\epsilon^{-1/s}$ wächst und C unabhängig von ϵ ist.



Siegfried Müller, Frank Bramkamp (SFB 401, RWTH Aachen, QUADFLOW)

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x F(u) = 0$$

38

$$\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_V\partial_t u dx + \int\limits_{\partial V}(F^c(u) + F^d(u))\cdot n ds dt = 0,$$

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x F(u) = 0$$

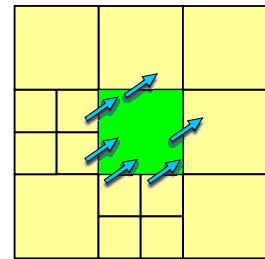
38

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} \int\limits_V \partial_t u dx + \int\limits_{\partial V} (F^c(u) + F^d(u)) \cdot n ds dt = 0, \quad F^c(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v v^T + p I \\ \rho h_{tot} v \end{pmatrix}$$

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x F(u) = 0$$

38

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \partial_t u dx + \int_{\partial V} (F^c(u) + F^d(u)) \cdot n ds dt = 0, \quad F^c(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v v^T + p I \\ \rho h_{tot} v \end{pmatrix}$$



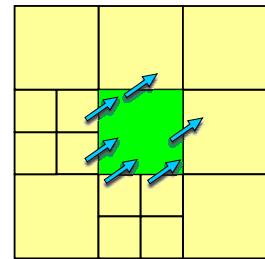
Finite-Volumen Schema:

$$\hat{u}_V(t + \Delta t) = \hat{u}_V(t) + \frac{\Delta t}{|V|} B(t), \quad B(t) \approx \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial V} F_n(u) dx dt$$

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x F(u) = 0$$

38

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \partial_t u dx + \int_{\partial V} (F^c(u) + F^d(u)) \cdot n ds dt = 0, \quad F^c(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v v^T + p I \\ \rho h_{tot} v \end{pmatrix}$$



Finite-Volumen Schema:

$$\hat{u}_V(t + \Delta t) = \hat{u}_V(t) + \frac{\Delta t}{|V|} B(t), \quad B(t) \approx \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial V} F_n(u) dx dt$$

Adaptivität basierend auf Multiskalen-Zerlegung des Strömungsfeldes

Adaptivität basierend auf Multiskalen-Zerlegung des Strömungsfeldes

- Zellmittel \leftrightarrow Pixelwerte

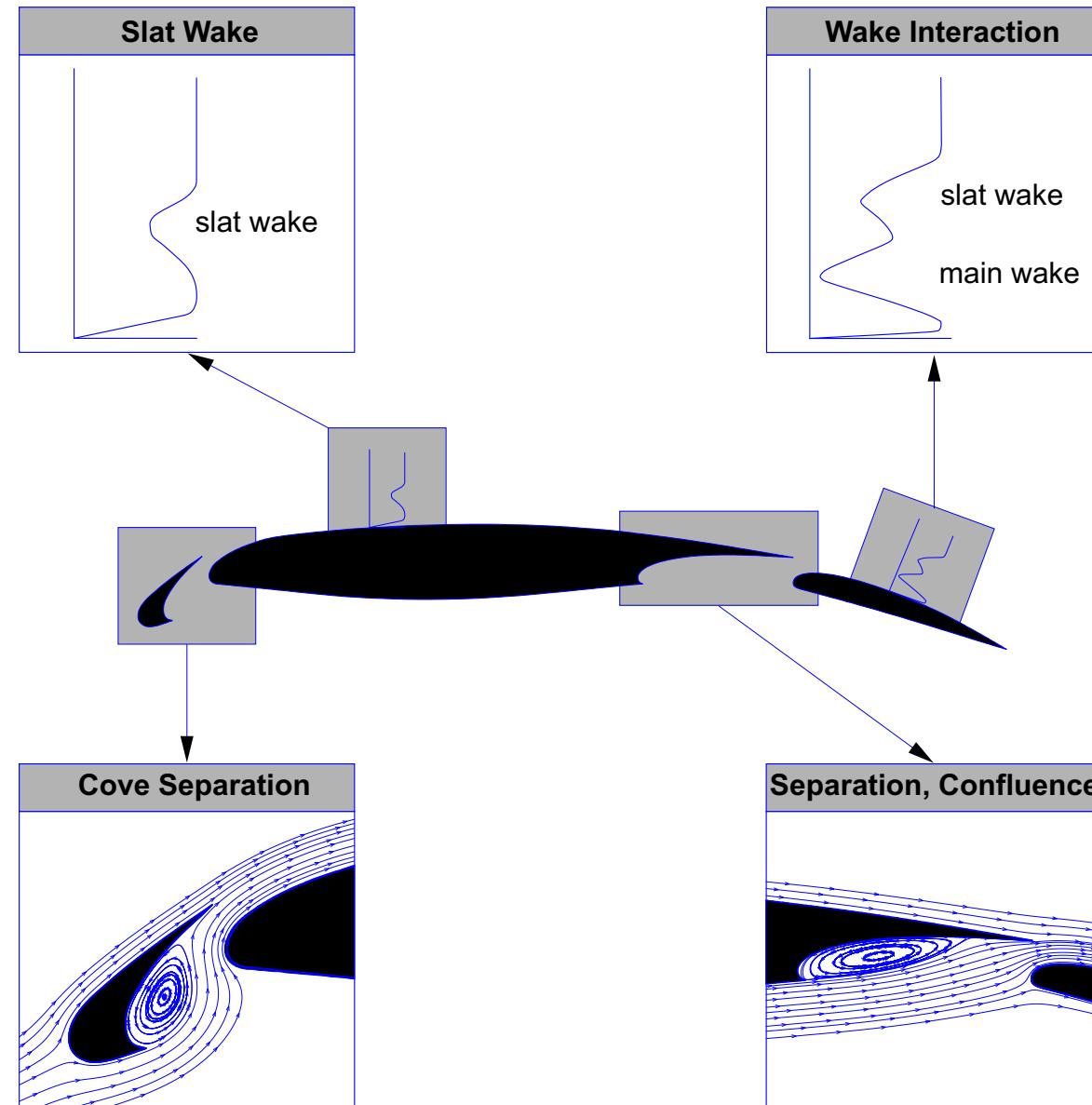
Adaptivität basierend auf Multiskalen-Zerlegung des Strömungsfeldes

- Zellmittel \leftrightarrow Pixelwerte
- Nichtlineare Dynamik \leftrightarrow Multiskalenabschätzungen

←

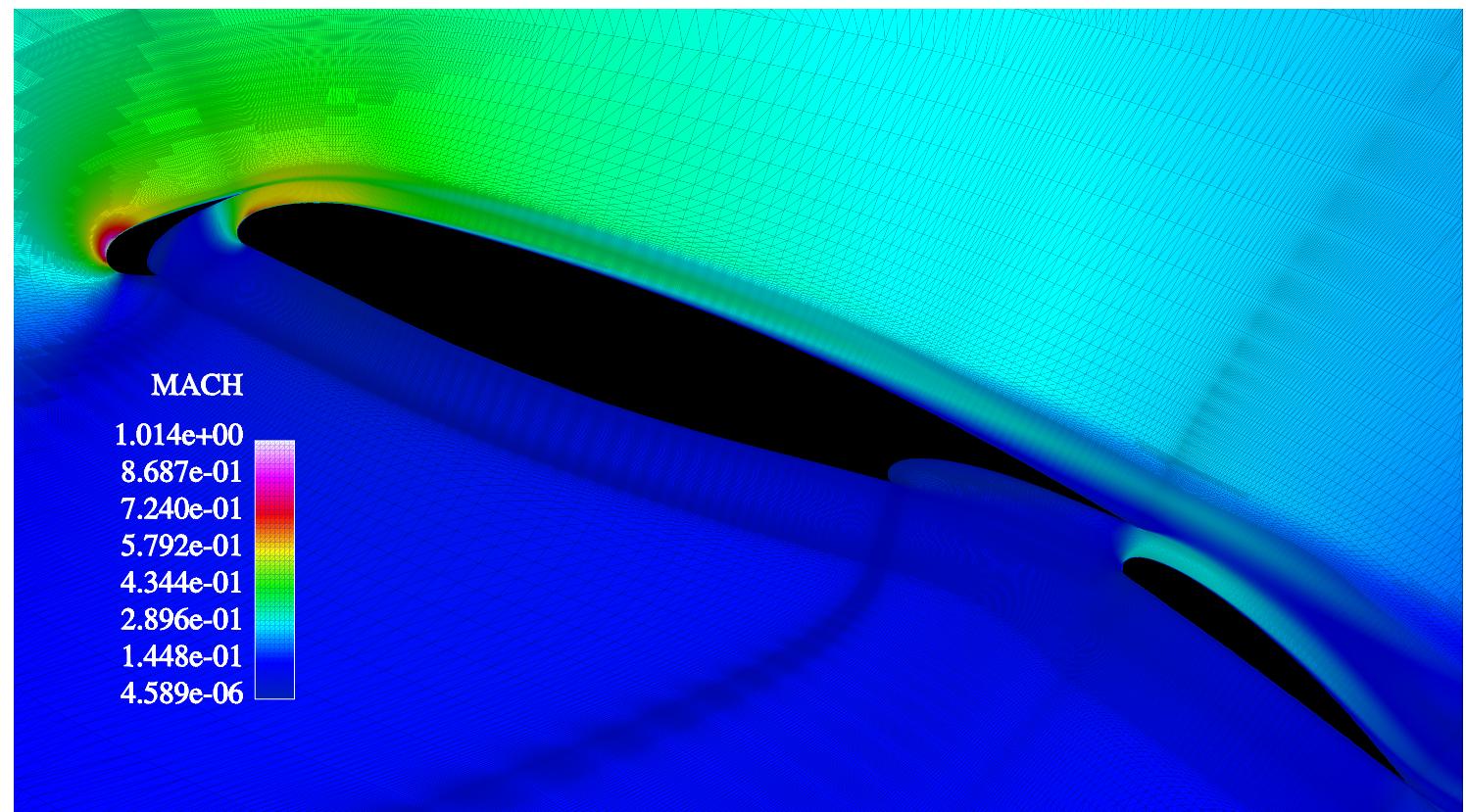
(A. Harten, S. Müller, A. Cohen, O. Kaber, M. Postel, W.D., ...)

BAC 3-11, L1/T2 High Lift Configuration



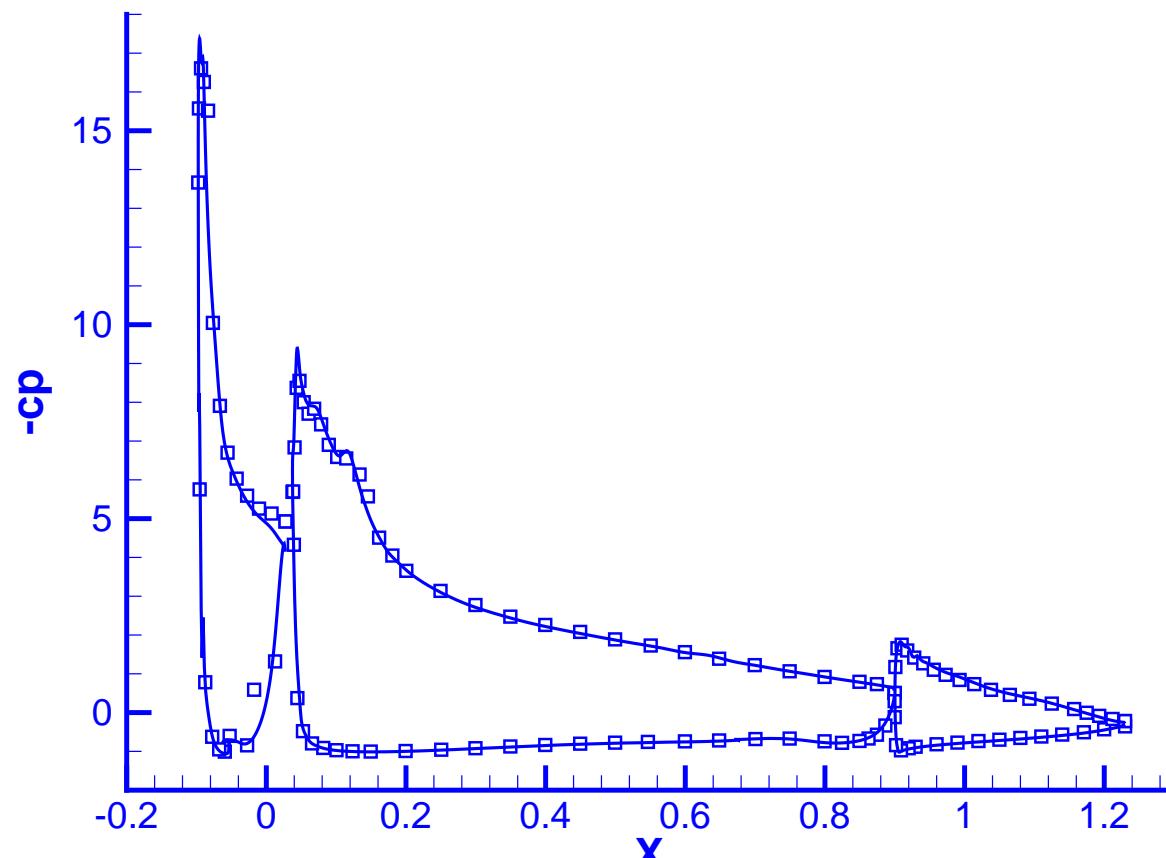
BAC 3-11, L1/T2 High Lift Configuration

$$M_\infty = 0.197, Re_\infty = 3.52 \cdot 10^6, \alpha = 20.18^\circ$$



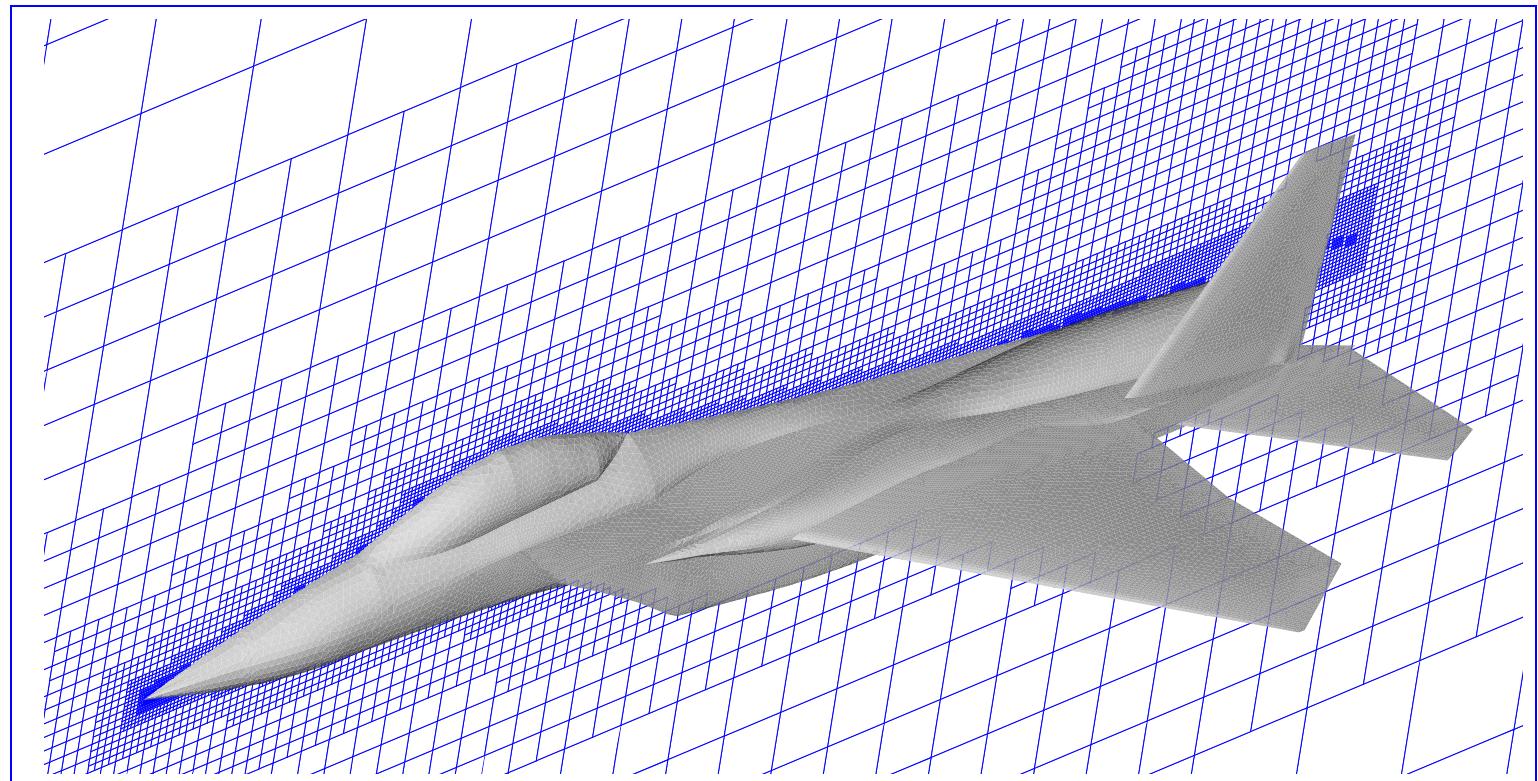
BAC 3-11, L1/T2 High Lift Configuration

$M_\infty = 0.197, Re_\infty = 3.52 \cdot 10^6, \alpha = 20.18^\circ$



□ Experiment, — Computation

Generic F15 Aircraft Fighter

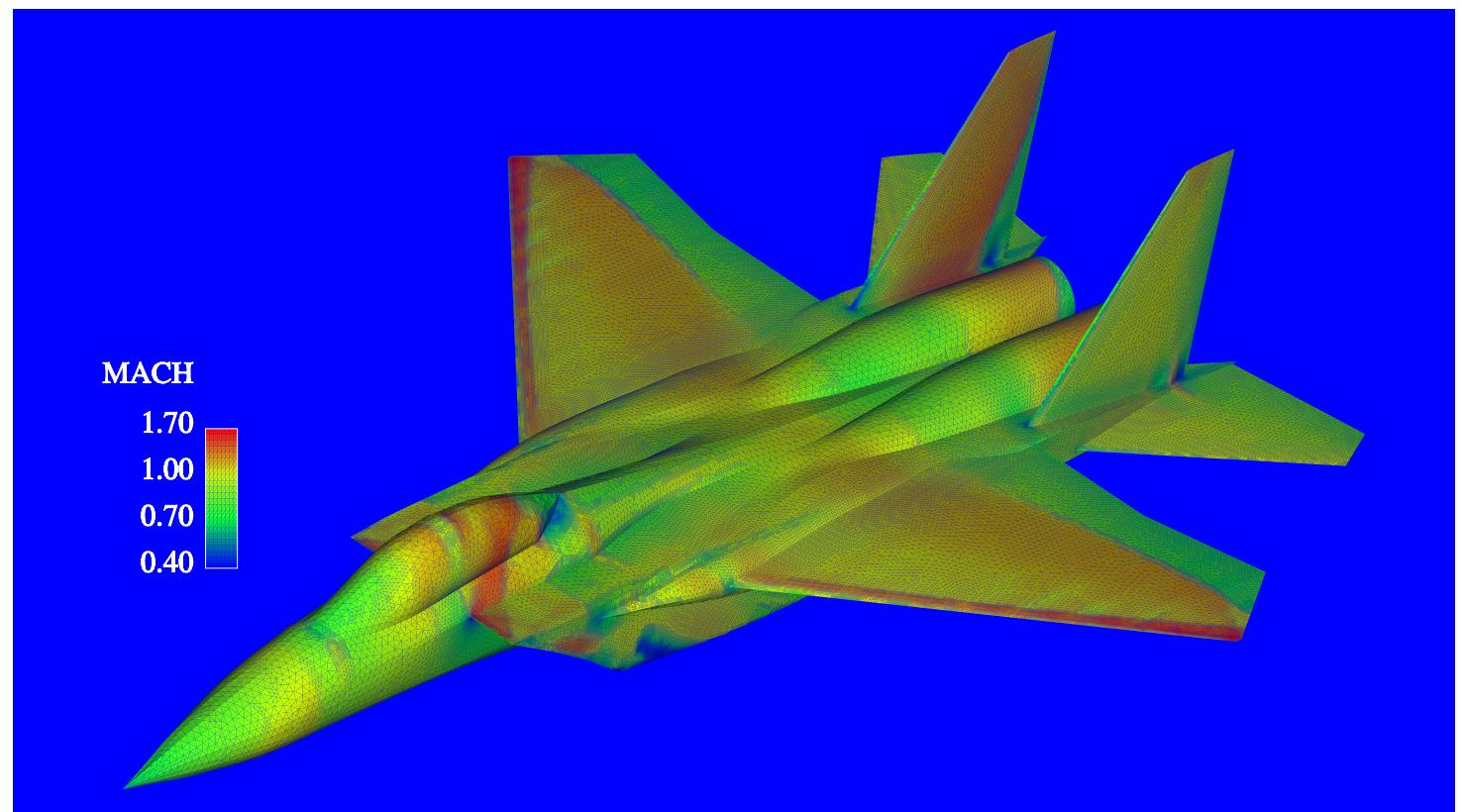
$$M = 0.95, \alpha = 3^\circ$$


Computational Grid: CARTFLOW (F. Deister)

- Number of cells: 814704
- Grid Generation Time: 307 seconds

Generic F15 Aircraft Fighter

$M = 0.95, \alpha = 3^\circ$



Hypersonic Flow: $M = 8.15, \alpha = 30^\circ$

