Einführung in die Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen

Siegfried Müller

Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 55
D–52056 Aachen

E-Mail: mueller@igpm.rwth-aachen.de

Bericht–Nr. 96

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Einführung in die Theorie und Numerik von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen gegeben, wobei der Schwerpunkt auf der Theorie liegt. Um diese besser verstehen zu können, sind Grundkenntnisse aus der Kontinuumsmechanik und der Thermodynamik unerläßlich. Sie werden hier an den Anfang gestellt. Bei der sich daran anschließenden mathematisch–analytischen Behandlung der Erhaltungsgleichungen wird versucht die Ergebnisse physikalisch zu interpretieren, um so ein besseres Verständnis der unterschiedlichen Lösungsbegriffe — klassische und schwache Lösung sowie Entropielösung — zu erzielen. Viele Ansätze sind physikalisch motiviert. Dies gilt insbesondere auch für die numerische Behandlung, die hier im wesentlichen nur für den räumlich eindimensionalen Fall betrachtet wird.

Key Words: continuum mechanics, classical thermodynamics, Navier-Stokes equations, chemically reacting flows, conservation laws, shocks and singularities, Derivation of finite difference approximations

AMS subject classification: 73Bxx, 80A10, 35Q30, 35L65, 35L67, 65M05

Vorwort zur 1. Auflage

Bei dem vorliegenden Skript handelt es sich um eine Einführung in die Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungssätze. Dies sind spezielle partielle Differentialgleichungen, die in der Physik von großer Bedeutung sind, da sie die räumlichen und zeitlichen Änderungen von sogenannten Erhaltungsgrößen (Masse, Impuls, Energie) beschreiben. Bei der mathematischen Analyse solcher Gleichungen wird häufig auf die physikalische Interpretation von charakteristischen Phänomenen zurückgegriffen. Es ist somit nicht verwunderlich, daß Begriffe wie Entropie, Fluß, Erhaltungsgröße, etc. sowohl in der physikalischen als auch in der mathematischen Theorie solcher Gleichungen auftreten. Daher erscheint es sinnvoll, an den Anfang dieser Ausarbeitung die Beschreibung eines speziellen physikalischen Modells zu stellen. Die Wahl fiel auf die Kontinuumsmechanik. Diese bietet den Vorteil, daß sie in sich abgeschlossen ist und auch für den Mathematiker ohne vertiefte physikalische Kenntnisse nachvollziehbar ist. Die hier vorgestellten Navier–Stokes–Gleichungen (reibungsbehaftet) bzw. Eulergleichungen (reibungsfrei) werden dann bei der mathematischen Untersuchung als Modellgleichungen verwendet.
Daran schließt sich ein Abstecher in die Thermodynamik an. Hier soll insbesondere das Entropiekonzept sowie der 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik erläutert werden.
Darauf baut die Einführung in die Theorie der hyperbolischen Differentialgleichungen auf. Es werden insbesondere die Begriffe der klassischen und der schwachen Lösung sowie der Entropielösung näher betrachtet und charakteristische Eigenschaften dieser Lösungen vorgestellt. Das aus der Thermodynamik bekannte Entropiekonzept wird im mathematischen Sinne verallgemeinert, um eine eindeutige Lösung zu charakterisieren.
Abschließend wird kurz auf die numerische Behandlung solcher Differentialgleichungen eingegangen. Insbesondere sollen die unterschiedlichen Ansätze wie z.B. Finite–Differenzen–Verfahren, Finite–Volumen–Verfahren, Upwind–Verfahren, etc., die teilweise wiederum physikalisch motiviert sind, vorgestellt werden.
Diese Arbeit entstand im Rahmen eines Seminars, das am Institut für Geometrie und Praktische Mathematik unter der Leitung von Prof. Dr. W. Dahmen im Wintersemester 1993/94 statt fand. Dieses richtete sich insbesondere an Studenten des 5. Fachsemesters. Da von diesen keine Kenntnisse in der Theorie und der Numerik partieller Differentialgleichungen vorausgesetzt werden konnten, hat er mich um eine problemspezifische Einführung gebeten. Dieser Bitte bin ich gerne nachgekommen und habe sie zum Anlaß genommen, diese Arbeit zu schreiben.
Es sei darauf hingewiesen, daß diese Einführung nicht den Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Vielmehr werden nur einige wenige, aber sehr wesentliche Aspekte angeschnitten. Beweise werden zum Teil nicht ausführlich durchgeführt. Vielmehr habe ich mich auf grundlegende Beweistechniken beschränkt. Sollten bei der Lektüre des Skriptes Unstimmigkeiten, Verständnisprobleme oder sogar Fehler auftreten, so wäre ich um entsprechende Hinweise dankbar.
Abschließend möchte ich mich bei den Seminarteilnehmern für ihr Interesse und ihren Einsatz bedanken. Für die Anfertigung der graphischen Darstellungen und der Erstellung der Druckvorlage waren G. Kaulen und S. Mannheim verantwortlich. Ihnen sei besonders für die gute Zusammenarbeit gedankt. Mein ausdrücklicher Dank gilt Prof. Dr. W. Dahmen für sein Vertrauen, das er mir entgegenbrachte, als er mir die Einführung der Studenten in dieses komplexe Spezialgebiet anbot.

Vorwort zur 2. Auflage

Gegenüber der 1. Auflage wurden einige Erweiterungen vorgenommen. Die Struktur der Arbeit wurde dabei aber nicht verändert. So wurde die Herleitung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen aus den allgemeinen kontinuumsmechanischen Gleichungen aufgenommen, da diese in der Mathematik sowohl analytisch als auch numerisch intensiv untersucht werden (Kap. 2.4.1).
Um die Konstruktionsprinzipien für numerische Verfahren zur Diskretisierung von Erhaltungsgleichungen zu motivieren, wurde ein Kapitel über die Konvergenztheorie basierend auf Kompaktheitsargumenten angefügt (Kap. 4.3).
Da in der Literatur die Begriffe „im schwachen Sinne“ und „im distributiven Sinne“ synonym verwendet werden, wird das Konzept der schwachen Lösung in die Distributionentheorie eingebettet (Kap. 5.2).
Ebenso erschien es erforderlich, eine alternative Darstellung der Differentialgleichungen im Rahmen der Tensorrechnung vorzustellen. Diese wird von Ingenieuren bevorzugt. Sie hat den Vorteil, daß sie für beliebige Koordinatensysteme ihre Form beibehält. Außerdem erleichtert sie die Koordinatentransformation (Kap. 5.1).
Die physikalischen Grundlagen wurden um die kinetische Gastheorie und die Boltzmann-Verteilung erweitert. Dadurch werden die kontinuumsmechanischen Gleichungen in einen allgemeinen Rahmen eingebettet (Kap. 5.3).

Inhaltsverzeichnis

1 Notationen

1.1 Physikalische Notationen

m	Masse		[kg]
V	Volumen		[m^3]
ρ	Massendichte	(2.1.1)	[kg/m^3]
$\boldsymbol{v}$	Geschwindigkeitsvektor		[m/s]
E	massenspezifische Totalenergie		[J/kg]
$\boldsymbol{k}$	Fernkräfte		[N]
$\boldsymbol{\tau}$	Spannungstensor		[$kg/m\,s^2$]
q^0	Wärmestrahlung		[$J/m^2\,s$]
$\boldsymbol{q}$	Wärmezufuhr	(2.1.37)	[$J/m^2\,s$]
$\boldsymbol{\tau}_v$	Tensor der Reibungsspannungen	(2.1.47)	[$kg/m\,s^2$]
$\boldsymbol{d}$	Geschwindigkeitsdeviator	(2.1.47)	[1/s]
μ_b	Koeffizient der Volumenviskosität		[kg/m s]
μ_s	Koeffizient der Scherviskosität		[kg/m s]
$\tilde{e}$	innere Energie		[J]
e	massenspezifische innere Energie	(2.1.50)	[J/kg]
p	Druck	(2.3.6)	[N/m^2]
$\tilde{s}$	Entropie		[J/K]
s	massenspezifische Entropie		[J/kg K]
W	Arbeit		[N m]
Q	Wärme		[J]
k	Boltzmann – Konstante		[J/K]
τ	massenspezifisches Volumen		[m^3/kg]
T	Temperatur		[K]
R	universelle Gaskonstante		[J/mol K]
H	massenspezifische Totalenthalpie	(2.3.4)	[J/kg]
h	massenspezifische Enthalpie	(2.3.5)	[J/kg]
λ	Wärmeleitungskoeffizient		[J/m s K]
c_p	isobare Wärmekapazität	(2.3.7)	[J/kg K]
c_v	isochore Wärmekapazität	(2.3.8)	[J/kg K]
γ	Verhältnis der Wärmekapazitäten	(2.3.11)	
a^2	Schallgeschwindigkeit	(2.3.24)	[m/s]
L	Referenzlänge		[m]
v^*	Referenzgeschwindigkeit		[m/s]
ρ^*	Referenzdichte		[kg/m^3]
μ^*	Referenzkoeffizient für die Viskosität		[kg/m s]
λ^*	Referenzkoeffizient für die Wärmeleitung		[J/m s K]
Re	Reynolds – Zahl	(2.3.39)	
Pr	Prandtl – Zahl	(2.3.39)	

1.2 Mathematische Notationen

t	Zeitkomponente
x_i	Ortskomponente im kartesischen Koordinatensystem
$\boldsymbol{x}$	Ortsvektor
$\boldsymbol{x}^*$	zeitlich – räumlicher Vektor
d	Dimension des Ortsraumes
$\boldsymbol{n}$	äußere Normale zu einem Volumen V
m	Anzahl der Erhaltungsgrößen
$\boldsymbol{u}$	Vektor der Erhaltungsgrößen
$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{u})$	Fluß der Erhaltungsgrößen in der i-ten Ortsrichtung
$\boldsymbol{F}_i^I(\boldsymbol{u})$	reibungsfreier Fluß der Navier – Stokes – Gleichungen
$\boldsymbol{F}_i^V(\boldsymbol{u})$	reibungsbehafteter Fluß der Navier – Stokes – Gleichungen
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$	Quellterm der Erhaltungsgleichungen
$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{u})$	Jacobi – Matrix des Flusses $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{u})$
U	Entropiefunktion
F_i^U	Entropiefluß zur Entropiefunktion U in die i-te Ortsrichtung
G	numerischer Fluß
G^U	numerischer Entropiefluß
Δt	Zeitschrittweite
Δx	Ortsschrittweite
H	Differenzenverfahren

1.3 Mengen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der nicht negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	Menge der reellen, n-dimensionalen Vektoren, $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$	Menge der reellen $n_1 \times n_2$-Matrizen, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
$C^n(A,B)$	Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f:\ A \to B$, $n \in \mathbb{N}$
$C^0(A,B)$	Menge der stetigen Funktionen $f:\ A \to B$
$\mathrm{Lip}(A,B)$	Menge der Lipschitz-stetigen Funktionen $f:\ A \to B$
$C_0^\infty(A,B)$	Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f:\ A \to B$, die außerhalb einer kompakten Menge supp $(f) \subset A$ verschwindet
$L^\infty(A,B)$	Menge aller meßbaren und fast überall (f. ü.) beschränkten Funktionen $f:\ A \to B$
$L^1_{loc}(\Omega)$	Menge aller reellwertigen Funktionen, die auf Ω definiert sind und die auf jeder kompakten Teilmenge A von Ω Lebesque – integrierbar sind
$BV(A)$	Menge aller Funktionen $f:\ A \to \mathbb{R}$ mit beschränkter Variation

1.4 Vektoren und Matrizen

$\boldsymbol{r}$	Rechtseigenvektor
$\boldsymbol{l}$	Linkseigenvektor
$\boldsymbol{e}_i$	i-ter Einheitsvektor
$\boldsymbol{R}$	Matrix der Rechtseigenvektoren $(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m)$
$\boldsymbol{L}$	Matrix der Linkseigenvektoren $(\boldsymbol{l}_1, \ldots, \boldsymbol{l}_m)^T$
$\boldsymbol{I}$	Einheitsmatrix
δ_{ij}	Kronecker – Symbol
λ	Eigenwert

1.5 Operatoren

$\frac{d}{dt}$	totale zeitliche Änderung
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	1. partielle Ableitung nach der Komponente x_i, kurz: $(\cdot)_{,x_i}$
$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$	2. partielle Ableitung nach den Komponenten x_i und x_j, kurz: $(\cdot)_{,x_j,x_i}$
$\frac{\partial}{\partial t}$	1. partielle Ableitung nach der Zeit, kurz: $(\cdot)_{,t}$
$\frac{D}{Dt}$	materielle Zeitableitung, siehe (2.1.7)
div	Divergenz bezüglich räumlicher Koordinaten
grad	Gradient bezüglich räumlicher Koordinaten
div*	Divergenz bezüglich zeitlicher und räumlicher Koordinaten
grad*	Gradient bezüglich zeitlicher und räumlicher Koordinaten
$\mathbf{grad}_{\boldsymbol{u}}$	Gradient bezüglich des Vektors $\boldsymbol{u}$
[ ]	Differenz zweier Zustände
det	Determinante einer Matrix
div $\boldsymbol{u}$	Divergenz eines Vektors $\boldsymbol{u} \in C^1(\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR}^d)$, definiert als $\sum_{i=1}^{d} u_{i,x_i}$
div $\boldsymbol{C}$	Divergenz einer Matrix $\boldsymbol{C} \in C^1(\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR}^{d\times d})$, definiert als $\sum_{i=1}^{d}(\operatorname{div} \boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{e}_i$
div $(\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)$	Divergenz der Flüsse $\boldsymbol{F}_i \in C^1(\mathrm{IR}^m, \mathrm{IR}^m)$, definiert als $\sum_{i=1}^{d}(\boldsymbol{F}_i)_{,x_i}$
grad f	Gradient eines Skalars $f \in C^1(\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR})$, definiert als $\sum_{i=1}^{d} f_{,x_i}\boldsymbol{e}_i$
grad $\boldsymbol{u}$	Gradient eines Vektors $\boldsymbol{u} \in C^1(\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR}^d)$, definiert als $(\mathbf{grad}\, u_1, \ldots, \mathbf{grad}\, u_d)$
$D^{\boldsymbol{k}}$	Ableitungsoperator der Ordnung $\lvert\boldsymbol{k}\rvert = \sum_{i=1}^{d} k_i$, $k \in \mathrm{IN}_0^d$ auf IR^d definiert als $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{k_d}$

1.6 Konventionen

Im Verlauf der vorliegenden Arbeit werden einige vom Standard der Literatur abweichende Bezeichnungen verwendet. Diese sollen eine kompakte Darstellung von Formeln gewährleisten. Die Konventionen betreffen die Bezeichnungen für

- Koordinatensysteme des Raumes und der Zeit,
- Differentialoperatoren des Gradienten und der Divergenz,
- partielle Ableitungen,
- Tensoren und
- Skalarprodukte.

Es werden hier zeit– und ortsabhängige Probleme betrachtet. Deshalb ist es sinnvoll, zwischen den Ortsvariablen $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)^T \in \mathrm{I\!R}^d$ des d-dimensionalen (physikalischen) Raumes und der Zeitvariablen $t \in \mathrm{I\!R}_+$ zu unterscheiden. Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, ist diese Unterscheidung überflüssig, da die betrachteten Größen dimensionslos sind. In der Physik sind diese jedoch mit Einheiten behaftet. Führt man formal die Komponente $x_0 = v_0 t$ ein, wobei v_0 eine beliebige Referenzgeschwindigkeit (o.B.d.A. $v_0 = 1$) ist, dann hat x_0 dieselbe Einheit wie die Ortsvariablen $x_1, \ldots, x_d$.
Somit geht der Zeit– und Ortsraum $\mathrm{I\!R}_+ \times \mathrm{I\!R}^d$ in einen erweiterten Ortsraum $\mathrm{I\!R}^{d+1}$ über. Zur Unterscheidung der Vektoren des erweiterten Ortsraumes von solchen aus dem gewöhnlichen Ortsraum wird der Superindex * eingeführt.
Als zugrundeliegendes Koordinatensystem wird nur das kartesische betrachtet. Die Darstellungen der Differentialoperatoren des Gradienten und der Divergenz ergeben sich für diesen Fall aus den entsprechenden Definitionen der Tensorrechnung:

1. Divergenz

   (a) $$\operatorname{div} \boldsymbol{u} := \sum_{i=1}^{d} u_{i,x_i} \quad \boldsymbol{u} : \mathrm{I\!R}^d \to \mathrm{I\!R}^d,$$

   (b) $$\operatorname{div} \boldsymbol{C} := \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{C}_{,x_i}\, \boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} \operatorname{div} \boldsymbol{C}_1 \\ \vdots \\ \operatorname{div} \boldsymbol{C}_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} : \mathrm{I\!R}^d \to \mathrm{I\!R}^{d\times d},$$

   $\boldsymbol{C}^i = i$-te Spalte von $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}_i = i$-te Zeile von $\boldsymbol{C}$,
   $\boldsymbol{e}_i = i$-ter Einheitsvektor des $\mathrm{I\!R}^d$,

   (c) $$\operatorname{div} (\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d) := \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{F}_{i,x_i}, \quad \boldsymbol{F}_i : \mathrm{I\!R}^m \to \mathrm{I\!R}^m, \quad i = 1, \ldots, d;$$

2. Gradient

   (a) $$\mathbf{grad}\, f := \begin{pmatrix} f_{,x_1} \\ \vdots \\ f_{,x_d} \end{pmatrix}, \quad f : \mathrm{I\!R}^d \to \mathrm{I\!R},$$

(b) $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{u} := (\mathbf{grad}\,u_1, \ldots, \mathbf{grad}\,u_d), \quad \boldsymbol{u} : \mathrm{IR}^d \to \mathrm{IR}^d,$

$u_i = i$-te Komponente von $\boldsymbol{u}$.

Hierin wurde folgende Konvention für die partiellen Ableitungen verwendet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} &= (\cdot)_{,t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} = (\cdot)_{,x_i} \qquad \text{und} \\ \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t \partial x_j} &= (\cdot)_{,x_j,t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j} = (\cdot)_{,x_j,x_i} \; . \end{aligned}$$

Die Verwendung des Kommas zur Abgrenzung der einzelnen partiellen Ableitungen soll Verwechslungen mit den Komponenten eines Vektors ausschließen. Die oben für den Ortsraum definierten Differentialoperatoren können analog zu Vektoren auf den erweiterten Ortsraum übertragen werden. Dazu laufen die Summationsindizes in der Definition von Null ab, und der Raum IR^d muß durch den Raum $\mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}^d$ ersetzt werden. Zur Kennzeichnung der zeitlichen **und** räumlichen Operatoren wird auch hier – analog zu den Vektoren – der Superindex * verwendet, d.h. div^*, $\mathbf{grad}^*$.
Im Zusammenhang mit den physikalischen Grundlagen (vgl. Kapitel 2) wird der Begriff des Tensors verwendet (z.B. Spannungstensor). Hier handelt es sich ausschließlich um Tensoren 2. Stufe. Auf eine Einführung in die Grundlagen der Tensorrechnung soll an dieser Stelle aber verzichtet werden. Näheres dazu findet man z.B. in [Br], [LaFr] beziehungsweise in Anhang 5.1. Es handelt sich dabei um Multilinearformen, die gewisse Rechengesetze erfüllen. Ein Tensor 2. Stufe kann insbesondere als eine Matrix aufgefaßt werden. Charakteristisch für die Koeffizienten eines solchen Tensors ist, daß sie dieselbe physikalische Einheit haben. In Matrizen können dagegen physikalische Größen mit unterschiedlichen Einheiten zusammengefaßt sein.
Eine weitere Konvention betrifft das Produkt zweier Vektoren. Darunter soll das Skalarprodukt verstanden werden. Es wird auf die sonst übliche Schreibweise von Zeilenvektor und Spaltenvektor verzichtet. Analoges gilt für die Multiplikation eines Vektors von links auf eine Matrix. Dies gewährleistet eine wesentlich überschaubarere Darstellung der (physikalischen) Gleichungen.

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Kontinuumsmechanik

2.1.1 Grundlagen

Die Kontinuumsmechanik ist die mathematische Theorie zur Beschreibung des mechanischen bzw. thermodynamischen Verhaltens materieller Körper unter dem Einfluß von Kräften, Wärmeströmen, etc.. Im Gegensatz zur kinetische Gastheorie werden hier nicht einzelne Teilchen (Atome, Moleküle, etc.) eines materiellen Körpers betrachtet. Molekulare Wechselwirkungen können mit dieser Theorie nicht beschrieben werden. Die diskrete Struktur eines Körpers wird hier durch ein Kontinuum ersetzt. Dieses Vorgehen ist nur dann gerechtfertigt, falls sich in dem betrachteten Körper hinreichend viele Teilchen befinden. Dadurch ist die Einführung eines Dichtebegriffes gerechtfertigt. Als Massendichte wird der Grenzwert

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) := \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{2.1.1}$$

Δm = Masse, die sich in ΔV befindet
ΔV = Volumenelement, das den Punkt $\boldsymbol{x}$ enthält

definiert, wobei die Existenz des Grenzwertes vorausgesetzt wird. Die Massendichte ist somit nichts anderes als der Quotient der infinitesimalen Masse dm in einem infinitesimalen Volumen dV, d.h.:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \; . \tag{2.1.2}$$

Durch Integration über ein beliebiges Volumen ergibt sich daraus folgende Darstellung für die Masse

$$m := \int_V \rho(\boldsymbol{x}, t)\, dV \; . \tag{2.1.3}$$

Alle zur Masse proportionalen Größen ($\rho \boldsymbol{v}^2/2, \rho e, \rho \boldsymbol{f}, \rho \boldsymbol{v}, \ldots$) bezeichnet man als Quantitätsgrößen. Sie unterscheiden sich von den Intensitätsgrößen ($\boldsymbol{\tau}, p, \ldots$).
Durch die Betrachtung eines infinitesimalen Volumens wird die Massenverteilung in einem Körper verschmiert, da die Integration (2.1.3) als eine kontinuierliche Mittelwertbildung interpretiert werden kann .
Da hier keine Teilchen betrachtet werden, stellt sich die Frage, wer der Träger der Masse ist. In der Kontinuumsmechanik spricht man vom materiellen Punkt. Er repräsentiert die infinitesimale Masse dm in einem infinitesimalen Volumenelement dV des als Kontinuum aufgefaßten Körpers. Die Bahnlinie eines solchen materiellen Punktes wird als materielle Linie bezeichnet. Eine wesentliche Annahme der Kontinuumsmechanik bildet das Prinzip von der Wahrung des Zusammenhangs. Dieses besagt, daß benachbarte materielle Punkte des Kontinuums bei der Bewegung Nachbarpunkte bleiben. Dies bedeutet insbesondere, daß eine materielle Linie des Kontinuums nicht zerreißt.
In der Kontinuumsmechanik betrachtet man nun Volumen, die sich aus solchen materiellen Punkten zusammensetzen. Die Wahrung des Zusammenhangs hat zur Folge, daß sich bei einer Deformation des Materials das geometrische Volumen ändert, aber sich dieses

weiterhin aus denselben materiellen Punkten zusammensetzt. Somit ändert sich die Masse dieses sogenannten materiellen Volumens nicht. Man kann sich dieses Verhalten zum Beispiel an einem Schwamm leicht klar machen. Durch Zusammenpressen des Schwamms wird dieser zwar kleiner, aber die Masse ändert sich nicht (vorausgesetzt, der Schwamm ist trocken).
Es soll nun untersucht werden, wie sich eine beliebige Größe f, repräsentiert durch einen materiellen Punkt, entlang einer materiellen Linie ändert. Das Teilchen bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}(t))$ im Raum R^d bzw. $\boldsymbol{v}^*(t,\boldsymbol{x}(t))$ im Zeit–Raum–Kontinuum $\mathrm{IR}^+ \times \mathrm{IR}^d$ fort. Dieser Geschwindigkeitsvektor liegt tangential an der Bahnlinie $\boldsymbol{z}^*(t) := (t,\boldsymbol{x}(t))^T$ an (vgl. Bild 1), d.h.

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{z}^*(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}(t)) \end{pmatrix}. \tag{2.1.4}$$

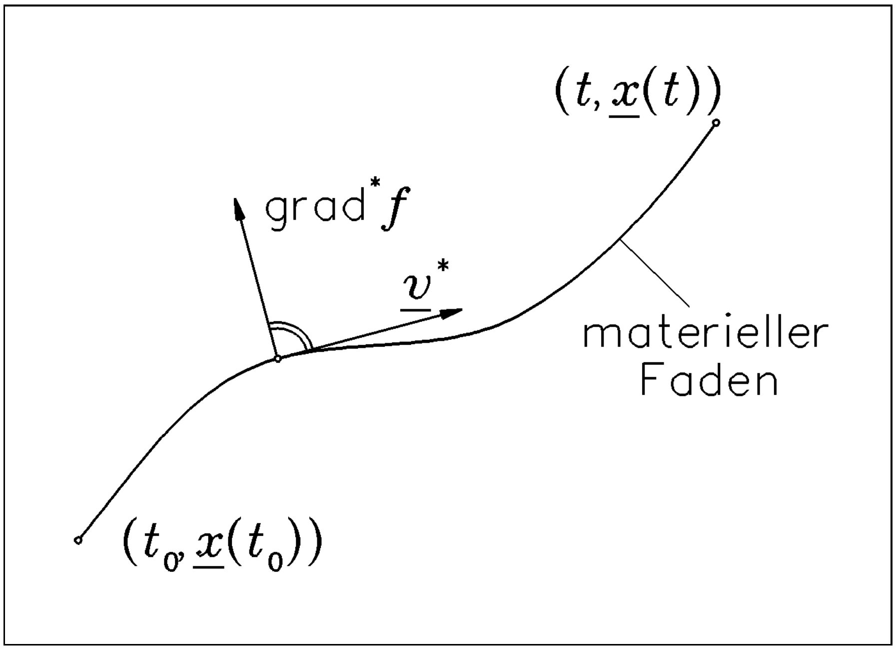


Abbildung 1: Teilchenbahn im Zeit–Raum–Kontinuum

Die Bahnlinie ist eindeutig festgelegt durch die Position $\boldsymbol{x}_0$ des Teilchens zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, d.h.

$$\boldsymbol{z}^*(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ \boldsymbol{x}_0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.5}$$

Die zeitliche Änderung von f entlang $\boldsymbol{z}^*(t)$ ist dann gegeben durch

$$\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{z}^*(t)) = \frac{\partial f}{\partial z_0}\underbrace{\frac{\partial z_0}{\partial t}}_{=1} + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial z_i}\underbrace{\frac{\partial z_i}{\partial t}}_{=v_i}\ . \tag{2.1.6}$$

Dies ist die Richtungsableitung von f in Richtung $\boldsymbol{v}^*$. Man bezeichnet sie als materielle Zeitableitung und führt den Operator

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} := \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\mathbf{grad}(\cdot) = \boldsymbol{v}^*\,\mathbf{grad}^*(\cdot) \tag{2.1.7}$$

ein. Mittels der Lagrange–Transformation können die Koordinaten $(\boldsymbol{x}, t)$ auf die sogenannten Lagrange–Koordinaten $(\xi, \tau = t)$ überführt werden (siehe (2.4.24) und (2.4.25)). Diese sind teilchenbegleitend (vgl. Münchhausen auf der Kanonenkugel). Sie existieren jedoch nur solange wie keine Unstetigkeiten auftreten, d.h. die Lösung glatt ist.
Bisher wurde nur die zeitliche Änderung einer Größe entlang einer Bahnlinie untersucht. In der Kontinuumsmechanik möchte man jedoch Aussagen über die mittlere Änderung einer Größe in einem materiellen Volumen $V(t)$ machen. Dazu muß man sich überlegen, wie der Begriff des materiellen Volumens und das Prinzip von der Wahrung des Zusammenhangs mathematisch formuliert werden kann. Die Deformation des materiellen Volumens ergibt sich aus der Bewegung aller materiellen Punkte $\boldsymbol{x}_0 \in V_0 \subset \mathrm{IR}^d$ zum Zeitpunkt t_0 (o.B.d.A. $t_0 = 0$) entlang der materiellen Linien, die durch (2.1.4) und (2.1.5) festgelegt sind.
Zum Zeitpunkt $t > t_0$ ist die Position eines Teilchens $\boldsymbol{x}(t) \in V(t)$, das sich zum Zeitpunkt $t = t_0$ im Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in V_0$ befunden hat, festgelegt durch

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x}_0) := \boldsymbol{x}(t)\ . \tag{2.1.8}$$

Aufgrund der Definition von $\tilde{\boldsymbol{x}}$ gilt mit (2.1.4):

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \tilde{\boldsymbol{x}}(t_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0\ . \tag{2.1.9}$$

Für die zeitliche Änderung ergibt sich aus (2.1.4) weiterhin:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{v}\left(t, \tilde{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x}_0)\right)\ . \tag{2.1.10}$$

Das Prinzip von der Wahrung des Zusammenhangs besagt, daß eine materielle Linie nicht zerreißt. Dies bedeutet, daß man die Bahn eines Teilchens vom Zeitpunkt $t > t_0$ zum Zeitpunkt $t = t_0$ zurückverfolgen kann. Dies wird mathematisch durch die Forderung der Bijektivität von $\tilde{\boldsymbol{x}}(t, .)$ gewährleistet, d.h.

$$\det \boldsymbol{J}(t, \boldsymbol{x}_0) \neq 0 \qquad \forall\, x_0 \in V_0\ . \tag{2.1.11}$$

Darin ist $\boldsymbol{J}$ die Jacobi – Matrix von $\tilde{x}$, definiert durch

$$\boldsymbol{J}(t, \boldsymbol{x}_0) := \left(\frac{\partial \tilde{x}_i(t, \boldsymbol{x}_0)}{\partial x_{0,j}}\right)_{i,j=1,\ldots,d}\ . \tag{2.1.12}$$

Somit gilt insbesondere:

$$V(t) = \tilde{\boldsymbol{x}}(t, V_0)\ . \tag{2.1.13}$$

Die mittlere Änderung einer Größe f in einem materiellen Volumen $V(t)$ ist dann definiert als

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_{V(t)} f\, dV := \frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} f(t, \boldsymbol{x}(t))\, dV\ . \tag{2.1.14}$$

Die Substitutionsregel ermöglicht es nun mit (2.1.8) und (2.1.13), die Integration über $V(t)$ auf diejenige über V_0 zurückzuführen:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} f\,dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} f\left(t, \tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0)\right) \det \boldsymbol{J}(t,x_0)\,dV_0 \; . \tag{2.1.15}$$

Da das Volumen V_0 zeitunabhängig ist, kann nun die Differentiation mit der Intergration vertauscht werden:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} f\,dV &= \int\limits_{V_0}\frac{d}{dt}\left(f\left(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0)\right)\det\boldsymbol{J}(t,x_0)\right)\,dV_0 \\ &= \int\limits_{V(0)}\frac{df\left(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0)\right)}{dt}\det\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0) \\ &\qquad\qquad + f\left(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0)\right)\frac{d}{dt}\left(\det\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0)\right)\,dV_0 \; .\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Die totale zeitliche Änderung von f ist wegen (2.1.6), (2.1.8) und (2.1.10) gerade die materielle Ableitung von f:

$$\frac{d\,f(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0))}{dt} = \frac{D\,f(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0))}{Dt} \; . \tag{2.1.17}$$

Da $\boldsymbol{x}_0$ unabhängig von der Zeit t ist, ergibt sich unmittelbar:

$$\frac{d}{dt}\det\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial}{\partial t}\det\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0) \; . \tag{2.1.18}$$

Zur Berechnung der totalen zeitlichen Änderung der Determinante von $\boldsymbol{J}$ muß auf die Definition einer Determinante zurückgegriffen werden:

$$\det\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{\sigma\in S_d}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{d}\frac{\partial\tilde{x}_j(t,\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_{0,\sigma_j}} \; . \tag{2.1.19}$$

Darin bezeichnet S_d die Menge aller Permutationen der Zahlen $1,\ldots,d$ und $\operatorname{sgn}(\sigma)=\pm 1$, falls $\sigma\in S_d$ eine gerade bzw. ungerade Permutation ist.
Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}\det\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0) = \sum_{\sigma\in S_d}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{l=1}^{d}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\tilde{x}_l(t,\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_{0,\sigma_l}}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{d}\frac{\partial\tilde{x}_j(t,\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_{0,\sigma_j}} \; . \tag{2.1.20}$$

Setzt man voraus, daß $\tilde{\boldsymbol{x}}$ hinreichend glatt ist, d.h. $\tilde{\boldsymbol{x}}\in C^2(\mathrm{IR}_+\times\mathrm{IR}^d,\mathrm{IR}^d)$, dann gilt mit (2.1.10):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\tilde{x}_l(t,\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_{0,i}} = \frac{\partial}{\partial x_{0,i}}\frac{\partial\tilde{x}_l(t,\boldsymbol{x}_0)}{\partial t} &= \frac{\partial v_l\left(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0)\right)}{\partial x_{0,i}} \\ &= \sum_{k=1}^{d}\frac{\partial v_l\left(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0)\right)}{\partial\tilde{x}_k}\frac{\partial\tilde{x}_k(t,\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_{0,i}} \; .\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Durch Einsetzen von (2.1.21) in (2.1.20) erhält man nach Vertauschen der Summation:

$$\frac{\partial}{\partial t} \det \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0) = \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial v_l\,(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0))}{\partial \tilde{x}_k} \sum_{\sigma \in S_d} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{\partial \tilde{x}_k(t,\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_{0,\sigma_l}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{d} \frac{\partial \tilde{x}_j(t,\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_{0,\sigma_j}} \; . \qquad (2.1.22)$$

Sei nun $\boldsymbol{J}_{lk}$ die Matrix, die sich aus Ersetzen der l-ten Zeile durch die k-te Zeile der Matrix $\boldsymbol{J}$ ergibt. Dann läßt sich (2.1.22) aufgrund der Definition einer Determinante darstellen als

$$\frac{\partial}{\partial t} \det \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0) = \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial v_l\,(t,\tilde{x}(t,\boldsymbol{x}_0))}{\partial \tilde{x}_k} \det \boldsymbol{J}_{lk} \; . \qquad (2.1.23)$$

Sind zwei Zeilen einer Matrix linear abhängig, so verschwindet die Determinante dieser Matrix aufgrund der Rechengesetze für Determinanten. Aus der Definition von $\boldsymbol{J}_{lk}$ ergibt sich somit

$$\det \boldsymbol{J}_{lk} = \begin{cases} 0 & , \quad l \neq k \\ \det \boldsymbol{J} & , \quad l = k \end{cases} = \delta_{lk} \det J \; . \qquad (2.1.24)$$

Die Gleichung (2.1.23) geht damit über in

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \det \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0) &= \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial v_l\,(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0))}{\partial \tilde{x}_k} \delta_{lk} \det \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0) \\ &= \operatorname{div} \boldsymbol{v}\,(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0)) \det \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0) \; . \qquad (2.1.25) \end{aligned}$$

Setzt man nun (2.1.18), (2.1.17) und (2.1.25) in (2.1.16) ein, so folgt

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V(t)} f\,dV = \int\limits_{V_0} \left[\frac{D\,f(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0))}{Dt} + f\,(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0)) \operatorname{div} \boldsymbol{v}\,(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}_0)) \right] \det \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}_0)\,dV_0 \; . \qquad (2.1.26)$$

Durch erneute Anwendung der Substitutionsregel erhält man

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V(t)} f\,dV = \int\limits_{V(t)} \frac{D\,f(t,\boldsymbol{x}(t))}{Dt} + f\,(t,\boldsymbol{x}(t)) \operatorname{div} \boldsymbol{v}\,(t,\boldsymbol{x}(t))\;dV \; . \qquad (2.1.27)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden die Argumente des Integranden nicht mehr angegeben. (2.1.27) läßt sich dann verkürzt schreiben als

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V(t)} f\,dV = \int\limits_{V(t)} \frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v}\,dV \; . \qquad (2.1.28)$$

Mit (2.1.7) und

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\,\mathbf{grad} f + f \operatorname{div} \boldsymbol{v} \qquad (2.1.29)$$

gilt insbesondere

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V(t)} f\, dV = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\boldsymbol{v})\, dV \,. \tag{2.1.30}$$

Erfüllt der Rand $\partial V(t)$ von $V(t)$ die Voraussetzungen des Satzes von Gauß, so kann (2.1.30) weiter umgeformt werden nach

$$\frac{D}{Dt} \int\limits_{V(t)} f\, dV = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\, dV + \oint\limits_{\partial V(t)} f\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\, ds \,. \tag{2.1.31}$$

Dies ist die sogenannte Leibniz – Regel. Darin ist $\boldsymbol{n}$ die äußere Normale zu $\partial V(t)$. Die Herleitung dieser Regel, wie sie hier durchgeführt wurde, basiert auf der Arbeit von Chorin und Marsden [CM].
Abschließend sei noch bemerkt, daß die Leibniz–Regel auch für ein inmaterielles Volumen $\overline{V}$ hergeleitet werden kann. Man überlegt sich analog zu oben

$$\frac{D}{Dt} \int\limits_{V(t)} f\, dV = \frac{D}{Dt} \int\limits_{\overline{V}(t)} f\, d\overline{V} + \underbrace{\oint\limits_{\partial V(t)} f(\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{n}\, ds}_{\text{Unterschiedliche Ausbreitung des Volumens}} \,. \tag{2.1.32}$$

Hierbei ist $\overline{\boldsymbol{v}}$ die inmaterielle Geschwindigkeit von $\overline{V}(t)$.

2.1.2 Bilanzgleichungen

Im vorangegangenen Kapitel wurde beschrieben, wie sich eine physikalische Größe f entlang einer materiellen Linie bzw. in einem materiellen Volumen ändert. Dabei wurde nur die Bewegung der materiellen Punkte berücksichtigt. Ein materieller Körper unterliegt aber darüberhinaus auch Einflüssen seiner Umgebung. Diese sind die

- Schnittkräfte (z.B. Druck, Spannung, Reibung, etc.),
- Fernwirkung (z.B. Gravitation, elektr. Felder, etc.) und
- Produktion (z.B. Dissoziation, etc.).

Diese Änderungen werden mittels der allgemeinen Bilanzgleichung

$$\frac{D}{Dt} \int\limits_{V(t)} f\, dV = \oint\limits_{\partial V(t)} \boldsymbol{J}^{(f)}\boldsymbol{n}\, ds + \int\limits_{V(t)} l^{(f)}\, dV + \int\limits_{V(t)} \sigma^{(f)}\, dV \tag{2.1.33}$$

beschrieben. Sie gibt die zeitliche Änderung einer Größe f unter dem Einfluß obiger physikalischer Effekte an. Wird eine Größe nicht produziert, d.h.

$$\sigma^{(f)} = 0 \,, \tag{2.1.34}$$

so spricht man insbesondere von einer Erhaltungsgröße.
Drei wesentliche physikalische Größen sind die Masse m, der Impuls $\rho\boldsymbol{v}$ und die volumenspezifische Totalenergie ρE. Diese werden durch die entsprechenden Bilanzgleichungen beschrieben:

Massenbilanz:

$$\frac{Dm}{Dt} \overset{\text{def.}}{=} \frac{D}{Dt} \int\limits_{V(t)} \rho \, dV = 0 \tag{2.1.35}$$

Impulsbilanz:

$$\frac{D}{Dt} \int\limits_{V(t)} \rho \boldsymbol{v} \, dV = \oint\limits_{\partial V(t)} \boldsymbol{\tau n} \, ds + \int\limits_{V(t)} \rho \boldsymbol{k} \, dV \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{V(t)} (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{k}) dV \tag{2.1.36}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \text{äußere Normale zu } \partial V \\
\rho\boldsymbol{v} &= \text{Impulsvektor} \\
\boldsymbol{k} &= \text{Fernkräfte} \\
\boldsymbol{\tau} &= -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}_v \quad \text{(Spannungstensor)} \\
\boldsymbol{\tau_v} &= (\mu_b - \tfrac{2}{3}\mu_s)(\operatorname{div} \boldsymbol{v})\boldsymbol{I} + 2\mu_s \boldsymbol{d} \quad \text{(Stokes'scher Schubspannungstensor)} \\
\boldsymbol{d} &= \tfrac{1}{2}\Big((\mathbf{grad}\, \boldsymbol{v})^T + \mathbf{grad}\, \boldsymbol{v}\Big) \quad \text{(Geschwindigkeitsdeviator)} \\
\mu_b &= \text{Volumenviskosität } (\overset{\text{i.a.}}{=} 0) \\
\mu_s &= \text{Scherviskosität}
\end{aligned}$$

Energiebilanz:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \int\limits_{V(t)} \rho E \, dV &= \oint\limits_{\partial V(t)} \boldsymbol{v\tau n} \, ds - \oint\limits_{\partial V(t)} \boldsymbol{qn} \, ds + \int\limits_{V(t)} \rho \boldsymbol{vk} \, dV + \int\limits_{V(t)} \rho q^0 \, dV \\
&= \int\limits_{V(t)} \operatorname{div} (\boldsymbol{v\tau} - \boldsymbol{q}) \, dV + \int\limits_{V(t)} \rho(\boldsymbol{vk} + q^0) \, dV
\end{aligned} \tag{2.1.37}$$

$$\begin{aligned}
E &= \text{massenspezifische Totalenergie} \\
q^0 &= \text{Wärmestrahlung} \\
\boldsymbol{q} &= \text{Wärmezufuhr} \quad = -\lambda \, \mathbf{grad}\, T \text{ (Fourier)}
\end{aligned}$$

Die Massenbilanz folgt unmittelbar aus der Definition des materiellen Volumens und der Grundannahme der Kontinuumsmechanik. Die Masse darf sich per Definition in einem materiellen Volumen nicht ändern:

$$\int\limits_{V(t)} \rho \, dV \overset{(2.1.2)}{=} \int\limits_{m} dm = m \overset{\text{def.}}{=} \text{const.} \tag{2.1.38}$$

Für die zeitliche Änderung einer volumenspezifischen Größe ρf in einem materiellen Volumen $V(t)$ gilt damit ebenfalls

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \int\limits_{V(t)} f \rho \, dV &= \frac{D}{Dt} \int\limits_{m} f \, dm \overset{m=\text{const.}}{=} \int\limits_{m} \frac{Df}{Dt} \, dm \\
&= \int\limits_{V(t)} \frac{Df}{Dt} \rho \, dV = \int\limits_{V(t)} \frac{D\rho f}{Dt} - f \frac{D\rho}{Dt} \, dV \, .
\end{aligned} \tag{2.1.39}$$

Mittels der Regel von Leibniz (2.1.31) bzw. (2.1.30) und dem Satz von Gauß kann die materielle Ableitung unter das Integral über ein materielles Volumen gezogen werden und das Randintegral über die Schnittkräfte in ein Volumenintegral transformiert werden. Die allgemeinen Bilanzgleichungen gehen dann über in die Integralgleichung

$$\int_{V(t)} \frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{J}^{(f)} - l^{(f)} - \sigma^{(f)} \, dV = 0 \, . \tag{2.1.40}$$

Da das materielle Volumen V beliebig wählbar ist, muß der Integrand in (2.1.40) lokal verschwinden. Dies führt auf die lokale Bilanzgleichung

$$\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{J}^{(f)} - l^{(f)} - \sigma^{(f)} = 0 \, . \tag{2.1.41}$$

Wegen (2.1.29) gilt insbesondere

$$\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\boldsymbol{v}) = \operatorname{div}^*(f\boldsymbol{v}^*). \tag{2.1.42}$$

Für die speziellen Bilanzgleichungen (2.1.35), (2.1.36), (2.1.37) ergeben sich dann die entsprechenden lokalen Bilanzgleichungen

lokale Massenbilanz:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)} \tag{2.1.43}$$

lokale Impulsbilanz:

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \rho \boldsymbol{k} = 0 \qquad \text{(Bewegungsgleichung von Cauchy)} \tag{2.1.44}$$

lokale Energiebilanz:

$$\rho \frac{DE}{Dt} - \operatorname{div}(\boldsymbol{v\tau} - \boldsymbol{q}) - \rho(\boldsymbol{vk} + q^0) = 0 \, . \tag{2.1.45}$$

Durch Multiplikation von (2.1.44) mit $\boldsymbol{v}$ ergibt sich die lokale Leistungsbilanz

$$\rho \frac{D(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2)}{Dt} = \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{vk} = \operatorname{div}(\boldsymbol{v\tau}) - \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} + \rho \boldsymbol{vk} \tag{2.1.46}$$

wobei die doppelte Überschiebung gemäß dem Tensorkalkül definiert ist (vgl. Kap. 5.1). Intergriert man diese über ein materielles Volumen, so ergibt sich daraus mit (2.1.39) die Leistungsbilanz

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{v}^2 \, dV = \int_{V(t)} \operatorname{div}(\boldsymbol{v\tau}) + \rho \boldsymbol{vk} \, dV - \int_{V(t)} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} \, dV \, . \tag{2.1.47}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 &= \text{kinetische Energie}\\
\sigma^{(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2)} &= -\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} \neq 0 \qquad (\textbf{keine}\ \text{Erhaltungsgröße})\\
\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} &= -p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{v}} : \boldsymbol{d}\\
\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{v}} : \boldsymbol{d} &= (\mu_b - \tfrac{2}{3}\mu_s)(\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})^2 + 2\mu_s \boldsymbol{d} : \boldsymbol{d} \geq 0\\
\boldsymbol{d} : \boldsymbol{d} &= \tfrac{1}{4}\left(\sum_{i,k=1}^{d} (v_{k,x_i} + v_{i,x_k})\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Aus (2.1.47) sieht man, daß die kinetische Energie keine Erhaltungsgröße ist, denn

$$\sigma^{(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2)} = -\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} \neq 0\ . \tag{2.1.48}$$

Durch Subtraktion der Leistungsbilanz (2.1.47) von der Energiebilanz (2.1.37) erhält man den Energiesatz

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho e\, dV}_{=:D\tilde{e}} &= -\oint_{\partial V(t)} \boldsymbol{q}\boldsymbol{n}\, ds + \int_{V(t)} \rho q^0\, dV + \int_{V(t)} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}\, dV\\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \underbrace{\int_{V(t)} (\rho q^0 - \,\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}) dV}_{=:DQ} + \underbrace{\int_{V(t)} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}\, dV}_{=:DW}\ ,
\end{aligned} \tag{2.1.49}$$

wobei die massenspezifische innere Energie sich aus der Differenz der Totalenergie und der kinetischen Energie ergibt:

$$e = E - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\ . \tag{2.1.50}$$

Sie ist ebenfalls keine Erhaltungsgröße, da gilt:

$$\sigma^{\rho e} = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} \neq 0\ . \tag{2.1.51}$$

Der Energiesatz läßt sich physikalisch interpretieren als

$$D\tilde{e} = DQ + DW \qquad \text{mit} \tag{2.1.52}$$

$$\begin{aligned}
DQ &= \text{zugeführte Wärme}\\
DW &= \text{Arbeit, die am System verrichtet wurde}\\
D\tilde{e} &= \text{Änderung der inneren Energie.}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung besagt, daß sich die Energie in einem materiellen Volumen durch die zugeführte Wärme und die Arbeit, die am System verrichtet wurde, ändert.
Die Erfahrung zeigt, daß $\tilde{e}$ eine Zustandsgröße ist, die Größen Q und W dagegen nicht, da für einen Kreisprozeß gilt:

$$\oint D\tilde{e} = 0,\ \oint DQ \neq 0,\ \oint DW \neq 0\ . \tag{2.1.53}$$

Der Operator D bezeichnet hier die materielle Änderung. In der Thermodynamik wird die Gleichung (2.1.52) als der 1. Hauptsatz bezeichnet (vgl. Kapitel 2.2).

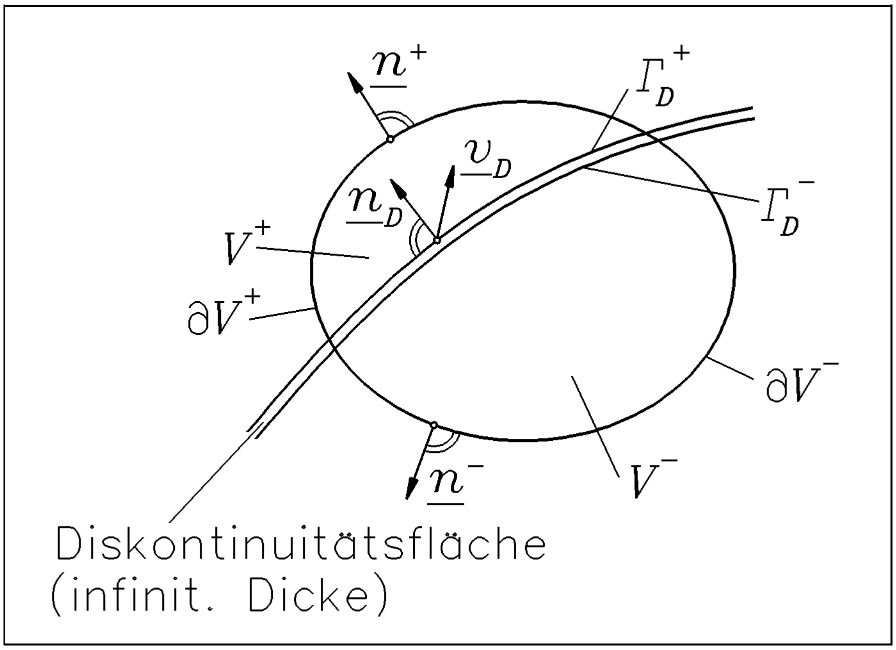


Abbildung 2: Diskontinuität

2.1.3 Stoßbedingungen

Bisher wurde bei der Betrachtung der Bilanzgleichungen vorausgesetzt, daß die Bilanzgröße f in dem betrachteten materiellen Volumen glatt ist, d.h. es treten keine Sprünge auf. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. So kann sich ein materieller Körper zum Beispiel aus unterschiedlichen Materialien zusammensetzen. Es stellt sich die Frage, ob jede beliebige Unstetigkeit zugelassen ist, oder ob gewisse Bedingungen erfüllt sein müssen. Betrachte dazu ein materielles Volumen $V(t)$ — auf das Zeitargument wird im folgenden verzichtet —, das durch eine Diskontinuitätsfläche Γ_D in zwei Teilgebiete unterteilt wird (vgl. Bild 2).
Hierbei werden folgende Notationen verwendet:

$$\begin{aligned}
V &:= V^+ \cup V^- \\
\Gamma^+ &:= \partial V^+ \backslash \Gamma_D^+ \\
\Gamma^- &:= \partial V^- \backslash \Gamma_D^- \\
\Gamma_D^V &:= \Gamma_D \cap V \\
\Gamma_D &= \text{Diskontinuitätsfläche} \\
\boldsymbol{n}_D &= \text{Normale zu } \Gamma_D = \text{äußere Normale zu } V^- \\
\boldsymbol{v}_D &= \text{Geschwindigkeit von } \Gamma_D \\
[f] &:= f|_{\boldsymbol{x}\in\Gamma_D^+} - f|_{\boldsymbol{x}\in\Gamma_D^-} \quad \text{(analog für } \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{n},\ \text{etc.)} \\
f^\pm &:= f|_{V^\pm} \quad \text{(analog für } \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{n},\ \text{etc.)} \\
\partial V^+ &:= \Gamma^+ \cup \Gamma_D^V \\
\partial V^- &:= \Gamma^- \cup \Gamma_D^V
\end{aligned}$$

$$\partial V \;:=\; \Gamma^+ \cup \Gamma^-$$

Die materielle Änderung der Bilanzgröße f über das materielle Volumen V ist dann gegeben durch (2.1.33). Da über die Diskontinuität aufgrund der Wahrung des Zusammenhangs kein Massenaustausch erfolgt, kann die Volumenintegration für die Teilgebiete V^+ und V^- getrennt durchgeführt werden. Man beachte dabei, daß das Randintegral über ∂V nicht analog durch die Randintegrale über $\partial V^\pm$ ersetzt werden darf. Dazu müßten die Randintegrale über $\Gamma_D^\pm$ wieder abgezogen werden. Somit geht (2.1.32) über in

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\int_V f\,dV \;=\; & \int_{\Gamma^+} \boldsymbol{J}^{(f^+)}\boldsymbol{n}^+\,ds + \int_{V^+} l^{(f^+)}\,dV^+ + \int_{V^+}\sigma^{(f^+)}\,dV^+ + \\ & \int_{\Gamma^-} \boldsymbol{J}^{(f^-)}\boldsymbol{n}^-\,ds + \int_{V^-} l^{(f^-)}\,dV^- + \int_{V^-}\sigma^{(f^-)}\,dV^- \,. \end{aligned} \tag{2.1.54}$$

Mit (2.1.31) gilt aber andererseits

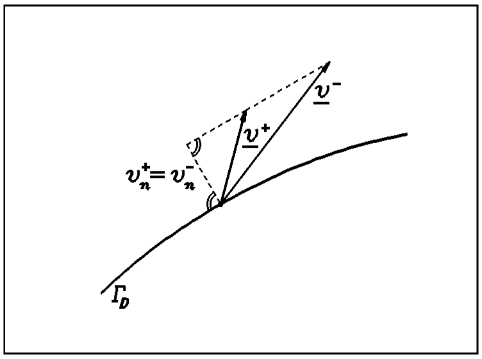
$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\int_V f\,dV \;&\overset{\text{Def. } V}{=}\; \frac{D}{Dt}\int_{V^+} f^+\,dV^+ + \frac{D}{Dt}\int_{V^-} f^-\,dV^- \\ &\overset{\text{Leibniz}}{=}\; \int_{V^\pm}\frac{\partial f^\pm}{\partial t}dV^\pm + \int_{\partial V^\pm} f^\pm(\boldsymbol{v}^\pm\boldsymbol{n}^\pm)\,ds \\ &\overset{\text{Def. } \partial V^\pm}{=}\; \int_{V^+}\frac{\partial f^+}{\partial t}dV^+ + \int_{\Gamma^+} f^+(\boldsymbol{v}^+\boldsymbol{n}^+)\,ds + \int_{\Gamma_D^+} f^+(\underbrace{\boldsymbol{v}^+}_{\boldsymbol{v}_D}\underbrace{\boldsymbol{n}^+}_{-\boldsymbol{n}_D})\,ds + \\ &\qquad \int_{V^-}\frac{\partial f^-}{\partial t}dV^- + \int_{\Gamma^-} f^-(\boldsymbol{v}^-\boldsymbol{n}^-)\,ds + \int_{\Gamma_D^-} f^-(\underbrace{\boldsymbol{v}^-}_{\boldsymbol{v}_D}\underbrace{\boldsymbol{n}^-}_{\boldsymbol{n}_D})\,ds \\ &\overset{\text{Def. } [.]}{=}\; \int_{V^\pm}\frac{\partial f^\pm}{\partial t}dV^\pm + \int_{\Gamma^\pm} f^\pm(\boldsymbol{v}^\pm\boldsymbol{n}^\pm)\,ds - \int_{\Gamma_D^V}[f](\boldsymbol{v}_D\boldsymbol{n}_D)\,ds \,. \end{aligned} \tag{2.1.55}$$

Hierbei beachte man, daß die Leibnizregel nicht auf das Gebiet V sondern nur auf die Teilgebiete $V^\pm$ angewendet werden darf, da die Existenz der stetigen partiellen Orts- und Zeitableitungen benötigt wird. Aus (2.1.54) und (2.1.55) folgt unmittelbar

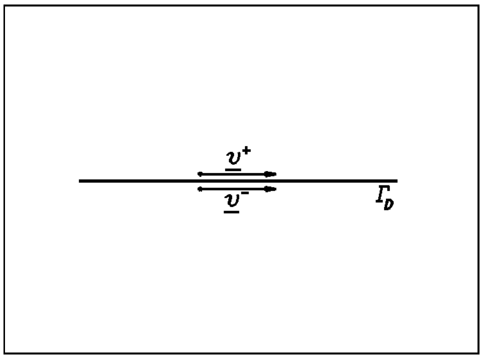
$$\begin{aligned} & \int_{V^\pm}\frac{\partial f}{\partial t}dV^\pm + \int_{\Gamma^\pm} f^\pm(\boldsymbol{v}^\pm\boldsymbol{n}^\pm)\,ds - \int_{\Gamma_D^+} f^+(\boldsymbol{v}_D\boldsymbol{n}_D)\,ds + \int_{\Gamma_D^-} f^-(\boldsymbol{v}_D\boldsymbol{n}_D)\,ds \\ = & \int_{\Gamma^\pm}\boldsymbol{J}^{(f^\pm)}\boldsymbol{n}\,ds + \int_{V^\pm} l^{(f^\pm)}\,dV^\pm + \int_{V^\pm}\sigma^{(f^\pm)}\,dV^\pm \,. \end{aligned} \tag{2.1.56}$$

Da das materielle Volumen beliebig gewählt ist, kann insbesondere der Grenzwertprozeß für $V \to \Gamma_D^V$ durchgeführt werden. Die Integrale und Normalen gehen dabei über in

$$\begin{aligned} & \int_{V^\pm}(\ldots)\,dV^\pm \to 0, \quad \int_{\Gamma^\pm}(\ldots)^\pm\,ds \to \int_{\Gamma_D^\pm}(\ldots)^\pm\,ds, \\ & \boldsymbol{n}^+ \to \boldsymbol{n}_D, \quad \boldsymbol{n}^- \to -\boldsymbol{n}_D \,. \end{aligned} \tag{2.1.57}$$



a) *instationär*



b) *stationär*

Abbildung 3: Kontaktdiskontinuität

Bei diesem Grenzwertprozeß geht aber $\boldsymbol{v}$ nicht in $\boldsymbol{v}_D$ über. Aus (2.1.56) folgt mit (2.1.57) nun die Grenzwertgleichung

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Gamma_D^+} f^+(\boldsymbol{v}^+\boldsymbol{n}_D)\,ds - \int\limits_{\Gamma_D^-} f^-(\boldsymbol{v}^-\boldsymbol{n}_D)\,ds - \int\limits_{\Gamma_D^+} f^+(\boldsymbol{v}_D\boldsymbol{n}_D)\,ds + \int\limits_{\Gamma_D^-} f^-(\boldsymbol{v}_D\boldsymbol{n}_D)\,ds \\ = &\int\limits_{\Gamma_D^+} \boldsymbol{J}^{(f^+)}\boldsymbol{n}_D\,ds - \int\limits_{\Gamma_D^-} \boldsymbol{J}^{(f^-)}\boldsymbol{n}_D\,ds\;. \end{aligned} \tag{2.1.58}$$

Da die Diskontinuitätsfläche eine infinitesimale Dicke hat, sind insbesondere Γ_D^+ und Γ_D^- identisch mit Γ_D^V. Somit ist (2.1.58) äquivalent zu

$$\int\limits_{\Gamma_V^D} [f\boldsymbol{v}]\boldsymbol{n}_D - [f\boldsymbol{v}_D\boldsymbol{n}_D] - [\boldsymbol{J}^{(f)}\boldsymbol{n}_D]\,ds = 0\;. \tag{2.1.59}$$

Da Γ_D^V beliebig ist, muß der Integrand in (2.1.59) verschwinden. Dies führt auf die Stoßbedingungen

$$\boxed{\begin{array}{ll} [fu - \boldsymbol{J}^{(f)}\boldsymbol{n}_D] \overset{!}{=} 0 & \\ u = (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_D)\boldsymbol{n}_D & \text{relative Normalgeschw.} \end{array}} \tag{2.1.60}$$

Ist die relative Normalgeschwindigkeit auf beiden Seiten der Diskontinuität gleich, so spricht man von einer Kontaktunstetigkeit (vgl. Bild 3).
In diesem Fall geht (2.1.60) wegen $[u] = 0$ über in

$$\begin{aligned} [u] = [\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}_D] &\overset{!}{=} 0 \qquad \text{und} \\ \left[\boldsymbol{J}^{(f)}\boldsymbol{n}_D\right] &\overset{!}{=} 0\;. \end{aligned} \tag{2.1.61}$$

Ist zudem die Geschwindigkeit der Diskontinuitätsfläche Null, d.h. $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{0}$, so bedeutet dies, daß sich die Teilchen entlang der Diskontinuität parallel zueinander bewegen (vgl. Bild 3).

2.2 Thermodynamik

2.2.1 Historischer Rückblick

Man unterscheidet in der Thermodynamik zwischen der klassischen und der statistischen Thermodynamik. Der klassische Zweig ist die allgemeine Wärme– und Energielehre bzw. die Lehre von den Gleichgewichtszuständen. Sie hat ihren Ursprung in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Die Arbeit von L.S. Carnot (1824) über die Gewinnung von Nutzarbeit aus Wärme war hier grundlegend. Sie behandelte dieses Thema zum ersten Mal in allgemeiner Weise. Er entdeckte ein allgemein gültiges Naturgesetz, das heute als der 2. Hauptsatz der Thermodynamik bekannt ist. J.R. Mayer zeigte dann 1842 die Äquivalenz von Wärme und Arbeit, d.h. Wärme kann in Arbeit umgewandelt werden und vice versa. Er ist der Entdecker des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik und des Energieerhaltungssatzes. Diese wurden von J.P. Joule (1843-1848) experimentell verifiziert. W. Thomson zeigte 1841, daß bei allen natürlichen Prozessen der Vorrat an umwandelbarer oder arbeitsfähiger Energie verringert wird (dissipation of energy). R. Clausius (1850) war es schließlich, der die beiden Hauptsätze zum ersten Mal klar formulierte. Dazu führte er den Begriff der Entropie (1865) ein.
Diese grundlegenden Erkenntnisse führten zu einer Reihe von neuen und allgemein gültigen Gesetzen für das Verhalten der Materie in den unterschiedlichen Aggregatzuständen. So begründete J.W. Gibbs in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts ausgehend vom Entropiebegriff die physikalische Chemie. Er leitete allgemein gültige Kriterien für das thermodynamische Gleichgewicht von Systemen, das aus mehreren Phasen besteht, her.
G.N. Lewis trug ebenfalls viel zur Thermodynamik von Gemischen bei. Zur Beschreibung des chemischen Gleichgewichts sind aber neben thermischen und kalorischen Daten zusätzlich Entropiewerte der einzelnen Stoffe erforderlich. Diese können aus dem Wärmetheorem von W. Nernst (1906) und M. Planck (1911), das heute auch als 3. Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnet wird, bestimmt werden. Dieses Theorem macht Aussagen über das Verhalten der Entropie am absoluten Nullpunkt der Temperatur.
Die Herleitung der klassischen Thermodynamik beruht im wesentlichen auf dem Wärmebegriff. C. Caratheodory (1909) begründete diese Theorie rein axiomatisch. Dabei verzichtete er insbesondere auf den Wärmebegriff.
Ausgehend von der kinetischen Gastheorie entwickelten L. Boltzmann und J.W. Gibbs in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts die statistische Thermodynamik. Dabei gingen sie vom atomistischen Aufbau der Materie aus und wendeten die Gesetze der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik auf Teilchen (Atome, Moleküle) an. Durch statistische Methoden stellten sie einen Zusammenhang zwischen den Teilcheneigenschaften und den makroskopischen Eigenschaften ($\rightarrow$ vgl. klass. Thermodynamik) her.

2.2.2 1. und 2. Hauptsatz

Nach diesem historischen Rückblick, der dem Buch von Baehr [Ba] entnommen ist, sollen im folgenden die beiden Hauptsätze vorgestellt werden, wie sie im thermodynamischen Gleichgewicht gelten. Unter einem thermodynamischen Gleichgewicht versteht man die folgenden drei Gleichgewichtszustände eines Systems:

mechanisch: keine Kraft im System oder zwischen System und Umgebung ist unausgeglichen, d.h. gleicher Druck;

thermisch: Temperatur ist im System überall gleich und ist die gleiche zur Umgebung;

chemisch: System hat keine Neigung, die chemische Zusammensetzung zu ändern.

Unter dieser Voraussetzung gilt

Satz 2.1 *1. Hauptsatz der Thermodynamik*

a) Es existiert im System eine extensive Zustandsgröße, die innere Energie $\tilde{e}$ (massenspezifisch: $e = \tilde{e}/m$);

b) In einem geschlossenen System gilt für einen reversiblen Prozeß:

$$d\tilde{e} = dQ + dW = dQ + dW_{\text{rev}}. \tag{2.2.1}$$

Unter einer extensiven Größe versteht man dabei eine Größe, deren Wert sich bei einer gedachten Teilung eines Systems als Summe der Größen der einzelnen Teile ergibt (z.B. Energie). Eine intensive Größe bleibt dagegen bei der gedachten Teilung eines homogenen Systems in allen Teilen gleich (z.B. Druck), sie ist insbesondere meßbar.
Die reversible Arbeit besteht in einem geschlossenen System in der Volumenänderungsarbeit:

$$dW_{rev} = -p\,dV. \tag{2.2.2}$$

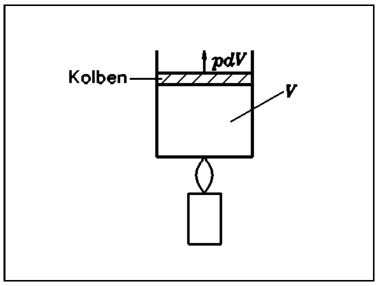


Abbildung 4: Volumenänderungsarbeit

Die Gleichung (2.2.1) wurde schon aus der kontinuumsmechanischen Betrachtung abgeleitet (vgl. (2.1.52)). Dort wurden jedoch beliebige Prozesse in einem materiellen Volumen zugelassen. Hier wird die totale Änderung — gekennzeichnet durch den Operator d — in einem geschlossenen System betrachtet, d.h. die Systemgrenzen sind undurchlässig für Materie, die Stoffmenge ist somit konstant in dem Volumen, während das Volumen aber variabel ist. Außerdem muß der Prozeß in diesem System reversibel sein, d.h. die Zustandsänderung kann rückgängig gemacht werden, ohne Änderungen in der Umgebung zu hinterlassen. Diffusion, Reibung und Wärmeleitung werden also vernachlässigt.
Weiterhin gilt im thermodynamischen Gleichgewicht

Satz 2.2 *2. Hauptsatz der Thermodynamik*

Es existiert eine extensive Zustandsgröße, die Entropie $\tilde{s}$ (massenspezifisch: $s = \tilde{s}/m$);

in einem geschlossenen System gilt:

a) reversibler Prozeß:

$$d\tilde{s} = \frac{(dQ)_{\text{rev}}}{T} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{s}_B - \tilde{s}_A = \int_A^B \frac{(dQ)_{\text{rev}}}{T}; \tag{2.2.3}$$

b) irreversibler Prozeß:

$$d\tilde{s} = d\tilde{s}_{\text{rev}} + d\tilde{s}_{\text{irrev}} = \frac{(dQ)_{\text{rev}}}{T} + d\tilde{s}_{\text{irrev}} \geq 0; \tag{2.2.4}$$

$$d\tilde{s}_{\text{irrev}} > 0. \tag{2.2.5}$$

Die physikalische Größe Entropie ist von enormer Bedeutung. Sie kennzeichnet nämlich die Richtung, in der ein Prozeß in der Natur abzulaufen hat (vgl. (2.2.4), (2.2.5)). So wird ein Eisstück auf einer heißen Platte schmelzen und nicht etwa noch kälter werden. In der Quantenmechanik kann die Entropie mittels der Boltzmann–Relation

$$\tilde{s} = k \ln W \tag{2.2.6}$$

beschrieben werden. W gibt dabei die Anzahl der möglichen (mikroskopischen) Energiezustände an, um den makroskopischen Systemzustand zu beschreiben, und k die Boltzmann–Konstante. Mittels (2.2.6) kann die Entropie als ein Maß für die Unordnung in einem System interpretiert werden, denn je mehr Positionen möglich sind, d.h. die Vorhersage wird zunehmend unsicherer, umso größer ist die Entropie.
Aus (2.2.1) und (2.2.3) folgt nun unmittelbar die Gibbs–Relation

$$\begin{aligned} T\,d\tilde{s} &= d\tilde{e} + p\,dV \\ \text{bzw. } T\,ds &= de - \frac{p}{\rho^2} d\rho \,, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

da die Masse $m = \rho V = \text{const.}$ ist. Diese stellt die Beziehung zwischen der inneren Energie und der Entropie her. Man beachte dabei, daß in (2.2.7) nur Zustandsgrößen auftreten, im Gegensatz zu (2.2.1), (2.2.3) und (2.2.4).
Abschließend sei noch bemerkt, daß im thermodynamischen Gleichgewicht eine der sogenannten thermodynamischen Variablen

- Druck p,
- massenspezifisches Volumen $\tau := 1/\rho$,
- Temperatur T,
- massenspezifische Entropie s,
- massenspezifische innerer Energie e

durch je zwei andere beschrieben werden kann, z.B. $\tau = \tau(p, T)$. Die Erfahrung zeigt beispielsweise, daß bei steigender Temperatur und konstantem Druck das Volumen zunimmt (vgl. Bild 4). Dies läßt sich dann darstellen durch die Ungleichung

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_{p=\text{const.}} \overset{!}{>} 0 \,.$$

2.3 Navier–Stokes–Gleichungen

2.3.1 Konservative Form

Die lokalen Bilanzgleichungen der Masse (2.1.43), des Impulses (2.1.44) und der Energie (2.1.45) bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen, den sogenannten Navier–Stokes–Gleichungen. Diese lassen sich unter Vernachlässigung der Fernkräfte und mittels der Definition der materiellen Zeitableitung (2.1.7) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
&\rho_{,t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\
&(\rho \boldsymbol{v})_{,t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T + pI) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau_v}) \\
&(\rho E)_{,t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} H) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau_v}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{q})\ .
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Diese Darstellung gilt für beliebige Koordinaten, falls die Divergenz und der Gradient im Sinne der Tensorrechnung interpretiert werden. (vgl. Anhang (5.1) und (5.1.45)). Darin sind $\boldsymbol{\tau_v}$ der Tensor der Reibungsspannungen und $\boldsymbol{q}$ der Wärmeleitungsfluß gemäß dem Gesetz von Fourier gegeben durch

$$\boldsymbol{\tau_v} := \mu_S \left(\mathbf{grad}\, \boldsymbol{v} + (\mathbf{grad}\, \boldsymbol{v})^T - \frac{2}{3}(\operatorname{div} \boldsymbol{v})\boldsymbol{I} \right) + \mu_B(\operatorname{div} \boldsymbol{v})\boldsymbol{I}\ , \tag{2.3.2}$$

$$\boldsymbol{q} := -\lambda\, \mathbf{grad}\, T\ , \tag{2.3.3}$$

sowie H, die massenspezifische Totalenthalpie,

$$H := E + p/\rho \overset{(2.1.50)}{=} e + p/\rho + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\ . \tag{2.3.4}$$

Letztere kann auch über die massenspezifische Enthalpie h

$$h := e + p/\rho \tag{2.3.5}$$

definiert werden.

Um das System (2.3.1) vollständig zu beschreiben, müssen noch zwei Gleichungen für den Druck p und die Temperatur T angegeben werden. Diese werden als sogenannte Zustandsgleichungen bezeichnet. Man unterscheidet zwischen der thermischen und der kalorischen Zustandsgleichung. Im thermodynamischen Gleichgewicht können diese durch je zwei thermodynamische Variablen beschrieben werden, z.B.

$$\begin{aligned}
p &= p(\rho, T) \qquad &&\text{(thermische Zustandsgleichung),} \\
e &= e(T) \qquad &&\text{(kalorische Zustansgleichung).}
\end{aligned}$$

Im Fall eines sogenannten thermisch perfekten Gases wird die Beziehung

$$p = \rho R T \tag{2.3.6}$$

verwendet, wobei R die spezifische Gaskonstante ist, die vom betrachteten Gas abhängt, aber im thermodynamischen Gleichgewicht konstant ist. Betrachtet man ferner zum Beispiel Luft in Umgebungstemperatur, so wird die kalorisch perfekte Zustandsgleichung verwendet. Diese besagt, daß die isochoren und isobaren Wärmekapazitäten c_v und c_p, definiert durch

$$c_p \;:=\; \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{p=\text{const.}} , \tag{2.3.7}$$

$$c_v \;:=\; \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{V=\text{const.}} , \tag{2.3.8}$$

konstant sind. Daraus folgt für die innere Energie der Zusammenhang

$$e = c_v T \; . \tag{2.3.9}$$

Für das Verhältnis γ der Wärmekapazitäten gilt ganz allgemein:

$$c_p = c_v + R \; , \tag{2.3.10}$$

$$\gamma := \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} \; . \tag{2.3.11}$$

Ist ein Gas sowohl thermisch als auch kalorisch perfekt, so bezeichnet man dieses als ein perfektes Gas.
Das Gleichungssystem (2.3.1) läßt sich in die sogenannte konservative Form bringen

$$\boldsymbol{u}_{,t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{F}_1^I, \ldots, \boldsymbol{F}_d^I) = \operatorname{div}(\boldsymbol{F}_1^V, \ldots, \boldsymbol{F}_d^V) \qquad \text{mit} \tag{2.3.12}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (\rho, \rho\boldsymbol{v}, \rho E)^T \\ \boldsymbol{F}_i^I(\boldsymbol{u}) &= (\rho v_i, \rho\boldsymbol{v} v_i + p\boldsymbol{e}_i, \rho v_i H)^T, \quad i = 1, d \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

$$\boldsymbol{F}_i^V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{,x_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{,x_d}) = \Big(0, \boldsymbol{\tau}^i, (\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{v})_i - q_i)\Big)^T \tag{2.3.14}$$

und den Notationen

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\tau}^i = i - \text{te Spalte von } \boldsymbol{\tau} = \mu_S(\mathbf{grad}\, v_i + \boldsymbol{v}_{,x_i}) - \left(\frac{2}{3}\mu_S - \mu_B\right) \boldsymbol{e}_i \operatorname{div} \boldsymbol{v} \\ &\tau_l^i = \mu_S(v_{i,x_l} + v_{l,x_i}) - \left(\frac{2}{3}\mu_S - \mu_B\right) (\operatorname{div} \boldsymbol{v})\, \delta_{il} \\ &(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{v})_i = \mu_S(\boldsymbol{v}_{,x_i}\boldsymbol{v} + (\mathbf{grad}\, v_i)\boldsymbol{v}) - \left(\frac{2}{3}\mu_S - \mu_B\right) v_i \operatorname{div} \boldsymbol{v} \\ &q_i = -\lambda T_{,x_i}. \end{aligned}$$

Darin sind $\boldsymbol{F}_i^I$ der reibungsfreie und $\boldsymbol{F}_i^V$ der reibungsbehaftete Fluß. Letzterer hat die Form

$$\boldsymbol{F}_i^V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{,x_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{,x_d}) = \sum_{k=1}^{d} \boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{,x_k} \qquad \text{mit} \tag{2.3.15}$$

$$\boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{F}_i^V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{,x_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{,x_d})}{\partial \boldsymbol{u}_{,x_k}} \; . \tag{2.3.16}$$

Durch Ausdifferenzieren geht (2.3.12) dann über in die sogenannte quasikonservative Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{,t} + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{A}^i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{,x_i} &= \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} \boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{,x_k} \right)_{,x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\sum_{n=1}^{m} \boldsymbol{D}^{kin}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{,x_k} u_{n,x_i} + \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} \boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{,x_k,x_i} \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

mit

$$\boldsymbol{A}^i(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{F}_i^I(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}},\ \ \boldsymbol{D}^{kin}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u})}{\partial u_n}. \tag{2.3.18}$$

2.3.2 Primitive Variablen

In der Strömungslehre werden die Strömungsgleichungen (2.3.1) häufig bezüglich der sogenannten primitiven Variablen, z.B. Dichte, Geschwindigkeit und massenspezifische Entropie, formuliert. Diese haben im thermodynamischen Gleichgewicht die Form

$$\rho_{,t} + \boldsymbol{v}\,\mathbf{grad}\,\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0\ , \tag{2.3.19}$$

$$\boldsymbol{v}_{,t} + \boldsymbol{v}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau_v}\ , \tag{2.3.20}$$

$$s_{,t} + \boldsymbol{v}\,\mathbf{grad}\,s = \frac{1}{\rho T}\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\tau_v v} - \boldsymbol{q}) - \boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau_v}/\rho T\ . \tag{2.3.21}$$

Sie lassen sich aus (2.3.1) durch sukzessives Einsetzen herleiten (vgl. Kap. 2.4.3). Dazu werden aber drei wesentliche Beziehungen benötigt. So gilt für eine beliebige skalare Größe f aufgrund der Definition des Gradienten und der Divergenz

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,(f\boldsymbol{v}) &\overset{\mathrm{def}}{=} \sum (f v_i)_{,x_i} = \sum (f_{,x_i} v_i + f v_{i,x_i}) \\ &\overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{v}\,\mathbf{grad}\,f + f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\ . \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Der Druck wird nun bezüglich der Größen ρ und s ausgedrückt, d.h. $p = p(\rho, s)$. Dazu gilt insbesondere für einen beliebigen Differentialoperator

$$dp = a^2 d\rho + p_s ds \qquad \text{mit} \tag{2.3.23}$$

$$a^2 := \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=\mathrm{const.}}, \qquad p_s := \left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_{\rho=\mathrm{const.}}. \tag{2.3.24}$$

Die Größe a ist die sogenannte Schallgeschwindigkeit. Sie läßt sich für ein thermisch perfektes Gas auch schreiben als

$$a^2 = \gamma p/\rho \geq 0\ . \tag{2.3.25}$$

In der Energiegleichung müssen schließlich noch die Ableitungen der inneren Energie mittels der Gibbs–Relation (2.2.7) bezüglich derjenigen der Dichte ρ und der Entropie s ersetzt werden, d.h.

$$\begin{aligned} de &= T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho && (2.3.26)\\ dE &= de + \boldsymbol{v} d\boldsymbol{v} \ . && (2.3.27)\end{aligned}$$

Man beachte bei der Herleitung von (2.3.19) – (2.3.21) ferner, daß die Dichte und die Temperatur positive Größen sind.
Aus der Gleichung für die Entropie läßt sich nun der sogenannte Entropiesatz herleiten. Dazu wird die Gleichung (2.3.21) mit ρ multipliziert und die Beziehung

$$\rho s_{,t} = (\rho s)_{,t} - \rho_{,t} s \qquad (2.3.28)$$

ausgenutzt. Der Term $\rho_{,t}$ wird hierin durch (2.3.19) ersetzt. Ausdifferenzieren der folgenden Terme

$$\operatorname{div}(\rho s \boldsymbol{v}) = \rho s \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} s \,\mathbf{grad}\, \rho + \boldsymbol{v} \rho \,\mathbf{grad}\, s \ , \qquad (2.3.29)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau_v v}) - \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau_v} &= \sum_{i=1}^{d} (\boldsymbol{\tau}_{v,i} \boldsymbol{v})_{,x_i} - \boldsymbol{v} \sum_{i=1}^{d} (\boldsymbol{\tau}_v^i)_{,x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{d} \Big[(\boldsymbol{\tau}_{v,i})_{,x_i} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\tau}_{v,i} \cdot \boldsymbol{v}_{,x_i} - \boldsymbol{v} (\boldsymbol{\tau}_v^i)_{,x_i} \Big] \qquad (2.3.30) \\ &\overset{\boldsymbol{\tau}_v \text{ sym.}}{=} \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{\tau}_{v,i} \boldsymbol{v}_{,x_i} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \operatorname{div} \boldsymbol{q} &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{d} q_{i,x_i} = \sum_{i=1}^{d} \left[\left(\frac{q_i}{T} \right)_{,x_i} + \frac{q_i}{T^2} (\rho T)_{,x_i} \right] \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\boldsymbol{q}}{T} \right) + \frac{\boldsymbol{q}}{T^2} \,\mathbf{grad}\, T \end{aligned} \qquad (2.3.31)$$

ergibt schließlich die gewünschte Darstellung des Entropiesatzes:

$$(\rho s)_t + \operatorname{div}(\rho s \boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{q}/T) = \tfrac{1}{T} \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{\tau}_{v,i} \boldsymbol{v}_{,x_i} - \boldsymbol{q}/T^2 \,\mathbf{grad}\, T \ . \qquad (2.3.32)$$

Darin wird $\rho s \boldsymbol{v}$ als reibungsfreier Entropiefluß und q_i/T als reibungsbehafteter Entropiefluß bezeichnet. Der Term auf der rechten Seite von (2.3.32) bildet die Entropieproduktion. Er ist nicht negativ. Dies folgt aus der Positivität der Koeffizienten λ, μ_s, μ_B. Diese wird zum Beispiel von Müller und Ruggeri mit Mitteln der kinetischen Gastheorie ([MR], S. 13) gezeigt.
Dies ist konsistent zum 2. Hauptsatz der Thermodynamik, der besagt, daß die Entropie nur zunehmen aber nicht abnehmen kann (vgl. (2.2.4)). Es ergibt sich also aus (2.3.32) die Entropieungleichung

$$(\rho s)_{,t} + \operatorname{div}(\rho s \boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{q}/T) \geq 0 \ . \qquad (2.3.33)$$

2.3.3 Dimensionslose Form

In der Praxis werden häufig verkleinerte Modelle im Experiment untersucht. Man ist jedoch daran interessiert, die Ergebnisse auf das reale Modell (z.B. Auto, Flugzeug, etc.) zu übertragen. Dies geht nicht so ohne weiteres. Dazu müssen gewisse, die Strömung charakterisierende Größen, im Experiment und der Natur (Realität) übereinstimmen. Um diese Größen zu bestimmen, werden die Navier–Stokes–Gleichungen dimensionslos gemacht. Dazu führt man folgende Referenzgrößen ein:

L	$=$	Referenzlänge	μ^*	$=$	Referenzkoeffizient für Viskosität
v^*	$=$	Referenzgeschw.	λ^*	$=$	Referenzkoeffizient für Wärmeleitung
ρ^*	$=$	Referenzdichte.			

Daraus lassen sich weitere Referenzgrößen ableiten:

L/v^*	$=$	Referenzzeit	v^{*^2}	$=$	Referenzenergie
$\rho^* v^{*^2}$	$=$	Referenzspannung	$\rho^* v^{*^3}$	$=$	Referenzwärmeleitung.

Die Gleichungen (2.3.1) werden nun einer Koordinatentransformation

$$\tilde{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{x}/L, \qquad \tilde{t} := t/(L/v^*) \tag{2.3.34}$$

und einer Variablentransformation

$$\begin{array}{lllllllll} \tilde{\rho} & := & \rho/\rho^*, & \tilde{\boldsymbol{v}} & := & \boldsymbol{v}/v^*, & \tilde{E} & := & E/v^{*^2} \\ \tilde{p} & := & p/(\rho^* v^{*^2}), & \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v & := & \boldsymbol{\tau}_v/(\mu^* v^*/L), & \tilde{\boldsymbol{q}} & := & \boldsymbol{q}/(\lambda^* v^{*^2}/L) \end{array} \tag{2.3.35}$$

unterzogen. Die Differentialoperatoren transformieren sich dabei wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{L}{v^*}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} = L\frac{\partial}{\partial x_l}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_l \partial \tilde{x}_k} = L^2 \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \; . \tag{2.3.36}$$

Für eine beliebige dimensionslose Größe $\tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{t}) := f(\boldsymbol{x}, t)/f^*$ gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} &= \frac{1}{f^*}\frac{L}{v^*}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \, , \\ \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}_l} &= \frac{1}{f^*} L \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_l} \, , \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}_l \partial \tilde{x}_k} &= \frac{1}{f^*} L^2 \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_l \partial x_k} \, . \end{aligned} \tag{2.3.37}$$

Die Navier–Stokes–Gleichungen gehen damit über in die dimensionslose Form

$$\begin{aligned} &\tilde{\rho}_{,\tilde{t}} + \operatorname{div} \tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{v}} = 0 \, , \\ &(\tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{v}})_{,\tilde{t}} + \operatorname{div}(\tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{v}}\tilde{\boldsymbol{v}}^T + \tilde{p}\boldsymbol{I}) = \frac{1}{Re} \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \, , \\ &(\tilde{\rho}\tilde{E})_{,\tilde{t}} + \operatorname{div}(\tilde{\rho}\tilde{\boldsymbol{v}}(\tilde{E} + \tilde{p}/\tilde{\rho})) = \frac{1}{Re} \operatorname{div} \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \tilde{\boldsymbol{v}} - \tilde{\boldsymbol{q}} \frac{c_p}{Pr} \right) . \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

Hierin ist Re die sogenannte Reynolds–Zahl und Pr die Prandtl–Zahl:

$$Re := v^* \rho^* L/\mu^* \quad Pr := \mu^* c_p/\lambda^* \; . \tag{2.3.39}$$

Sie gibt die Zähigkeit einer Strömung an. Je kleiner diese ist, umso größer ist die Zähigkeit und vice versa.
Will man nun Ergebnisse aus einem Experiment auf die Realität übertragen, so muß man darauf achten, daß die Kenngrößen Re und Pr aus dem Experiment mit denjenigen in der realen Situation übereinstimmen. Bei dem hier betrachteten Modell ist das noch möglich. Geht man aber zu komplexeren Modellen über, so treten weitere Kennzahlen auf. Diese können aber im Experiment im allgemeinen nicht mehr so gewählt werden, daß sie alle mit der realen Situation übereinstimmen.

2.4 Modifikationen

2.4.1 Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Ein wichtiger Spezialfall der Navier-Stokes-Gleichungen stellt die inkompressible Strömung dar. Darunter versteht man solche Strömungen, in denen keine oder nur eine vernachlässigbar geringe Kompression stattfindet. Das bedeutet aber nicht, daß das Fluid als solches nicht kompressibel sein muß. In diesem Fall wird die Dichte als konstant angenommen, d.h.

$$\rho = \rho_0 = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0. \tag{2.4.1}$$

Somit können alle räumlichen und zeitlichen Änderungen bezüglich ρ in (2.3.1) eliminiert werden. Für die Kontinuumsgleichung ergibt sich somit die Nebenbedingung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{2.4.2}$$

Verwendet man diese Identität in der Impulsgleichung, so ergibt sich mit (2.3.22)

$$\boldsymbol{v}_{,t} + \boldsymbol{v}^T \,\mathbf{grad}\, \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\, p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_v \tag{2.4.3}$$

und der Tensor der Reibungsspannungen nimmt die Form

$$\boldsymbol{\tau}_v = \mu_s \left[\mathbf{grad}\, \boldsymbol{v} + (\mathbf{grad}\, \boldsymbol{v})^T\right] \overset{(2.1.47)}{=} 2\mu_s \boldsymbol{d} \tag{2.4.4}$$

an. Die Divergenz dieses Tensors hat unter Berücksichtigung von (2.4.2) die Darstellung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_v = 2\boldsymbol{d}\,\mathbf{grad}\, \eta_s + \eta_s \Delta \boldsymbol{v}, \tag{2.4.5}$$

wobei

$$\Delta := \operatorname{div}\, \mathbf{grad}$$

als der Laplace-Operator definiert ist.
Somit geht (2.4.3) über in

$$\boldsymbol{v}_{,t} + \boldsymbol{v}\,\mathbf{grad}\, \boldsymbol{v} + \mathbf{grad}\, \tilde{p} = 2\boldsymbol{d}\,\mathbf{grad}\, \nu + \nu \Delta \boldsymbol{v} \tag{2.4.6}$$

mit

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\mu_s}{\rho} \quad \text{(kinematische Viskosität)}$$

Wendet man auf (2.4.6) den Divergenz-Operator an, so ergibt sich mit (2.4.2)

$$\Delta \tilde{p} = \operatorname{div} \left(2\boldsymbol{d}\,\mathbf{grad}\, \nu + \nu \Delta \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^T \,\mathbf{grad}\, \boldsymbol{v}\right). \tag{2.4.7}$$

In der Regel wird der Viskositätskoeffizient als konstant vorausgesetzt. Dann kann der Druck aus (2.4.7) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit berechnet werden. Dadurch wird die Energiegleichung von den lokalen Bilanzgleichungen (2.3.1) separiert. Diese nimmt unter der Voraussetzung (2.4.2) die Form

$$e_{,t} + \boldsymbol{v}\,\mathbf{grad}\, e + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{q} - 2\nu \boldsymbol{d} : \boldsymbol{d} = 0 \tag{2.4.8}$$

an. Sie kann aus (2.1.49), (2.1.31) und (2.1.41) hergeleitet werden. Durch die thermische Zustandsgleichung (2.3.7) für thermisch perfektes Gas kann die Temperatur in der Wärmeleitung $\boldsymbol{q}$ durch den Druck ersetzt werden. Man beachte, daß für kalorisch und thermisch perfektes Gas mit den Zustandsgleichungen (2.3.6) und (2.3.9) die Energie eindeutig festgelegt wäre. Diese gelten aber für inkompressible Strömungen nicht. Somit entsteht kein Widerspruch zu der hier hergeleiteten Energiegleichung 2.4.8.
Die Gleichungen (2.4.6) und (2.4.2) beziehungsweise (2.4.7) bilden die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, falls $\nu > 0$ ist. Als Randbedingungen werden an der Wand

$$\nu > 0: \quad \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{(no-slip condition)}, \quad \mathbf{grad}\, \tilde{p} \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

(vgl. [CM], S. 47, [PT], S. 15) verwendet.
Für $\nu = 0$ erhält man die inkompressiblen Euler-Gleichungen. In diesem Fall geht (2.4.7) über in

$$\Delta \left(\tilde{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \right) = 0. \tag{2.4.9}$$

An der Wand verwendet man in diesem Fall folgende Randbedingungen

$$\nu = 0: \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{(slip condition)}.$$

Ist die Strömung stationär und rotationsfrei, dann kann zur Bestimmung des Druckes auch

$$\tilde{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 = \text{const.} \tag{2.4.10}$$

verwendet werden.
Die Energiegleichung (2.4.8) geht für $\nu = 0$, $\lambda = 0$ über in

$$e_{,t} + \boldsymbol{v}\, \mathbf{grad}\, e = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = 0$$

d.h. die innere Energie ist im reibungs- und wärmeleitungsfreien Fall entlang einer Teilchenbahn konstant.

2.4.2 Eulergleichungen

Vernachlässigt man in den Navier–Stokes–Gleichungen (2.3.1) die rechte Seite, so ergeben sich die sogenannten Eulergleichungen:

$$\begin{aligned} \rho_{,t} &+ \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0\,, \\ (\rho \boldsymbol{v})_{,t} &+ \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T + p\boldsymbol{I}) = 0\,, \\ (\rho E)_{,t} &+ \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} H) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Diese erhält man aus den dimensionslosen Navier–Stokes–Gleichungen (2.3.38), indem man den Grenzwertübergang $\mu^* \to 0$ und $\lambda^* \to 0$ durchführt. Dies entspricht einer reibungs- und wärmeleitungsfreien Strömung. In diesem Fall gilt insbesondere auch $Re \to \infty$. Sie beschreiben somit eine reibungsfreie Strömung. In den kommenden Kapiteln sollen Gleichungen vom obigen Typ allgemein untersucht werden.

2.4.3 p–System

In der mathematischen Analyse von Systemen hyperbolischer Erhaltungssätzen wird das sogenannte p–System betrachtet. Dies ist ein einfaches nichtlineares System, da es nur aus zwei Gleichungen besteht, und nur in einer Komponente eine nichtlineare Kopplung aufweist.
Ausgangspunkt der Herleitung des p–Systems sind die Eulergleichungen in einer Raumdimension:

$$\rho_{,t} + (\rho v)_{,x} = 0 \,, \tag{2.4.12}$$
$$(\rho v)_{,t} + (\rho v^2 + p)_{,x} = 0 \,, \tag{2.4.13}$$
$$(\rho E)_{,t} + (\rho v(E + p/\rho))_{,x} = 0 \,. \tag{2.4.14}$$

Um das Gleichungssystem (2.4.12), (2.4.13), (2.4.14) abzuschließen, werden noch weitere Annahmen, die das Fluid charakterisieren, benötigt:

1.) Das Fluid sei isentrop, d.h. die Entropie s ist konstant, also

$$ds = 0 \,; \tag{2.4.15}$$

2.) Das Fluid sei kalorisch und thermisch perfekt, d.h. die Beziehungen (2.3.9), (2.3.6) und (2.3.11) sind erfüllt. Hierbei sind c_p, c_v die isobare bzw. die isochore Wärmekapazität und R die spezifische Gaskonstante also insbesondere konstant;

3.) Das Fluid befinde sich im thermodynamischen Gleichgewicht. In diesem Fall gilt die Gibbs-Relation (vgl. (2.2.7)):

$$Tds = de + pd\tau = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho \tag{2.4.16}$$

mit

$$\tau = 1/\rho \,. \tag{2.4.17}$$

Daraus können nun einige Schlußfolgerungen gezogen werden:
Mit (2.4.15) und (2.4.16) folgt:

$$de = \frac{p}{\rho^2} d\rho \,. \tag{2.4.18}$$

Aus (2.3.9), (2.3.6) und (2.3.11) folgt andererseits:

$$e = \frac{c_v}{R}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \,. \tag{2.4.19}$$

Damit gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \frac{de}{e} &= (\gamma - 1)\frac{d\rho}{\rho} \Leftrightarrow \\ \ln e\big|_{e_0}^{e} &= (\gamma - 1) \ln \rho\big|_{\rho_0}^{\rho} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(e/e_0) &= \ln(\rho/\rho_0)^{\gamma-1} \Leftrightarrow \\
e &= e_0\rho_0^{1-\gamma}\rho^{\gamma-1} \Leftrightarrow \\
p &= (\gamma-1)e_0\rho_0^{1-\gamma}\rho^{\gamma} \; .
\end{aligned}$$

Somit gilt für den Druck:

$$p = k\rho^{\gamma} \quad \text{mit} \quad k = const. \tag{2.4.20}$$

Die Eulergleichungen sollen nun auf die primitiven Variablen τ, v, s umgeschrieben werden (vgl. Kap. 2.3.2). Dies soll hier zur Demonstration ausführlich durchgeführt werden. Zunächst wird die Kontinuitätsgleichung (2.4.12) wie folgt transformiert:

$$\begin{aligned}
\rho_{,t} &+ (\rho v)_{,x} = 0 \Leftrightarrow \\
\rho_{,t} &+ \rho_{,x}v + \rho v_{,x} = 0 \Leftrightarrow \\
-\rho_{,t}/\rho^2 &- v\rho_{,x}/\rho^2 - v_{,x}/\rho = 0 \; .
\end{aligned}$$

Mit (2.4.17) gilt also:

$$\tau_{,t} + v\tau_{,x} - v_{,x}\tau = 0 \; . \tag{2.4.21}$$

Aus der Impulsgleichung (2.4.13) folgt nun weiter:

$$\begin{aligned}
(\rho v)_{,t} &+ (\rho v^2 + p)_{,x} = 0 \Leftrightarrow \\
\rho_{,t}v &+ \rho v_{,t} + (\rho v)_{,x}v + \rho v v_{,x} + p_{,x} = 0 \overset{(2.4.12)}{\Leftrightarrow} \\
\rho v_{,t} &+ \rho v v_{,x} + p_{,x} = 0 \; .
\end{aligned}$$

Mit (2.4.17) gilt also:

$$v_{,t} + v v_{,x} + \tau p_{,x} = 0 \; . \tag{2.4.22}$$

Für die Energiegleichung (2.4.14) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
(\rho E)_{,t} &+ (\rho v(E + p/\rho))_{,x} = 0 \Leftrightarrow \\
\rho_{,t}E &+ \rho E_{,t} + (\rho v)_{,x}E + (\rho v)_{,x}p/\rho + \rho v E_{,x} + \rho v(p/\rho)_{,x} = 0 \overset{(2.4.12)}{\Leftrightarrow} \\
\rho E_{,t} &+ (\rho v)_{,x}p/\rho + \rho v E_{,x} + \rho v(p/\rho)_{,x} = 0 \overset{\text{Def. } E}{\Leftrightarrow} \\
\rho e_{,t} &+ \rho v v_{,t} + (\rho v)_{,x}(p/\rho) + \rho v e_{,x} + \rho v^2 v_{,x} + v p_{,x} - v p \rho_{,x}/\rho = 0 \overset{(2.4.22)}{\Leftrightarrow} \\
\rho e_{,t} &+ (\rho v)_{,x}(p/\rho) + \rho v e_{,x} - v p \rho_{,x}/\rho = 0 \; .
\end{aligned}$$

Aus der Gibbs-Relation folgt:

$$\begin{aligned}
T s_{,t} &= e_{,t} + p\,\tau_{,t} \; , \\
T s_{,x} &= e_{,x} + p\,\tau_{,x} \; .
\end{aligned}$$

Somit gilt insbesondere:

$$\begin{aligned}
(\rho E)_{,t} &+ (\rho v(E + p/\rho))_{,x} = 0 \Leftrightarrow \\
T\rho s_{,t} &- \rho p \tau_{,t} + \rho_{,x} v p/\rho + v_{,x}p + T\rho v s_{,x} - \rho v p \tau_{,x} - v p \rho_{,x}/\rho = 0 \overset{(2.4.21)}{\Leftrightarrow} \\
T\rho s_{,t} &+ T\rho v s_{,x} = 0 \; .
\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$s_{,t} + v s_{,x} = 0 \ . \tag{2.4.23}$$

Jetzt wird noch eine Transformation auf die Lagrange-Koordinaten durchgeführt. Diese sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &:= t, \\ \tilde{x} &:= \tilde{x}(x(t),t) = \int\limits_0^{x(t)} \rho(s,t) ds \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

mit der charakteristischen Geschwindigkeit

$$\frac{dx(t)}{dt} := v(x(t),t) \ . \tag{2.4.25}$$

Die totalen Differentiale sind also:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tilde{x}} &= \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} = \tau \quad , \quad \frac{dx}{d\tilde{t}} = v \ , \\ \frac{dt}{d\tilde{x}} &= 0 \quad , \quad \frac{dt}{d\tilde{t}} = 1 \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt für die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} &= v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \ , \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} &= \tau \frac{\partial}{\partial x} \ . \end{aligned}$$

Somit gehen die Gleichungen (2.4.21), (2.4.22) und (2.4.23) über in

$$\tau_{,\tilde{t}} - v_{,\tilde{x}} = 0 \ , \tag{2.4.26}$$
$$v_{,\tilde{t}} + p_{,\tilde{x}} = 0 \ , \tag{2.4.27}$$
$$s_{,\tilde{t}} = 0 \ . \tag{2.4.28}$$

Die letzte Gleichung besagt, daß die Entropie entlang einer Bahnlinie konstant ist. Es verbleiben also nur die ersten beiden Differentialgleichungen. Diese bezeichnet man als das p–System. Man beachte, daß die Rücktransformation auf die Eulergleichungen nur dann äquivalent möglich ist, falls eine glatte Lösung existiert. Im Fall einer schwachen Lösung (vgl. Kap. 3.2) ist dies nicht möglich, da eine Variablentransformation durchgeführt wurde. In der Mathematik wird dieses System verallgemeinert in dem man die thermische Zustandsgleichung durch eine allgemeine Gleichung für den Druck ersetzt, d. h.:

$$p = p(\tau), \ p' < 0, \ p'' > 0.$$

Diese Bedingungen sind für (2.4.20) erfüllt.

3 Hyperbolische Erhaltungssätze

3.1 Klassische Lösung

Unter einem System von m Erhaltungssätzen versteht man in der Mathematik ein System von m quasilinearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung im Zeit– und d-dimensionalen Ortsraum der Form

$$\boldsymbol{u}_{,t} + \text{div}\,(\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u}),\ldots,\boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \qquad \text{mit} \tag{3.1.1}$$

$$\begin{array}{rlll} \boldsymbol{u}: & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m & & \text{(Erhaltungsgrößen)},\\ \boldsymbol{F}_i: & \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m & & \text{(Fluß in } i\text{-te Ortsrichtung)},\\ \boldsymbol{S}: & \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m & & \text{(Quell– bzw. Produktionsterm)}. \end{array}$$

Dieses kann alternativ auch in der Form

$$\boldsymbol{u}_{,t} + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{,x_i} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \quad \text{mit} \tag{3.1.2}$$

$$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}$$

geschrieben werden. Das System heißt schwach hyperbolisch, falls die m Eigenwerte der Jacobi–Matrizen A_i reell sind. Es heißt strikt hyperbolisch, falls diese zusätzlich alle verschieden sind (vgl. [S], S. 225). Dies bedeutet, daß m verschiedene Ausbreitungsrichtungen existieren (vgl. Charakteristikentheorie). In der Literatur wird manchmal noch zusätzlich gefordert, daß die $\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{u})$ m linear unabhängige Linkseigenvektoren besitzen, d.h. das System ist (lokal) entkoppelbar.

Im folgenden soll nun untersucht werden, wann eine zu (3.1.1) differenzierbare Lösung $\boldsymbol{u} \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ zu den Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \qquad \text{mit} \tag{3.1.3}$$

$$\boldsymbol{u}_0 \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$$

existiert. In diesem Fall spricht man von einer klassischen (starken) Lösung. Zur Konstruktion wird die Charakteristiken–Methode verwendet. Sie soll zunächst an einer skalaren Gleichung ($m = 1$) vorgestellt werden und dann auf Systeme ($m > 1$) übertragen werden.

3.1.1 Charakteristikentheorie für skalare Gleichungen

Im folgenden wird ein skalarer Erhaltungssatz ($m = 1$) betrachtet. Die linke Seite in (3.1.1) kann dann folgendermaßen transformiert werden:

$$\begin{aligned} & u_{,t} + \text{div}\,(F_1(u),\ldots,F_d(u)) \overset{\text{def.}}{=} u_{,t} + \sum_{i=1}^{d} F_i'(u)u_{,x_i} \overset{x_0:=t}{=} \\ & (1, F_1'(u),\ldots,F_d'(u))\,(u_{,x_0},\ldots,u_{,x_d})^T =: \\ & \boldsymbol{a}^*(u)\,\mathbf{grad}^*\,u\,. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

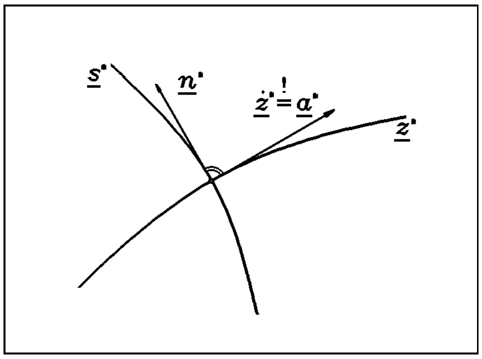


Abbildung 5: Bahnlinie

Sie kann somit als die Richtungsableitung der Erhaltungsgröße u in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}^*(u)$ im Zeit–Raum–Kontinuum interpretiert werden. Die Gleichung (3.1.1) geht damit über in

$$\boldsymbol{a}^*(u)\,\mathbf{grad}^*\,u = S(u)\;. \tag{3.1.5}$$

Es können nun drei verschiedene Fragestellungen untersucht werden, die aber alle zur gleichen Lösung führen:

1. Bestimme in $\mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}^d$ eine Hyperfläche $\boldsymbol{S}^*$ derart, daß die Lösung u in einer Umgebung von $\boldsymbol{S}^*$ eindeutig gegeben ist, d.h. $\boldsymbol{z}^*$ ist normal zu $\boldsymbol{S}^*$.
2. Bestimme Kurve $\boldsymbol{z}^*$ so, daß die Lösung u auf beiden Seiten der Kurve (also in Normalenrichtung) unabhängig voneinander ist, d.h. es darf nicht in Normalenrichtung $\boldsymbol{n}^*$ differenziert werden.
3. Bestimme Kurve $\boldsymbol{z}^* : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}^d$ in Zeit und Raum derart, daß $\boldsymbol{a}^*(u)$ in jedem Punkt tangential an $\boldsymbol{z}^*$ anliegt, d.h. es wird nur in Richtung $\boldsymbol{a}^*(u)$ differenziert.

Hier wird der letzte Ansatz gewählt. Dazu wird die Kurve $\boldsymbol{z}^*$ definiert als

$$\boldsymbol{z}^*(s) \overset{!}{=} \begin{pmatrix} t(s) \\ \boldsymbol{x}(s) \end{pmatrix}\;. \tag{3.1.6}$$

Die Ableitung von $\boldsymbol{z}^*$ liegt tangential an $\boldsymbol{z}^*$ an. Sie muß also mit $\boldsymbol{a}^*(u)$ zusammenfallen, d.h.

$$\frac{d\boldsymbol{z}^*(s)}{ds} = \boldsymbol{a}^*(u(\boldsymbol{z}^*(s))), \qquad \boldsymbol{z}^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{x}_0 \end{pmatrix}\;, \tag{3.1.7}$$

bzw. komponentenweise

$$\begin{aligned} \frac{dt(s)}{ds} &\overset{!}{=} 1, && t(0) = 0, \\ \frac{dx_i(s)}{ds} &\overset{!}{=} F_i'\Big(u(t(s), \boldsymbol{x}(s))\Big), && x_i(0) = x_{0,i}. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen ist dann gegeben durch

$$\boxed{\begin{aligned} t(s) &= s = t\,; \\ x_i(t) &= x_{0,i} + \int_0^t F_i'(u(s,\boldsymbol{x}(s)))\,ds\,. \end{aligned}} \tag{3.1.9}$$

Die Kurve $\boldsymbol{x}(t)$ wird als Charakteristik bezeichnet. Sie hat eine ganz wesentliche Eigenschaft, die sie vor allen anderen Kurven auszeichnet. Betrachtet man nämlich die zeitliche Änderung der Erhaltungsgröße u entlang dieser Kurve, so gilt mit (3.1.4)

$$\begin{aligned} \frac{du(t,\boldsymbol{x}(t))}{dt} &= \frac{\partial u(t,\boldsymbol{x}(t))}{\partial t}\underbrace{\frac{dt}{dt}}_{=1} + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial u(t,\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i}\underbrace{\frac{dx_i(t)}{dt}}_{=F_i'} \\ &= u_{,t} + \sum_{i=1}^{d} F_i'(u)u_{,x_i} \\ &= S(u)\,. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Daraus lassen sich folgende Aussagen schließen:

Satz 3.1 *Charakteristiken*

Vor.: u sei Lösung von (3.1.1) und (3.1.3), $m = 1$.

Beh.: (a) Für $S \equiv 0$ gilt:

i. $u = \text{const.}$ entlang der Charakteristik $\boldsymbol{x}(t)$ definiert gemäß (3.1.9);

ii. $\boldsymbol{x}(t)$ ist eine Gerade;

(b) Für $S \not\equiv 0$ gilt:

i. $u \neq \text{const.}$ entlang der Charakteristik $\boldsymbol{x}(t)$;

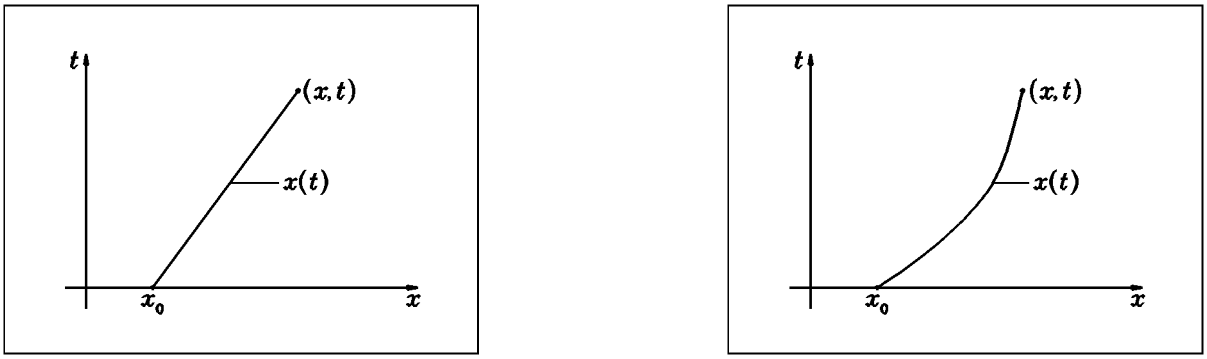
ii. $\boldsymbol{x}(t)$ ist keine Gerade.

Man beachte, daß die Lösung der partiellen Differentialgleichung (3.1.1) auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zurückgeführt werden kann. Dies entspricht der Tatsache, daß eine Differentiationsrichtung entfällt. Dies ist charakteristisch für hyperbolische Differentialgleichungen. Mittels der Charakteristikentheorie können nun Aussagen über die Existenz von klassischen Lösungen gemacht werden.

Satz 3.2 *Klassische Lösung einer skalaren Gleichung im d-dimensionalen Raum*

Vor.: $F_i \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mu_{ij} := \min\{F_i''(u_0(\boldsymbol{x}))u_{0,x_j}(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\} > -\infty$, $\quad i,j = 1,d$;
$u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, $S \equiv 0$.

Beh.: Es gibt ein $\delta > 0$, so daß für alle $t \in [0,\delta)$ eine eindeutige klassische Lösung zu den Anfangsbedingungen $u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$ existiert:



a) *homogen* ($S \equiv 0$) b) *inhomogen* ($S \not\equiv 0$)

Abbildung 6: Charakteristiken

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{\psi}_t^{-1}(\boldsymbol{x})) \qquad \text{mit} \tag{3.1.11}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}_0) &:= \boldsymbol{x}_0 + t \cdot \boldsymbol{F}'(u_0(\boldsymbol{x}_0)) = \boldsymbol{x} \ , \\ \boldsymbol{F}' &:= (F_1', \ldots, F_d')^T \ , \end{aligned}$$

falls $\boldsymbol{\psi}_t$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{R}^d$ ist.
Der Beweis beruht darauf, daß man genau ein $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ zum Zeitpunkt $t = 0$ findet, so daß die Charakteristik $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}_0)$, die diesem Punkt entspringt, durch den Punkt $(\boldsymbol{x}, t)$ verläuft (vgl. Bild 6). Dazu muß $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}_0)$ nach $\boldsymbol{x}_0$ aufgelöst werden. Dies ist aber nur dann möglich, falls $\boldsymbol{\psi}_t$ bijektiv ist. Da $\boldsymbol{\psi}_t$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{R}^d$ ist, muß gelten

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{x}_0}\right) = \det\left(\boldsymbol{I} + t\left(\frac{\partial F_i'(u_0(\boldsymbol{x}_0))}{\partial x_{0,j}}\right)_{ij}\right) > 0 \ . \tag{3.1.12}$$

Für t nahe bei 0 ist dies erfüllt, da zum einen die Determinante stetig von t abhängt — beachte: $\det \boldsymbol{I} = 1 > 0$ für $t = 0$ — und zum anderen die Ableitungen durch μ_{ij} nach unten beschränkt sind.
Die Forderung, daß die Abbildung $\boldsymbol{\psi}_t$ den Raum $\mathbb{R}^d$ auf sich selber abbildet, ist für die Existenz einer Charakteristik durch einen beliebigen Punkt $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ wesentlich. Sie stellt aber in der Praxis keine wesentliche Einschränkung dar, da die Anfangsbedingung u_0 im allgemeinen beschränkt ist und somit aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit auch $F_i'(u_0)$.
Im linearen Fall gilt insbesondere

Korollar 3.1 *Skalares, lineares Problem im d-dimensionalen Raum*

Vor.: $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_i(u) = a_i u, \ a_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, d$;
$\boldsymbol{a} := (a_1, \ldots, a_d)^T \in \mathbb{R}^d$; $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; $S \equiv 0$.

Beh.: Für alle $t > 0$ existiert eine klassische Lösung u von (3.1.1) zu den Anfangsbedingungen $u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$ mit

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a}) \ . \tag{3.1.13}$$

Dies folgt unmittelbar aus (3.1.11) und (3.1.12), denn es gilt wegen $F_i'(u) = a_i$

$$\frac{\partial F_i'}{\partial x_{0,j}} = 0 \qquad i,j = 1,d\ .$$

Somit ist (3.1.12) für beliebige $t > 0$ erfüllt und $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}_0)$ kann nach $\boldsymbol{x}_0$ aufgelöst werden:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}_0) & := & \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}\ , \\ \boldsymbol{x}_0 & = & \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a}\ . \end{array} \tag{3.1.14}$$

Beschränkt man sich in Satz 3.2 auf den räumlich eindimensionalen Fall, so können aus der Gleichung (3.1.12) Bedingungen für den Existenzbereich der starken Lösung abgeleitet werden, d.h. δ kann in Abhängigkeit vom Fluß F und der Anfangsbedingung u_0 explizit angegeben werden.

Korollar 3.2 *Skalares Problem im eindimensionalen Raum*

Vor.: $F \in C^2(\mathrm{IR}, \mathrm{IR}),\ \mu := \min\{F''(u_0(x))u_0'(x) | x \in \mathrm{IR}\} > -\infty;$
$u_0 \in C^1(\mathrm{IR}, \mathrm{IR}),\ S \equiv 0.$

Beh.: Es gibt $\delta > 0$, so daß für alle $t \in [0, \delta)$ eine eindeutige klassische Lösung zu den Anfangsbedingungen $u(0, x) = u_0(x)$ existiert:

$$u(t, x) = u_0(\psi_t^{-1}(x)), \quad t \in [0, \delta) \qquad \text{mit} \tag{3.1.15}$$

$$\psi_t(x_0) = x_0 + t \cdot F'(u_0(x_0)) \quad \text{und} \quad \delta < \begin{cases} +\infty\ , & \mu \geq 0 \\ -1/\mu, & \mu < 0. \end{cases}$$

Es muß hier wiederum überprüft werden, für welche $t > 0$ die Charakteristik $\psi_t(x_0)$ durch den Punkt x nach x_0 aufgelöst werden kann. Dazu muß die Bedingung (3.1.12) verifiziert werden. Diese geht hier über in

$$\psi_t'(x_0) = 1 + t \cdot F''(u_0(x))u_0'(x) > 0\ . \tag{3.1.16}$$

Daraus lassen sich nun die gesuchten Bedingungen an t ableiten.
Bisher wurden nur Aussagen über die Existenz von klassischen Lösungen gemacht unter Vernachlässigung des Quellterms S. Auch hier kann die Charakteristikentheorie zur Konstruktion von Lösungen verwendet werden. Man erhält in der Regel jedoch keine globalen Aussagen, sondern nur solche über die Existenz einer einzelnen Charakteristik. Dies liegt an den speziellen Eigenschaften, die in Satz 3.1, Teil (b) aufgelistet sind.

Satz 3.3 *Skalarer Erhaltungssatz mit Quellterm*

Vor.: $F_i \in C^2(\mathrm{IR}, \mathrm{IR}),\ i = 1, d,\ S \in\ \mathrm{Lip}\ (\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR}), u_0 \in C^1(\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR}),\ \boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{IR}^d.$

Beh.: Es gibt $\delta > 0$ so, daß entlang einer Charakteristik $\boldsymbol{x}(t)$ für alle $t \in [0, \delta)$ eine eindeutige klassische Lösung zu den Anfangsbedingungen $u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$ existiert, und es gilt:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = F_i'(u(t,\boldsymbol{x}(t))), \quad x_i(0) = x_{0,i}, \tag{3.1.17}$$

$$\frac{du(t,\boldsymbol{x}(t))}{dt} = S(u), \quad u(0,\boldsymbol{x}(0)) = u_0(\boldsymbol{x}_0) \tag{3.1.18}$$

für $t > 0$.

Bei den Gleichungen (3.1.17) und (3.1.18) handelt es sich um Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, deren Lösungen für eine gewisse Zeitspanne eindeutig existieren, falls die rechten Seiten zumindest Lipschitz–stetig sind. Hier gilt aufgrund der Voraussetzungen

$$\begin{array}{ccccccccl} F_i & \in & C^1 & \Rightarrow & \exists\, a_i & > & 0: & x_i(t) & \text{existiert für } t \in [0, a_i)\ ; \\ S & \in & \text{Lip} & \Rightarrow & \exists\, b & > & 0: & u & \text{existiert für } t \in [0, b)\ . \end{array}$$

Daraus folgt die Behauptung mit $\delta := \min(a_1, \ldots, a_d, b)$. Man beachte, daß δ gegen Null gehen kann, falls man eine klassische Lösung im ganzen Raum $\mathbb{R}^d$ haben will.

Für den linearen Fall gilt insbesondere:

Satz 3.4 *Skalarer, linearer Erhaltungssatz mit Quellterm*

Vor.: $S, F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$, definiert durch

$$F_i(u(t,\boldsymbol{x})) = a_i(t,\boldsymbol{x})u(t,\boldsymbol{x}), \quad S(u(t,\boldsymbol{x})) = b(t,\boldsymbol{x})u(t,\boldsymbol{x})$$

mit $a_i, b \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und $a_i(t,\cdot), b(t,\cdot) \in$ Lip $(\mathbb{R}^d)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ und $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Beh.: Es existiert eine globale klassische Lösung u auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ von (3.1.1) zu den Anfangsbedingungen $u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$ mit

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = a_i(t,\boldsymbol{x}(t)), \quad x_i(0) = x_{0,i} \tag{3.1.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}u(t,\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t} = b(t,\boldsymbol{x}(t)), \quad u(0) = u(0,\boldsymbol{x}_0) \tag{3.1.20}$$

für $t > 0$.

Das System (3.1.19), (3.1.20) ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Dieses ist aufgrund der Voraussetzungen an die Koeffizienten a_i und b eindeutig lösbar. Man beachte dabei, daß der Ort unabhängig von u ist. Es stellen sich nun zwei Fragen:

1. Können sich zwei Charakteristiken schneiden, d.h. exitieren Punkte $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$, so daß die in diesen Punkten entspringenden Charakteristiken sich zu einem Zeitpunkt $t > 0$ schneiden?

2. Existieren im Ort-Zeit-Kontinuum Punkte $(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, so daß durch diese keine Charakteristik verläuft, die ihren Urspung auf der $\boldsymbol{x}$-Ebene ($t = 0$) haben?

Beide Fragen sind mit nein zu beantworten. Im ersten Fall überlegt man sich dies indirekt. Man nimmt an, daß ein solcher Punkt $(t, \boldsymbol{x})$ existiert. Dann kann man die Differentialgleichungen (3.1.19), (3.1.20) in diesem Punkt zu den beiden unterschiedlichen Werten erneut lösen. Das bedeutet, daß in $(t, \boldsymbol{x})$ zwei Charakteristiken entspringen. Dies entspricht einer Verzweigung der Charakteristiken, die zum Zeitpunkt $t \geq 0$ starten. Dies ist aber nicht möglich, da die Charakteristiken eindeutig für alle Zeiten $t \geq 0$ existieren.
Durch Integration von (3.1.19) in umgekehrter Zeitrichtung erreicht man die $\boldsymbol{x}$-Ebene zum Zeitpunkt $t = 0$. Dort können die Anfangsdaten von u berechnet werden und mit (3.1.20) die Lösung entlang der durch (3.1.19) gegebenen Charakteristik berechnet werden. Der Beweis geht auf Courant und Hilbert zurück (siehe [CH]).

Im räumlich eindimensionalen Fall ($d = 1$) kann obiges Ergebnis auf ein System strikt hyperbolischer Gleichungen (vgl. (3.2.17)) übertragen werden, in dem man dieses gemäß (3.2.18) entkoppelt und so auf den skalaren Fall zurückspielt.

3.1.2 Charakteristikentheorie für Systeme

Ausgangspunkt zur Herleitung der Charakteristiken im skalaren Fall war die Interpretation des Erhaltungssatzes als eine Bedingung für eine zeitlich–räumliche Richtungsableitung (vgl. (3.1.5)). Das System von Erhaltungssätzen (3.1.1) bzw. (3.1.2) soll nun so umgeschrieben werden, daß es als eine Linearkombination von Richtungsableitungen aufgefaßt werden kann. Dies geschieht durch Umschreiben der einzelnen Komponentengleichungen von (3.1.1) analog zu (3.1.5):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{u})}{\partial x_i} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \iff \\
&\frac{\partial u_l}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_{i,l}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = S_l(\boldsymbol{u}), \quad l = 1, m \iff \\
&\frac{\partial u_l}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F_{i,l}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = S_l(\boldsymbol{u}), \quad l = 1, m \iff \\
&\frac{\partial u_l}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial F_{1,l}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k}, \ldots, \frac{\partial F_{d,l}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k} \right) \mathbf{grad}\, u_k = S_l(\boldsymbol{u}), \quad l = 1, m \iff \\
&\sum_{k=1}^{m} \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \delta_{kl} + \frac{\partial F_{1,l}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k}, \ldots, \frac{\partial F_{d,l}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k} \right) \mathbf{grad}\, u_k \right] = S_l(\boldsymbol{u}), \quad l = 1, m \iff \\
&\sum_{k=1}^{m} \left(\delta_{kl}, \frac{\partial F_{1,l}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k}, \ldots, \frac{\partial F_{d,l}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k} \right) \mathbf{grad}^*\, u_k = S_l(\boldsymbol{u}) \quad l = 1, m\,.
\end{aligned}
$$

Man erhält somit das System von quasilinearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$
L_l := \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{a}^*_{lk}(\boldsymbol{u})\, \mathbf{grad}^*\, u_k - S_l(\boldsymbol{u}) \stackrel{!}{=} 0, \quad l = 1, m \qquad \text{mit} \tag{3.1.21}
$$

$$
\boldsymbol{a}^*_{lk}(\boldsymbol{u}) \;:=\; \left(\delta_{kl}, \frac{\partial F_{1,l}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k}, \ldots, \frac{\partial F_{d,l}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k} \right) .
$$

Die l-te Gleichung ist die Linearkombination der Ableitungen der Erhaltungsgröße u_k in Richtung $\boldsymbol{a}^*_{lk}$.
Analog zum skalaren Fall sollen wiederum ausgezeichnete Differentiationsrichtungen bestimmt werden. Dazu gibt es ebenfalls drei unterschiedliche Lösungsansätze, die aber alle zum gleichen Ergebnis führen (vgl. Bild 7):

1. Sei in Raum und Zeit eine Hyperfläche $\boldsymbol{S}^*$ gegeben, und auf dieser sei $\boldsymbol{u}$ bekannt. Bestimme $\boldsymbol{u}$ in einer Nachbarschaft von $\boldsymbol{S}^*$.

2. Gibt es zu (3.1.21) ausgezeichnete Richtungen derart, daß die Ableitungen in diesen Richtungen springen dürfen? Bestimme $\boldsymbol{S}^*$ so, daß normal zu $\boldsymbol{S}^*$ nicht differenziert werden darf.

3. Kombiniere die Differentialgleichungen (3.1.21) so, daß nur noch in der Hyperfläche differenziert werden darf, aber nicht mehr normal zu dieser ($\rightarrow$ Reduzierung der Differentiationsrichtung).

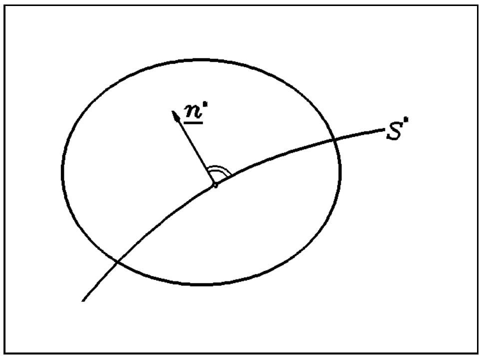


Abbildung 7: charakteristische Hyperfläche

Hier sollen nun alle drei Lösungswege beschrieben werden:

zu 1. Sei $\boldsymbol{n}^*$ der Normalenvektor zu $\boldsymbol{S}^*$ und $\boldsymbol{n}^*_T$ stehe senkrecht auf $\boldsymbol{n}^*$, d.h. $\boldsymbol{n}^*_T$ ist Tangentialvektor an $\boldsymbol{S}^*$. Damit die auf $\boldsymbol{S}^*$ gegebene Information sich in eine Umgebung von $\boldsymbol{S}^*$ ausbreiten kann, dürfen die Richtungsableitungen in (3.1.21) nicht in $\boldsymbol{S}^*$ liegen, d.h. es muß gelten

$$\det(\boldsymbol{n}^*\boldsymbol{a}^*_{kl}) \neq 0 \qquad \text{(Richtungsbedingung)}\ . \tag{3.1.22}$$

In diesem Fall existiert die Richtungsableitung in Richtung $\boldsymbol{n}^*$, und somit existiert auch die Lösung eindeutig.

zu 2. Seien $\boldsymbol{n}^*$ und $\boldsymbol{n}^*_T$ wie oben definiert. Damit die Lösung in Richtung $\boldsymbol{n}^*$ springen darf, darf in (3.1.21) nur in Richtungen differenziert werden, die innerhalb von $\boldsymbol{S}^*$ liegen, d.h. es muß für alle $k, l = 1, \ldots, m$ gelten

$$\det(\boldsymbol{n}^*\boldsymbol{a}^*_{kl}) = 0 \qquad \text{(Richtungsbedingung)}\ . \tag{3.1.23}$$

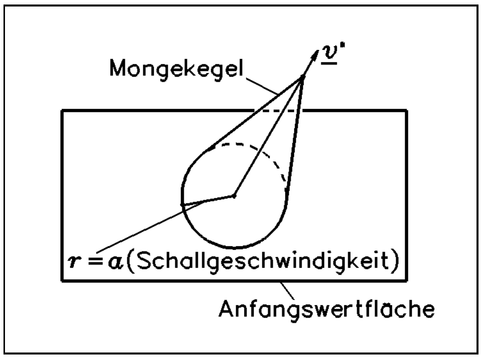


Abbildung 8: Monge–Kegel

zu 3. Wiederum sei $\boldsymbol{n}^*$ die Normale zu $\boldsymbol{S}^*$. Die Differentialgleichungen L_l, $l = 1, m$, aus (3.1.21) sollen nun so linear kombiniert werden, daß eine Differentiationsrichtung entfällt, d.h. gesucht ist $\boldsymbol{\eta} \in \mathrm{IR}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$ mit

$$\boldsymbol{\eta L} = \sum_{l=1}^{m} \eta_l L_l = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{b}_k^* \, \mathbf{grad}^* \, u_k + \boldsymbol{\eta S} = 0 \qquad \text{(Verträglichkeitsbedingung)} \tag{3.1.24}$$

$$\boldsymbol{b}_k^* = \sum_{i=1}^{m} \eta_i \boldsymbol{a}_{ik}^* \qquad \text{(Differentiationsrichtung)} \; .$$

Alle diese Differentiationsrichtungen $\boldsymbol{b}_k^*$ sollen nur in $\boldsymbol{S}^*$ liegen, d.h. $\boldsymbol{b}_k^*$ muß senkrecht auf $\boldsymbol{n}^*$ stehen. Dies führt wiederum auf die Bedingung (3.1.23). Ist diese erfüllt, so existiert eine nichttriviale Linearkombination, d.h. $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$. Dies ist charakteristisch für ein hyperbolisches System. Aus der Richtungsbedingung kann die Normale $\boldsymbol{n}^*$ konstruiert werden und daraus dann $\boldsymbol{\eta}$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{\eta}^T(\boldsymbol{n}^* \boldsymbol{a}_{kl}^*) = \mathbf{0} \; . \tag{3.1.25}$$

Die letzte Vorgehensweise entspricht dem entsprechenden Ansatz im skalaren Fall. Charakteristisch ist in beiden Fällen die Verringerung der Differentiationsrichtungen um eine Richtung. Dies führt im skalaren Fall von einer partiellen Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung und als Lösung ergibt sich die Charakteristik. Bei Systemen ergeben sich die sogenannten charakteristischen Hyperflächen. Für die Eulergleichungen (2.4.11) führt dieses Vorgehen zu zwei charakteristischen Hyperflächen:

– Teilchenbahn	1-dim Hyperfläche
– Schallausbreitung	d-dim Hyperfläche.

In Abbildung 8 sind diese für den räumlich zweidimensionalen Fall dargestellt. Es zeigt sich, daß die Lösung in einem Punkt nicht nur von einem einzigen Funktionswert zum alten Zeitpunkt abhängig ist, sondern von unendlich vielen. Es ergibt sich ein sogenannter Abhängigkeitsbereich.

3.2 Schwache Lösung

In Kapitel 3.1.1 wurden differenzierbare Lösungen eines skalaren Erhaltungssatzes mittels der Charakteristikentheorie hergeleitet. Es zeigte sich, daß diese Lösungen im allgemeinen nur endliche Zeit existieren (vgl. Satz 3.1, Korollar 3.2). Dies soll am Beispiel eines skalaren, räumlich eindimensionalen, homogenen Erhaltungssatzes (vgl. Korollar 3.2) verdeutlicht werden. Die klassische Lösung bricht in dem Moment zusammen, wo sich zwei Charakteristiken schneiden. Im Schnittpunkt ist die Lösung dann nicht mehr eindeutig. Betrachte dazu die Situation in Abbildung 9.

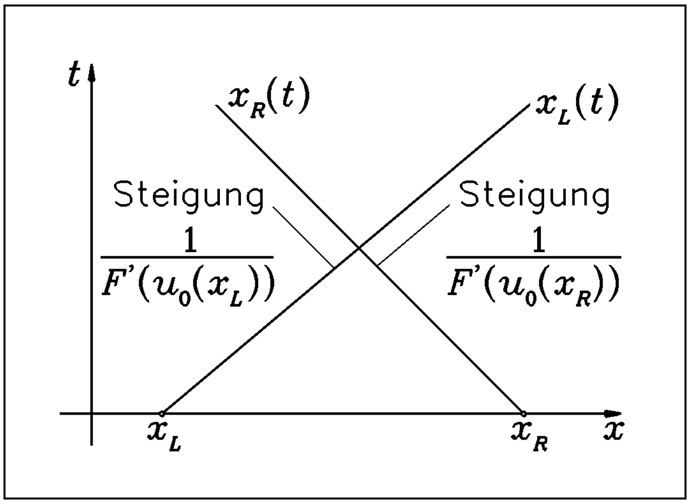


Abbildung 9: Interaktion

Die Charakteristiken $x_L(t)$ und $x_R(t)$, die den Punkten x_L und x_R zum Zeitpunkt $t = 0$ entspringen, d.h.

$$\begin{aligned} x_L(t) &= x_L + tF'(u_0(x_L)) \qquad \text{und} \\ x_R(t) &= x_R + tF'(u_0(x_R)) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

schneiden sich genau dann, wenn gilt:

$$x_L < x_R \quad \Rightarrow \quad x_L(t) > x_R(t) \qquad \text{bzw.} \qquad F'(u_0(x_L)) > F'(u_0(x_R)) \ . \tag{3.2.2}$$

Um das Auftreten von Diskontinuitäten erfassen zu können, muß der Lösungsbegriff erweitert werden. Dazu muß auf die Differenzierbarkeit der Lösung verzichtet werden. Man multipliziert deshalb die Erhaltungssätze (3.1.1) mit einer beliebigen, glatten Testfunktion $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die außerhalb einer kompakten Menge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ (Träger) und auf dem Rand des Trägers für $t > 0$ verschwindet (vgl. Bild 10) und intergriert diese über Zeit und Ort auf:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \phi \operatorname{div}^*(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d) - \phi \boldsymbol{S} \, dx_1 \ldots dx_d \, dt = 0 \ . \tag{3.2.3}$$

Unter Berücksichtigung von

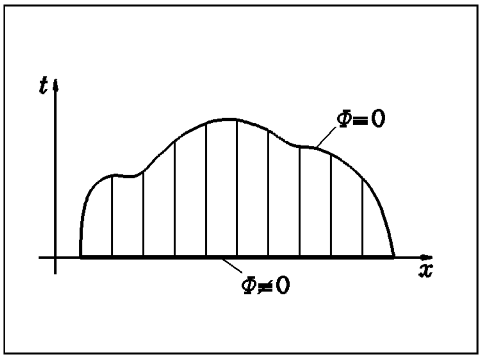


Abbildung 10: Testfunktion mit kompakten Träger

$$
\begin{aligned}
\phi \operatorname{div}^*(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi\left(\boldsymbol{u}_{,t} + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{F}_{i,x_i}\right) \\
&= (\phi \boldsymbol{u})_{,t} - \boldsymbol{u}\phi_{,t} + \sum_{i=1}^{d} \left((\phi \boldsymbol{F}_i)_{,x_i} - \boldsymbol{F}_i \phi_{,x_i}\right) \\
&= \operatorname{div}^*(\phi \boldsymbol{u}, \phi \boldsymbol{F}_1, \ldots, \phi \boldsymbol{F}_d) - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\, \mathbf{grad}^* \phi
\end{aligned}
\tag{3.2.4}
$$

geht (3.2.3) über in:

$$
\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \operatorname{div}^*(\phi \boldsymbol{u}, \phi \boldsymbol{F}_1, \ldots, \phi \boldsymbol{F}_d) - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\, \mathbf{grad}^* \phi - \phi \boldsymbol{S}\, dx_1 \ldots dx_d\, dt = 0\ . \tag{3.2.5}
$$

Da ϕ außerhalb einer kompakten Menge $\operatorname{supp}^*(\phi)$ verschwindet, kann der Satz von Gauß auf den ersten Term angewendet werden:

$$
\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \operatorname{div}^*(\phi \boldsymbol{u}, \phi \boldsymbol{F}_1, \ldots, \phi \boldsymbol{F}_d)\, dx_1 \ldots dx_d\, dt \stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial \operatorname{supp}^*(\phi)} \phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d) \boldsymbol{N}^*\, ds_1 \ldots ds_d\ . \tag{3.2.6}
$$

Nach Voraussetzung verschwindet ϕ für $t > 0$ auf dem Rand. Deshalb bleibt nur der Teil des Trägerrandes zum Zeitpunkt $t = 0$ im Randintegral übrig:

$$
\oint_{\partial \operatorname{supp}^*(\phi)} \phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d) \boldsymbol{N}^*\, ds_1 \ldots ds_d \stackrel{\boldsymbol{N}^* = (-1, 0, \ldots, 0)^T}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} (\phi \boldsymbol{u})(0, \boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_d\ . \tag{3.2.7}
$$

Eine beschränkte und meßbare Funktion $\boldsymbol{u}$ heißt nun schwache Lösung zu der Differentialgleichung (3.1.1) und den Anfangsbedingungen $\boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{u}_0$ im wesentlichen beschränkt und meßbar auf einem beliebigen kompakten Träger, d.h. $\boldsymbol{u}_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$, falls für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ gilt:

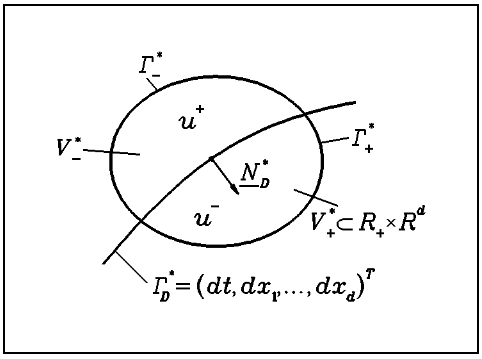


Abbildung 11: lokale Diskontinuität

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \boldsymbol{u}\phi_{,t} + (\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\,\mathbf{grad}\,\phi + \boldsymbol{S}\phi\, dx_1 \ldots dx_d\, dt + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \phi \boldsymbol{u}_0\, dx_1 \ldots dx_d = \mathbf{0}\ . \quad (3.2.8)$$

Die Integrale sind aufgrund der Voraussetzungen an $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_0$, Φ, $\boldsymbol{F}_i$ wohldefiniert. In der Literatur spricht man häufig auch von einer Lösung im distributiven Sinne.
Es stellt sich nun die Frage, ob jede beliebige Diskontinuität zulässig ist oder ob die Zustände links und rechts einer solchen Unstetigkeit gewisse Bedingungen erfüllen müssen. Dazu betrachtet man eine lokale Umgebung einer Diskontinuität wie in Abbildung 11 dargestellt. Hier ist im Gegensatz zur Herleitung der Stoßbedingungen in der Kontinuumsmechanik (vgl. Kap. 2.1.3) $V^* \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ ein beliebiges aber kein materielles Volumen, das sich aus zwei Teilgebieten zusammensetzt, in denen $\boldsymbol{u}$ jeweils eine differenzierbare Lösung der Erhaltungsgleichungen (3.1.1) ist. Sei nun $\boldsymbol{u}$ eine schwache Lösung in V^*, dann gilt für eine beliebige Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit $\text{supp}^*(\phi) = V^*$

$$\int\limits_{V^*} \boldsymbol{u}\phi_{,t} + (\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\,\mathbf{grad}\,\phi + \boldsymbol{S}\phi\, dV^* = \mathbf{0}\ . \quad (3.2.9)$$

Die Integration über V^* wird nun aufgeteilt in diejenige über die Teilgebiete V_+^* und V_-^*. Da $\boldsymbol{u}$ insbesondere klassische Lösung ist, können die Beziehungen (3.2.7), (3.2.6), (3.2.5) und (3.2.4) rückwärts durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{V_\pm^*} \boldsymbol{u}\phi_{,t} + (\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\,\mathbf{grad}\,\phi\, dV_\pm^* + \int\limits_{V_\pm^*} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\phi\, dV_\pm^* = \\
&\int\limits_{V_\pm^*} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\,\mathbf{grad}^*\,\phi\, dV_\pm^* + \int\limits_{V_\pm^*} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\phi\, dV_\pm^* = \\
&\int\limits_{V_\pm^*} \text{div}^*((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\phi)\, dV_\pm^* - \int\limits_{V_\pm^*} \underbrace{\text{div}^*(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)}_{=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\ (\boldsymbol{u}\ \text{klass. Lsg!})}\phi\, dV_\pm^* \\
&+ \int\limits_{V_\pm^*} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\phi\, dV_\pm^* \overset{\text{Gauß}}{=}
\end{aligned}$$

$$\int\limits_{\Gamma^*_\pm \cup \Gamma^*_D} \underbrace{\phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_d)}_{=\mathbf{0} \text{ auf } \Gamma^*_\pm} \boldsymbol{N}^*_\pm ds_1 \dots ds_d =$$

$$\int\limits_{\Gamma^*_D} \mp\phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \dots \boldsymbol{F}_d) \boldsymbol{N}^*_D \, ds_1 \dots ds_d \; .$$

Somit geht (3.2.9) über in

$$\int\limits_{\Gamma^*_D} \phi[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_d] \boldsymbol{N}^*_D \, ds_1 \dots ds_d \stackrel{!}{=} 0 \; . \tag{3.2.10}$$

Da Γ^*_D und ϕ beliebig gewählt waren, muß nun gelten:

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_d] \boldsymbol{N}^*_D \stackrel{!}{=} 0 \; . \tag{3.2.11}$$

Dies ist die sogenannte Sprungbedingung von Rankine und Hugoniot. Sie charakterisiert die zulässigen Diskontinuitäten einer schwachen Lösung.

Satz 3.5 *Rankine–Hugoniot–Sprungbedingung*

Vor.: $\boldsymbol{u}$ sei schwache Lösung, $\Gamma^*_D \subset \mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}^d$ Diskontinuitätsfläche;
$\boldsymbol{N}^*_D$ Normale zu Γ^*_D.

Beh.: (a) Über der Diskontinuitätsfläche muß die Beziehung (3.2.11) erfüllt sein;
(b) Lokal gilt mit $\Gamma^*_D = (dt, dx_1, \dots, dx_d)^T$:

i.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}^*_D &= \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \boldsymbol{N}^*_i, \ (\text{o.B.d.A. } \alpha_d = 1) \quad \text{mit} \\ \boldsymbol{N}^*_i &= -\boldsymbol{e}^*_i \, dx_i + \boldsymbol{e}^*_{i+1} \, dt, \ \boldsymbol{e}^*_i \in \mathrm{IR}^{d+1} \; . \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

ii.

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i [\boldsymbol{u} s_i - \boldsymbol{F}_i] = \mathbf{0} \quad \text{mit} \tag{3.2.13}$$

$$s_i := \frac{dx_i}{dt} \quad \text{Stoßgeschwindigkeit in Richtung } x_i.$$

iii. Für $d = 1$ gilt insbesondere:

$$s[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{F}] \tag{3.2.14}$$

und im skalaren Fall ($m = 1$):

$$\lim_{[u] \to 0} s = F'(u) \; . \tag{3.2.15}$$

Man beachte hierbei, daß die Bedingung (3.2.14) m Gleichungen für die unbekannte Stoßgeschwindigkeit s liefert. Diese ist also nur im skalaren Fall eindeutig festgelegt. Die Gleichung (3.2.15) besagt ferner, daß im skalaren eindimensionalen Fall die Stoßgeschwindigkeit mit abnehmender Sprunghöhe gegen die Geschwindigkeit der Charakteristik konvergiert.

Mit Hilfe der Rankine–Hugoniot–Bedingung können nun schwache Lösungen konstruiert werden, die sich aus endlich vielen Teilgebieten zusammensetzen, in denen die Lösung differenzierbar ist.

Lemma 3.1 *Zusammensetzung klassischer Lösungen*

Vor.: (a) $\Gamma_i^* := (t, \boldsymbol{x}_i(t)),\ i = 1, \ldots, N$ seien glatte Kurven mit $|\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)|$ beschränkt;

(b) $\mathrm{I\!R}_+ \times \mathrm{I\!R}^d \backslash \{\cup \Gamma_i^*\}$ zerfalle in endlich viele Gebiete $\Omega_i,\ i = 1, \ldots, M$ (offen, zusammenhängend);

(c) $\boldsymbol{u} \in C^1(\cup_{i=1}^M \Omega_i, \mathrm{I\!R}^d)$

i. $\boldsymbol{u}|_{\Omega_i}$ lasse sich stetig auf $\overline{\Omega}_i$ fortsetzen;

ii. $\boldsymbol{u}|_{\Omega_i}$ sei klassische Lösung des Erhaltungssatzes;

iii. $\boldsymbol{u}$ erfülle über jede Kurve Γ_i^* bis auf endlich viele Punkte die RHS–Bedingung.

Beh.: $\boldsymbol{u}$ ist schwache Lösung.

Für den Fall eines räumlich eindimensionalen, strikt hyperbolischen Systems kann die Stoßgeschwindigkeit s näher charakterisiert werden. Dazu betrachtet man das System lokal in einer kleinen Umgebung eines Punktes. Die Lösung ist dann lokal gegeben durch das linearisierte Problem

$$\boldsymbol{u}_{,t} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{,x} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{A} := \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} = \text{const.} \tag{3.2.16}$$

Da das System strikt hyperbolisch ist, existieren Matrizen $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ derart, daß gilt:

$$\boldsymbol{LAR} = \boldsymbol{\Lambda} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{LR} = \boldsymbol{I}, \tag{3.2.17}$$

wobei $\boldsymbol{\Lambda}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge gerade die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind. Dadurch kann das System (lokal) entkoppelt werden, d.h.:

$$\boldsymbol{w}_{,t} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w}_{,x} = \boldsymbol{LS}(\boldsymbol{Rw}) \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{w} := \boldsymbol{Lu}. \tag{3.2.18}$$

Das entkoppelte System besteht aus m linear unabhängigen Gleichungen für die Kompo-

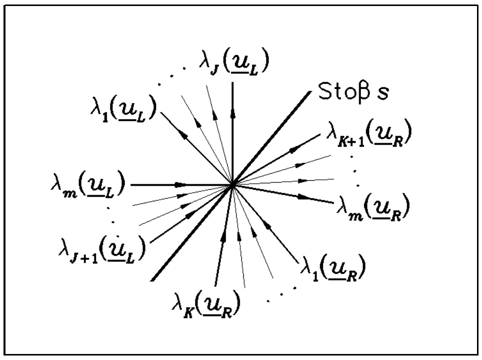


Abbildung 12: lokale Diskontinuität

nenten von $\boldsymbol{w}$, den sogenannten charakteristischen Variablen, deren Lösungen sich analog zur skalaren Theorie über Charakteristiken bestimmen lassen. Dabei sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der einzelnen Charakteristiken gerade die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$. Dies sind die sogenannten charakteristischen Geschwindigkeiten. Da diese alle verschieden sind, erhält man m verschiedene Charakteristiken. Betrachtet man nun lokal einen Punkt auf einer Diskontinuitätsfläche, so kann man auf jeder Seite das System zu den lokalen Zuständen $\boldsymbol{u}_L$ und $\boldsymbol{u}_R$ entkoppeln. Man erhält dann auf jeder Seite m Charakteristiken, die sich mit den Geschwindigkeiten $\lambda_i(\boldsymbol{u}_L)$ bzw. $\lambda_i(\boldsymbol{u}_R)$, $i = 1, m$, ausbreiten (vgl. Bild 12). Sei s die Geschwindigkeit der Diskontinuitätsfläche in dem betrachteten Punkt. Dann gibt es Indizes $j, k \in \{1, \dots, m\}$ derart, daß gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\boldsymbol{u}_L) < \ldots < \lambda_j(\boldsymbol{u}_L) < s < \lambda_{j+1}(\boldsymbol{u}_L) < \ldots < \lambda_m(\boldsymbol{u}_L), \\ \lambda_1(\boldsymbol{u}_R) < \ldots < \lambda_k(\boldsymbol{u}_R) < s < \lambda_{k+1}(\boldsymbol{u}_R) < \ldots < \lambda_m(\boldsymbol{u}_R). \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Das bedeutet, daß $m - k$ bzw. j Charakteristiken rechts bzw. links aus der Diskontinuität rauslaufen und k bzw. $m - j$ Charakteristiken rechts bzw. links in die Diskontinuität reinlaufen. Somit muß für jede der $m - k + j$ rauslaufenden Charakteristiken eine Bedingung gestellt werden. Die RHS–Bedingung (3.2.14) liefert $m - 1$ Bedingungen, eine ist durch s festgelegt. Damit die Lösung eindeutig bestimmt ist, muß gelten:

$$m - k + j = m - 1 \qquad \text{bzw.} \qquad j = k - 1. \tag{3.2.20}$$

Über eine Diskontinuität muß also wegen (3.2.19) und (3.2.20) folgende Beziehung zwischen den charakteristischen Geschwindigkeiten und der Geschwindigkeit der Diskontinuität bestehen:

$$\begin{aligned} \lambda_{k-1}(\boldsymbol{u}_L) < s < \lambda_k(\boldsymbol{u}_L), \\ \lambda_k(\boldsymbol{u}_R) < s < \lambda_{k+1}(\boldsymbol{u}_R). \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Dies sind die Sprungbedingungen von Lax. Eine Diskontinuität, die durch diese charakterisiert ist, heißt k–Stoß.

3.3 Entropielösung

Durch den Übergang von der klassischen zur schwachen Lösung kommt es zu dem Verlust der Eindeutigkeit. Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden.

$$\begin{aligned} &u_{,t} + (u^2/2)_{,x} = 0 \qquad \text{(Burgersgleichung)} \\ &u(0,x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Die Lösung setzt sich aus drei Teilgebieten $\Omega_i \subset \mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}$, $i = 1, 3$, wie in Abbildung 13 dargestellt zusammen.

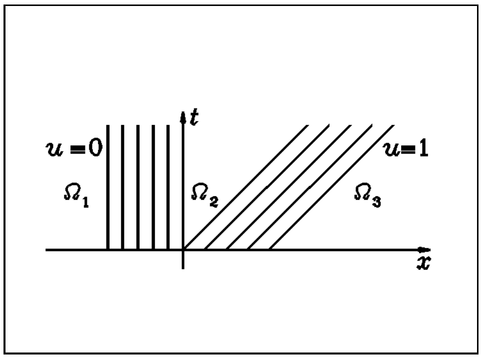


Abbildung 13: Lösungsgebiete

In den Gebieten Ω_1 und Ω_3 ist die Lösung eindeutig durch die Charakteristiken

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= F'(u) = u = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = \text{ const.} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= F'(u) = u = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3(t) = t \end{aligned}$$

festgelegt. In Ω_2 ist die Lösung nicht durch Charakteristiken festgelegt, die zum Zeitpunkt $t = 0$ existieren. Es können jedoch verschiedene klassische Lösungen definiert werden:

$$u_\omega(x,t) := \begin{cases} 0 & , \quad x < \frac{1}{2}\omega t \\ \omega & , \quad \frac{1}{2}\omega t < x < \frac{1+\omega}{2} t \\ 1 & , \quad \frac{1}{2}(1+\omega)t < x \end{cases} \tag{3.3.2}$$

$$u_E(x,t) := \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x/t & , \quad 0 < x < t \\ 1 & , \quad t < x \end{cases} \qquad \text{(Verdünnungsfächer)} \ . \tag{3.3.3}$$

Hierbei ist ω eine beliebige aber feste reelle Zahl. In beiden Fällen können die Sprungbedingungen verifiziert werden, d.h. es handelt sich um schwache Lösungen (vgl. Lemma 3.1).

Es stellt sich nun die Frage, wie man eine eindeutige schwache Lösung definieren soll. Dazu müssen Kriterien gefunden werden, die die physikalisch sinnvolle Lösung charakterisieren. In der Literatur gibt es verschiedene Ansätze, die im folgenden vorgestellt werden sollen.

3.3.1 Entropiebedingung von Oleinik

Im skalaren, räumlich eindimensionalen Fall hat Oleinik [O] eine Bedingung hergeleitet, die eine bestimmte schwache Lösung charakterisiert:

Satz 3.6 *Entropiebedingung von Oleinik für skalare Erhaltungssätze*

Vor.: (a) $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $M := \inf\{\alpha | \, |u_0| \le \alpha \text{ f.ü.}\} < \infty$;
(b) $F \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mu := \min\{F''(u) \mid |u| \le M\} > 0$ (konvex);
(c) $A := \max\{|F'(u)| \mid |u| \le M\}$;
(d) $S \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $B := \max\{S'(u) \mid |u| \le M\}$.

Beh.: Es existiert genau eine schwache Lösung von (3.1.1) und (3.1.3) mit
(a) $|u(x,t)| \le M \; \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$;
(b) Es existiert eine Konstante $E = E(M,A,\mu) > 0$, so daß für alle $a > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{u(x+a,t)-u(x,t)}{a} < \frac{E}{t} \quad \text{(Entropiebedingung)} \; ; \tag{3.3.4}$$

(c) u ist stabil und hängt stetig von Anfangsbedingungen ab, d. h.: sei v eine Lösung zu den Anfangsbedingungen $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, dann gilt für alle $x_1 < x_2$ und $t > 0$:

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x,t)-v(x,t)| \, dx \le \exp(Bt) \int_{x_1-At}^{x_2+At} |u_0(x)-v_0(x)| \, dx \, .$$

Der Beweis ist sehr technisch. Er basiert aber auf einigen wenigen grundlegenden Techniken, die charakteristisch für die Konvergenzuntersuchung von finiten Differenzenverfahren ist. Diese sollen deshalb hier demonstriert werden. Die technische Durchführung kann in [O] nachgelesen werden. Der Beweis selber gliedert sich in drei Teile:

1.) Eindeutigkeit der Lösung:

Ausgehend von zwei schwachen Lösungen u_1 und u_2, die die Gleichung (3.3.4) erfüllen, zeigt man, daß diese im distributiven Sinne gleich sind, d. h.:

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (u_1 - u_2) \, \phi dx dt = 0 \qquad \text{für alle } \phi \in C_0^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

wobei die Testfunktion ϕ außerhalb eines Kompaktums $[a,b] \subset \mathbb{R}$ für $t \ge \delta_1 > 0$, δ_1 beliebig klein, verschwindet. Dazu geht man von der Definition der schwachen Lösung (3.2.8) für u_1 und u_2 aus. Durch Differenzenbildung erhält man:

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left(\tilde{\phi}_{,t}(t,x) + \tilde{F}(t,x)\tilde{\phi}_{,x}(t,x) + \tilde{S}(t,x)\tilde{\phi}(t,x)\right) (u_1(t,x) - u_2(t,x)) \, dx dt = 0$$

mit dem modifizierten Fluß $\tilde{F}$ und dem modifizierten Quellterm $\tilde{S}$:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t,x) &:= \int_0^1 F'(u_1(t,x) - \tau(u_2(t,x) - u_1(t,x)))d\tau,\\ \tilde{S}(t,x) &:= \int_0^1 S'(u_1(t,x) - \tau(u_2(t,x) - u_1(t,x)))d\tau\end{aligned}$$

für eine beliebige Testfunktion $\tilde{\phi} \in C_0^1(\mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}, \mathrm{IR})$. Da u_1 und u_2 nur schwache Lösungen sind, müssen $\tilde{F}$ und $\tilde{S}$ nicht stetig differenzierbar sein. Deshalb glättet man diese mittels der Sobolevschen Mittelungsfunktion (vgl. Kap. 5) und geht über zu

$$\tilde{F}^h(t,x) := \int_0^1 F'(u_1^h(t,x) - \tau(u_2^h(t,x) - u_1^h(t,x)))d\tau,$$

die bezüglich h gleichmäßig gegen $\tilde{F}$ konvergiert. Analog konstruiert man $\tilde{S}_\rho$ so, daß diese für alle $x, t,\ 0 < \rho \le 1$ gleichmäßig beschränkt ist und im Mittel gegen $\tilde{S}$ konvergiert. Zu zeigen ist nun, daß der lineare Erhaltungssatz

$$\tilde{\phi}_{,t} + \tilde{F}^h_{,x}\tilde{\phi}_{,x} + \tilde{S}_\rho\tilde{\phi} = \phi, \qquad \rho_1 \le t < T,\ x \in \mathrm{IR}$$

$$\phi(T,x) = 0, \qquad x \in \mathrm{IR}$$

für $T > 0$ beliebig eine eindeutige Lösung besitzt, die in $C_0^1(\mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}, \mathrm{IR})$ liegt. Dazu benötigt man die Existenz der Lösung entlang der Charakteristik für h beliebig klein, um den Grenzübergang $h \to 0$ durchführen zu können. Hier geht die Entropiebedingung ein, denn diese garantiert die gleichmäßige Beschränktheit von $\partial u_i^h/\partial x,\ i = 1, 2$, in h.

2.) Existenz der Lösung:

Der Beweis wird konstruktiv geführt. Dazu wird (3.1.1) mittels dem Lax-Friedrichs-Verfahren (vgl. Kap. 4)

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\,\Delta x}\left[F(u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n)\right] + \Delta t\ S(u_j^n)\,, \tag{3.3.5}$$

$$A\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1 \qquad \text{(CFL – Bedingung)}$$

diskretisiert. Zunächst zeigt man, daß für ein beliebiges, aber festes $T > 0$ eine Teilfolge von (3.3.5) auf $G := [0,T] \times \mathrm{IR}$ in $L^1(G, \mathrm{IR})$ konvergiert. Dazu definiert man sich aus den diskreten Werten eine Gitterfunktion zur Zeitschrittweite Δt und der Ortsschrittweite Δx

$$U^{\Delta t,\Delta x}(t,x) := u_j^n, \qquad x \in [j\Delta x, (j+1)\Delta x),\ t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t) \tag{3.3.6}$$

mit $n - j$ gerade und verifiziert für diese die Voraussetzungen des Satzes von Helly (vgl. 5), d. h.:

— die totale Variation auf einem beliebigen Zeitlevel $t = const.$ ist gleichmäßig durch die totale Variation von u_0 beschränkt;

— die Gitterfunktionen sind gleichmäßig beschränkt durch M.

Hierzu faßt man (3.3.5) als eine Rekursionsformel auf, die sukzessive ineinander eingesetzt wird. Damit wird der Bezug zwischen zwei beliebigen Zeitleveln hergestellt. Daraus folgt die punktweise Konvergenz einer Teilfolge der Gitterfunktionen auf einer abzählbaren Familie von Zeitleveln $t = const.$ und die Konvergenz in $L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Hieraus kann die Konvergenz in $L^1(G,\mathbb{R})$ geschlossen werden. Die Konvergenz der gesamten Folge von Gitterfunktionen folgt indirekt aus der schon bewiesenen Eindeutigkeit. Dazu zeigt man, daß die konvergente Teilfolge die Bedingung (3.3.4) erfüllt.

3.) Schwache Lösung:

Dazu multipliziert man (3.3.5) mit einer Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(G,\mathbb{R})$, die an der Stelle $j\Delta x$ ausgewertet wird und summiert über alle $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \{0,\ldots,\lfloor T/\Delta t\rfloor\}$. Die Summanden werden so umsortiert, daß zentrale Differenzen in Ortsrichtung für $\partial\phi/\partial x$ und einseitige Differenzen in Zeitrichtung für $\partial\phi/\partial t$ entstehen. Faßt man die Summen als Kubaturformeln in Orts- und Zeitrichtung auf und führt den Grenzübergang für Δt, $\Delta x \to 0$ durch, so ergibt sich gerade die schwache Formulierung (3.2.8) für die Grenzfunktion. Hierzu muß allerdings vorausgesetzt werden, daß die Gitterfunktion für $t \to 0$ im distributiven Sinne gleich ist mit den Anfangsdaten.

Ein modifizierter Beweis findet sich auch in [S], S. 267-281. Dort wird allerdings nur der homogene Fall ($S \equiv 0$) betrachtet.
Die Bedingung (3.3.4) ist die sogenannte Entropiebedingung von Oleinik. Diejenige schwache Lösung, die (3.3.4) erfüllt, heißt Entropielösung. Analog wie in der Physik charakterisiert sie eindeutig, in welcher Richtung die Prozesse ablaufen dürfen. Betrachtet man noch einmal das Beispiel (3.3.1), so läßt sich nun leicht verifizieren, daß die Lösungen u_ω keine Entropielösungen sind, dafür aber u_E. Aus der Entropiebedingung lassen sich zwei weitere wesentliche Aussagen ableiten:

Korollar 3.3 *Charakterisierung von Stößen*

Vor.: (a) $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $M := \inf\{\alpha|\ |u_0| \le \alpha \text{ f.ü.}\} < \infty$;
(b) $F \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mu := \min\{F''(u)|\ |u| \le M\} > 0$ (konvex);
(c) $S \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Beh.: (a) Es sind nur Sprünge nach unten zugelassen, d.h.:

$$u_R < u_L \ ;$$

(b) Die Stoßgeschwindigkeit s liegt zwischen den Geschwindigkeiten links und rechts des Stoßes, d.h.:

$$F'(u_R) < s < F'(u_L)\ . \tag{3.3.7}$$

Die erste Aussage folgt unmittelber aus (3.3.4), denn es muß gelten:

$$u_R - u_L \overset{!}{<} \frac{Ea}{t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\ . \tag{3.3.8}$$

Aufgrund der Rankine–Hugoniot–Sprungbedingung und dem Mittelwertsatz gilt:

$$s \overset{\text{RHS}}{=} \frac{F(u_L) - F(u_R)}{u_L - u_R} \overset{\text{MWS}}{=} F'(u), \quad u \in (u_R, u_L)\,. \tag{3.3.9}$$

Aus der Konvexität von F folgt damit (3.3.7). Die Charakteristiken links und rechts des Stoßes laufen somit in den Stoß (vgl. Abb. 14). Für den konkaven Fall ($F'' < 0$) läßt sich

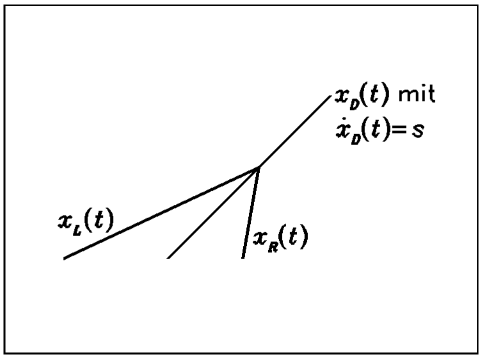


Abbildung 14: lokale Diskontinuität

Korollar 3.3 übertragen. Die Relation „<“ muß jedoch durch „>“ ersetzt werden.
Der Nachteil der Entropiebedingung (3.3.4) liegt darin begründet, daß sie nicht auf Systeme bzw. räumlich mehrdimensionale Probleme übertragen werden kann. Dazu müssen andere Ansätze betrachtet werden, z.B. die Viskositätsmethode, die im folgenden beschrieben werden soll.

3.3.2 Viskositätsmethode

Zur Motivation dieser Methode betrachtet man die Navier–Stokes–Gleichungen und die Eulergleichungen in dimensionsloser Form (vgl. 2.3.38). Diese lassen sich in der konservativen Form darstellen als:

$$\boldsymbol{u}^\epsilon_{,t} + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{F}^I_1(\boldsymbol{u}^\epsilon), \ldots, \boldsymbol{F}^I_d(\boldsymbol{u}^\epsilon)\right) = \epsilon \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} \boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon)\boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_k}\right)_{,x_i} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}^\epsilon), \quad \epsilon > 0 \tag{3.3.10}$$

$$\boldsymbol{u}_{,t} + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{F}^I_1(\boldsymbol{u}), \ldots, \boldsymbol{F}^I_d(\boldsymbol{u})\right) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\,. \tag{3.3.11}$$

Bei den in Kapitel 2.3.1 und 2.3.3 betrachteten Gasen wurde thermodynamisches Gleichgewicht vorausgesetzt. Dadurch war dort der Produktionsterm $\boldsymbol{S}$ nicht vorhanden. Geht man jedoch zum Nichtgleichgewicht über, so kommt es zu einem Austausch der Freiheitsgrade und zu chemischen Reaktionen der Gaskomponenten, sowie zu Einflüssen von außerhalb des betrachteten Systems (z.B. Gravitation, etc.). Diese Terme werden in $\boldsymbol{S}$ zusammengefaßt. Desweiteren wurden im obigen Modell keine Diffusionseffekte berücksichtigt. Dadurch war insbesondere $\epsilon = 1/Re$ der einzige konstante Parameter.
Werden diese Diffusionsterme dimensionslos gemacht, so treten weitere Kenngrößen auf, die die Strömung charakterisieren. Allgemein läßt sich feststellen, daß zu jedem physikalischen Effekt (Diffusion, Reibung, Wärmeleitung, etc.) zweiter Ordnung, d.h. der sich in

der Form $\operatorname{div}(f\,\mathbf{grad}\,g)$ darstellen läßt, eine Kenngröße (Schmidt–Zahl, Reynolds–Zahl, Prandtl–Zahl, etc.) existiert. Es werden aber nicht alle Kenngrößen konstant sein. Dies liegt daran, daß in dem Differentialgleichungssystem mehr physikalische Größen auftreten, als Gleichungen vorhanden sind. Deshalb kann nicht jede einzelne Größe dimensionslos gemacht werden. Da sich für die Mathematik die unterschiedlichen physikalischen Effekte alle als Terme zweiter Ordnung darstellen lassen, reicht es, wenn nur eine Kenngröße ϵ für alle Effekte verwendet wird.
Im folgenden sollen nun beliebige Systeme der Form (3.3.10) und (3.3.11) betrachtet werden, wobei ϵ ein beliebiger positiver Parameter ist. Dabei müssen die Systeme nicht notwendigerweise in dimensionsloser Form vorliegen. Das System (3.3.10) heißt dann parabolisch, wenn die Matrizen $\boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u})$ nur Eigenwerte mit nicht negativem Realteil haben. Dies ist für die Navier–Stokes–Gleichungen erfüllt. Es soll nun der Grenzübergang vom parabolischen zum hyperbolischen System, also $\epsilon \to 0^+$, betrachtet werden. Dazu sollen folgende Fragen untersucht werden:

1. Existieren glatte Lösungen $\boldsymbol{u}^\epsilon$ zu (3.3.10) ?

2. Existiert der Grenzwert $\boldsymbol{u}(t,.) := \lim_{\epsilon\to 0} \boldsymbol{u}^\epsilon(t,.)$ bezüglich $L^1(\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR}^m)$ für alle $t > 0$?

3. Ist $\boldsymbol{u}$ schwache Lösung von (3.3.11) ?

Für den skalaren, räumlich eindimensionalen Fall konnte Oleinik diese Fragen beantworten. Dazu untersuchte sie die Gleichungen

$$u^\epsilon_{,t} + (F(u^\epsilon))_{,x} = \epsilon\, u^\epsilon_{,x,x} + S(u^\epsilon)\,, \qquad \epsilon > 0, \tag{3.3.12}$$
$$u_{,t} + (F(u))_{,x} = S(u)\,. \tag{3.3.13}$$

Satz 3.7 *Lösung des hyperbolischen Problems als Grenzwert von parabolischen Lösungen*

Vor.: (a) $u_0 \in L^\infty(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$;
(b) $F \in C^2(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$, $\mu := \min\{F''(u)|\, |u| \le M\} > 0$ (konvex);
(c) $S \in C^1(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$.

Beh.: (a) Es existiert eine eindeutige differenzierbare Lösung u^ϵ von (3.3.12) für $t > 0$;
(b) für $\epsilon \to 0^+$ konvergiert $u^\epsilon(t,.)$ gegen eine Lösung $u(t,.)$ von (3.3.13) bezüglich $L^1([-X,X],\mathrm{IR})$ mit $t > 0$, $X > 0$ beliebig;
(c) für $\epsilon \to 0^+$ ist $u^\epsilon(t \to 0^+,.)$ im distributiven Sinne gleich mit den Anfangsdaten u_0;
(d) u erfüllt die Entropiebedingung von Oleinik.

Der Beweis kann in [O] nachgelesen werden:

1.) Existenz einer schwachen Lösung, die (3.3.4) erfüllt:

Analog zum hyperbolischen Fall läßt sich zeigen, daß das Lax–Friedrichs–Verfahren (3.3.5) gegen eine Grenzfunktion u^ϵ konvergiert für $\Delta x^2/2\Delta t \to \epsilon$ in $G := [0,T] \times \mathbb{R}$, $T > 0$ beliebig, die die schwache Formulierung

$$\int_G u^\epsilon \phi_{,t} + F(u^\epsilon)\phi_{,x} - S(u^\epsilon)\phi + \epsilon u^\epsilon \phi_{,x,x}\, dxdt = 0$$

für eine beliebige Testfunktion $\phi \in C_0^3(G, \mathbb{R})$ erfüllt, falls die Gitterfunktion (3.3.6) für $t \to 0^+$ im distributiven Sinne gleich ist mit den Anfangsdaten. Somit ist u^ϵ eine schwache Lösung des parabolischen Problems (3.3.12). Aus Abschätzungen für die Gitterfunktion kann man zeigen, daß u^ϵ die Entropiebedingung (3.3.4) erfüllt.

2.) Existenz einer klassischen Lösung:

Zu zeigen ist, daß die in (3.3.12) auftretenden partiellen Ableitungen $u^\epsilon_{,t}$, $u^\epsilon_{,x}$, $u^\epsilon_{,x,x}$ existieren und stetig sind. Dazu untersucht man die Differenzierbarkeit in einem beliebigen Punkt $(t_0, x_0) \in G$. Die Technik zur Verifikation der Differenzierbarkeit beruht auf dem Existenzsatz von Sobolev (vgl. Kap. 5). Dieser besagt, daß eine Funktion $\varphi \in L^1(G, \mathbb{R})$ schwache Ableitungen $\partial^{|\mathbf{l}|}\varphi/\partial^{l_1}x\, \partial^{l_2}t \in L^2(G, \mathbb{R})$, $\mathbf{l} = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}_0^2$ besitzt, falls es eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $\{\varphi_k\}_k$ gibt, die schwach konvergent gegen φ sind und deren Ableitungen $\mathbf{l}$–ter Ordnung gleichmäßig in $L^2(G, \mathbb{R})$ beschränkt sind. Deshalb geht man wieder zu den Sobolevschen Mittelungsfunktionen $u^{\epsilon,h}$, F^h und S^h über und untersucht das modifizierte Problem

$$\epsilon\left(u^{\epsilon,h}\right)_{,x,x} - \left(u^{\epsilon,h}\right)_{,t} = \left(F^h(u^\epsilon)\right)_{,x} - S^h(u^\epsilon). \tag{3.3.14}$$

Man beachte, daß die Ableitung der Mittelungsfunktion gleich der Mittelungsfunktion der schwachen Ableitungen ist, falls letztere existiert. Um von den schwachen Ableitungen zum klassischen Differentiationsbegriff übergehen zu können, möchte man u^ϵ lokal als Lösung der Wärmeleitungsgleichung darstellen, von der man weiß, daß sie differenzierbar ist. Dazu multipliziert man $u^{\epsilon,h}$ mit einem Filter

$$F_\rho(t,x) := \begin{cases} 0 & , \quad (t,x) \notin K_\rho \\ 1 & , \quad (t,x) \in K_{\rho/2} \\ \text{bel.} & , \quad \text{so daß } F_\rho \text{ unendlich oft differenzierbar ist} \end{cases}$$

wobei $K_\rho := \{(t,x)\,|\, t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ (t-t_0)^2 + (x-x_0)^2 < \rho^2\} \subset G$ die Kreisfläche um den Punkt $(t_0, x_0) \in G$ mit Radius ρ ist, und erhält mit (3.3.14)

$$\epsilon\left(w_h^\rho(t,x)\right)_{,x,x} - \left(w_h^\rho(t,x)\right)_{,t} = \Phi_h^\rho(t,x) \tag{3.3.15}$$

mit

$$w_h^\rho := u^{\epsilon,h} F_\rho \tag{3.3.16}$$

$$\Phi_h^\rho := F_\rho\left(F^h_{,x} - S^h\right) + 2\epsilon F_{\rho,x} u^{\epsilon,h}_{,x} - F_{\rho,t} u^{\epsilon,h} + \epsilon F_{\rho,x,x} u^{\epsilon,h} \tag{3.3.17}$$

und den Anfangsbedingungen

$$w_h^\rho(0,x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dabei beachte man, daß Φ_h^ρ unabhängig von w_h^ρ ist und nur von t und x abhängt. Somit kann die Lösung von (3.3.15) als eine Faltung dargestellt werden (vgl. Kap. 5). Zu zeigen bleibt damit, daß die partiellen Ableitungen von w_h^ρ gleichmäßig beschränkt und stetig sind für $h \to 0^+$. Mit der Wahl des Filters gilt dies dann auch für $u^{\epsilon,h}$.

3.) Eindeutigkeit der klassischen Lösung:

Zunächst stellt man die Lösung entlang einer Geraden $t = const.$ wieder als Lösung einer Wärmeleitungsgleichung dar. Der benutzte Filter wird hierbei allerdings nur in Ortsrichtung angewendet. Ausgehend von zwei verschiedenen Lösungen zeigt man über die Darstellung des Faltungsintegrals (vgl. Kap. 5), daß diese identisch sein müssen.

Eine ähnliche Aussage konnte bisher nicht allgemein auf Systeme bzw. mehrere Raumdimensionen übertragen werden. Dies ist bisher nur für Spezialfälle geglückt:
Für das p–System wurde im räumlich eindimensionalen Fall zu einem bestimmten Term 2. Ordnung für das homogene Problem ($\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$) die eindeutige Existenz einer glatten Lösung des parabolischen Problems bewiesen (vgl. [NS]). Der Beweis basiert auf den gleichen Techniken wie im skalaren Fall von Oleinik.
Das parabolische p–System ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_{,t} - v_{,x} &= \epsilon\ \tau_{,x,x} \\ v_{,t} + p_{,x} &= \mu\ v_{,x,x} \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

mit $p = p(\tau),\ p' < 0,\ p'' > 0$. Man beachte, daß dieses System nicht physikalisch motiviert ist, denn das hyperbolische Problem (vgl. Kap. 2.4.3) wurde aus den Eulergleichungen unter der Annahme der Isentropie, d. h. konstanter physikalischer Entropie, hergeleitet. Aus der Thermodynamik (vgl. Satz 2.2) weiß man aber, daß die Viskosität die Entropie erhöht (siehe auch (2.3.21) bzw. (2.3.33)). Das hier betrachtete Problem dient also in erster Linie der Untersuchung des Übergangs vom parabolischen zum hyperbolischen System (vgl. Kap. 2.4.3). Dazu eignet es sich allerdings sehr gut, denn es handelt sich hier wohl um das einfachste nichtlineare System, das nahezu entkoppelt ist. Nishida und Smoller konnten die Existenz einer glatten Lösung für $\epsilon,\ \mu > 0$ zeigen (vgl. [NS]):

Satz 3.8 *Existenz von glatten Lösungen des parabolischen p–Systems*

Vor.: (a) $\tau_0,\ v_0 \in BV(\mathrm{IR})$;
(b) $\inf\{\tau_0(x)\,|\,x \in \mathrm{IR}\} \geq \rho > 0$;
(c) $\epsilon,\ \mu > 0$.

Beh.: Es existiert eine eindeutige klassische Lösung von (3.3.18) zu den Anfangsdaten $\tau_0,\ v_0$, die auf jeder Geraden $t = const.$ von beschränkter Variation ist.

Der Beweis ist sehr stark an den Techniken von Oleinik zum skalaren Fall orientiert. Die grundlegende Idee ist auch hier die komponentenweise Diskretisierung von (3.3.18) durch ein finites Differenzenverfahren:

$$\begin{aligned} \tau_j^{n+1} &= \tau_j^n + \tfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n\right) + \epsilon\tfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(\tau_{j+1}^n - 2\tau_j^n + \tau_{j-1}^n\right) \\ v_j^{n+1} &= v_j^n - \tfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left(p(v_{j+1}^n) - p(v_{j-1}^n)\right) + \mu\tfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n\right). \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Für $\epsilon = \mu = (\Delta x)^2/2\Delta t$ ergibt sich das Lax–Friedrichs–Verfahren, das aber aus der Diskretisierung des hyperbolischen Problems (vgl. Kap. 2.4.3) hervorgeht. Das Ziel ist nun die Voraussetzungen des Satzes von Helly zu verifizieren (vgl. Kap. 5), also die gleichmäßige Beschränktheit von $\{\tau_j^n\}_j$ bzw. $\{v_j^n\}_j$ und deren diskrete totale Variation (vgl. (4.1.9)) für ein beliebiges Zeitlevel $n > 0$, um so die Konvergenz einer Teilfolge von Gitterfunktionen auf $[0, T] \times \mathrm{IR}$, $T > 0$ beliebig aber fest, zu erhalten. Dazu werden einige Voraussetzungen an das Verfahren gestellt, die die Stabilität gewährleisten:

— $\frac{\Delta t}{\Delta x} \max \left\{ \sqrt{-p'(\tau)} \,|\, \tau \geq c(T) \right\} \leq 1$ (CFL–Bedingung);

— $\max\{\epsilon, \mu\} \leq \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \leq const. < \infty$;

— $v_j^n \geq c(T)$ oder $\epsilon = \mu$.

Die Eindeutigkeit und die Differenzierbarkeit verlaufen technisch gesehen analog zu dem Beweis von Oleinik.

Ziel der viskosen Methode ist die Darstellung der Lösung des hyperbolischen Problems als Grenzwert der Lösungen des parabolischen Problems. Nishida und Smoller behaupten in ihrer Arbeit, daß der Grenzübergang für die von ihnen hergeleiteten parabolischen Lösungen nicht möglich ist, da bei einigen Abschätzungen Schranken der Form $O\left(\frac{T}{\sqrt{\epsilon\mu}}\right)$ auftreten. DiPerna zeigte allerdings für Systeme von zwei Gleichungen, daß es eine Teilfolge von Lösungen des parabolischen Problems gibt, die unter gewissen Voraussetzungen gegen eine Lösung des hyperbolischen Systems konvergieren (vgl. [D]). Der Beweis beruht auf drei grundlegenden Techniken:

— Maßtheorie (Satz von Radon–Nikodym, Radon–Maß) [T];

— Funktionalanlysis (Compensated Compactness) [T], [M];

— Entropiekonzept (Progressing Entropy Waves) [La1], Kap. 3.3.3.

Auf diese kann hier nicht näher eingegangen werden.
Allgemein läßt sich aber zeigen, daß der Grenzwert $\boldsymbol{u}$ der viskosen Lösungen $\boldsymbol{u}^\epsilon$ von (3.3.10) eine schwache Lösung des hyperbolischen Systems (3.3.11) ist. Dies besagt der folgende Satz:

Satz 3.9 *Grenzwert der Lösungen des parabolischen Systems ist schwache Lösung*

Vor.: (a) $\boldsymbol{u}_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$;

(b) $\boldsymbol{u}^\epsilon$ sei eine glatte Lösung des parabolischen Problems (3.3.10) zu den Anfangsdaten $\boldsymbol{u}_0$;

(c) $\boldsymbol{u}^\epsilon(t,.)$ bzw. $\boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_i}(t,.)$ konvergiere für $\epsilon \to 0^+$ gegen eine Grenzfunktion $\boldsymbol{u}(t,.)$ bzw. $\boldsymbol{u}_{,x_i}(t,.)$ bezüglich $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ mit $t > 0$ beliebig;

(d) für $\epsilon \to 0^+$ sei $\boldsymbol{u}^\epsilon(t \to 0^+, \cdot)$ im distributiven Sinne gleich mit den Anfangsdaten $\boldsymbol{u}_0$;

(e) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_{,x_i} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Beh.: $\boldsymbol{u}$ ist schwache Lösung von (3.3.11) zu den Anfangsdaten $\boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$.

Dazu multipliziert man eine beliebige Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ auf das parabolische System (3.3.10) und integriert über $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \phi \operatorname{div}^* (\boldsymbol{u}^\epsilon, \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u}^\epsilon), \ldots, \boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{u}^\epsilon)) - \phi \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}^\epsilon) dx_1 \ldots dx_d\, dt \\ &\quad = \epsilon \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \phi \operatorname{div} \left(\boldsymbol{F}_1^V, \ldots, \boldsymbol{F}_d^V \right) dx_1 \ldots dx_d\, dt \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

$$\text{mit} \qquad \boldsymbol{F}_i^V = \boldsymbol{F}_i^V\left(\boldsymbol{u}^\epsilon, \boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_1}, \ldots, \boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_d}\right) = \sum_{k=1}^d \boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon)\boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_k}. \tag{3.3.21}$$

Die Integrale sind beschränkt, da die Integranden stetig sind und ϕ einen kompakten Träger hat. Schreibt man die Divergenzterme analog zu (3.2.4) um und wendet den Satz von Gauß auf den kompakten Träger $\operatorname{supp}^*(\phi)$ in Zeit – Raum bzw. $\operatorname{supp}^*(\phi(t,\cdot))$ im Raum an, so erhält man aus (3.3.20):

$$\begin{aligned}
&\oint_{\partial \mathrm{supp}^*(\phi)} \phi\,(\boldsymbol{u}^\epsilon, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\, \boldsymbol{N}^*\, ds_1 \ldots ds_d \\
&\qquad - \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} (\boldsymbol{u}^\epsilon, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\, \mathbf{grad}^*\, \phi\, dx_1 \ldots dx_d\, dt \\
&\qquad\qquad - \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \phi \boldsymbol{S}\, dx_1 \ldots dx_d\, dt \\
&= \epsilon \int_{\mathbb{R}_+} \oint_{\partial \mathrm{supp}(\phi(t,\cdot))} \phi \left(\boldsymbol{F}_1^V, \ldots, \boldsymbol{F}_d^V\right) \boldsymbol{N}^*\, ds_1 \ldots ds_{d-1}\, dt \\
&\qquad - \epsilon \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \left(\boldsymbol{F}_1^V, \ldots, \boldsymbol{F}_d^V\right) \mathbf{grad}\, \phi\, dx_1 \ldots dx_d\, dt\;.
\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Da ϕ auf dem Rand des Trägers außer für $t = 0$ verschwindet, gilt für die Randintegrale:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial \mathrm{supp}^*(\phi)} \phi\,(\boldsymbol{u}^\epsilon, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\, \boldsymbol{N}^*\, ds_1 \ldots ds_d &= - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(0, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}^\epsilon(0, \boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_d\;, \\
\int_{\mathbb{R}_+} \oint_{\partial \mathrm{supp}(\phi(t,\cdot))} \phi \left(\boldsymbol{F}_1^V, \ldots, \boldsymbol{F}_d^V\right) ds_1 \ldots ds_{d-1}\, dt &= \mathbf{0}\;.
\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Mit den Voraussetzungen (c), (d) und (e) und den Identitäten (3.3.23) geht (3.3.22) über in die Darstellung (3.2.8). Dies ist gerade die Definition einer schwachen Lösung.

3.3.3 Entropiekonzept

Im vorausgegangenen Kapitel wurde gezeigt, daß sich die Lösung $\boldsymbol{u}$ des hyperbolischen Problems als Grenzwert der Lösungen $\boldsymbol{u}^\epsilon$ von parabolischen Problemen in bestimmten Fällen darstellen läßt. Dabei ergaben sich die parabolischen Probleme durch kleine Störungen des hyperbolischen Problems durch Terme 2. Ordnung.
In Kapitel 3 wurde an einem Beispiel gezeigt, daß die schwache Lösung nicht notwendigerweise eindeutig sein muß. Es stellen sich daher die beiden Fragen:

1. Konvergiert $\boldsymbol{u}^\epsilon$ unabhängig von den Matrizen $\boldsymbol{C}^{ki}$ in (3.3.10) gegen dieselbe Grenzfunktion $\boldsymbol{u}$?

2. Ist $\boldsymbol{u}$ die Entropielösung des hyperbolischen Problems (3.3.11)?

Dazu muß ein Kriterium gefunden werden, das die gesuchte (physikalische) Lösung charakterisiert. Die Mathematik macht hier wiederum eine Anleihe bei der Physik. Wie in Kapitel 2.3.2 dargestellt, konnte aus den Navier–Stokes–Gleichungen die Entropiegleichung (2.3.32) für den Fall des thermodynamischen Gleichgewichtes abgeleitet werden. Diese hat formal folgende (dimensionslose) Gestalt:

$$\begin{aligned}(U(\boldsymbol{u}^\epsilon))_{,t} + \operatorname{div}\left(F_1^U(\boldsymbol{u}^\epsilon), \dots, F_d^U(\boldsymbol{u}^\epsilon)\right) &= \\ \epsilon\left(\tilde{\boldsymbol{C}}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon)\boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_k}\right)_{,x_i} &+ \epsilon P(\boldsymbol{u}^\epsilon, \boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_1}, \dots, \boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_d}) + S^U(\boldsymbol{u}^\epsilon)\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

mit

$$P(\boldsymbol{u}^\epsilon, \boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_1}, \dots, \boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_d}) \le 0 \qquad \text{und} \tag{3.3.25}$$

$$U \text{ ist konvex.} \tag{3.3.26}$$

Dabei wurde aus Konsistenzgründen zur mathematischen Literatur hier die negative physikalische Entropie verwendet. Für die physikalische Entropie gilt $\sum \ge 0$ und U konkav. Für $\epsilon \to 0^+$ (Re$=\infty$) gehen die Navier–Stokes–Gleichungen in die Eulergleichungen über (vgl. Kap. 2.4.2) und somit auch (3.3.24) in

$$(U(\boldsymbol{u}))_{,t} + \operatorname{div}\left(F_1^U(\boldsymbol{u}), \dots, F_d^U(\boldsymbol{u})\right) = S^U(\boldsymbol{u})\,. \tag{3.3.27}$$

Die Mathematiker suchen nun eine skalare Größe U und Flüsse F_i^U, $i = 1, \dots, d$, derart, daß die Gleichungen (3.3.10) bzw. (3.3.11) eine zusätzliche Gleichung der Form (3.3.24) bzw. (3.3.27) erfüllen. Die Herleitung wird hier nur für das parabolische Problem durchgeführt, da dieses das hyperbolische Problem umfaßt. Dazu wird vorausgesetzt, daß U eine Funktion in $C^2(\mathrm{IR}^m, \mathrm{IR})$ ist. Zunächst betrachtet man die j–te (ausdifferenzierte) Gleichung des Systems (3.3.10)

$$\begin{aligned}u^\epsilon_{j,t} + \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial F_{k,j}(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u^\epsilon_l} u^\epsilon_{l,x_k} &= \\ \epsilon \sum_{i,k,l,n=1}^d \frac{\partial C^{ki}_{j,l}(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u^\epsilon_n} u^\epsilon_{n,x_i} u^\epsilon_{l,x_k} &+ \epsilon \sum_{i,k,l=1}^d C^{ki}_{j,l}(\boldsymbol{u}^\epsilon) u^\epsilon_{l,x_k,x_i} + S_j(\boldsymbol{u}^\epsilon)\,,\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

multipliziert diese mit $\partial U(\boldsymbol{u})/\partial u_j$ und summiert über alle Gleichungen j:

$$\begin{aligned}&\underbrace{\sum_{j=1}^d \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u^\epsilon_j} u_{j,t}}_{I} + \underbrace{\sum_{k,l,j=1}^d \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u^\epsilon_j} \frac{\partial F_{k,j}(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u^\epsilon_l} u^\epsilon_{l,x_k}}_{II} = \underbrace{\sum_{j=1}^d \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u^\epsilon_j} S_j(\boldsymbol{u}^\epsilon)}_{III} \\ &\quad + \underbrace{\epsilon \sum_{j=1}^d \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u^\epsilon_j}\left[\sum_{i,l,k,n=1}^d \frac{\partial C^{ki}_{jl}(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u^\epsilon_n} u^\epsilon_{n,x_i} u^\epsilon_{l,x_k} + \sum_{i,k,l=1}^d C^{ki}_{jl}(\boldsymbol{u}^\epsilon) u^\epsilon_{l,x_k,x_i}\right]}_{IV}.\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

Faßt man die Summen in den Termen I, II und III als Matrix–Vektor– bzw. Skalarprodukt auf, so können diese auch kompakter geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial \boldsymbol{u}^\epsilon} \boldsymbol{u}_{,t} \,, \\
II &= \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial \boldsymbol{u}^\epsilon} \frac{\partial \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u^\epsilon} u_{,x_k} \,, \\
III &= \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial \boldsymbol{u}^\epsilon} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}^\epsilon) \,.
\end{aligned}
\tag{3.3.30}
$$

Bevor der Term IV in eine ähnliche Form gebracht wird, sollen die einzelnen Terme der Summen umgeschrieben werden. Dazu überlegt man sich mittels der Produktregel:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u_j^\epsilon} C_{jl}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) u_{l,x_k} \right)_{,x_i} &= \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u_n^\epsilon \partial u_j^\epsilon} u_{n,x_i}^\epsilon C_{jl}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) u_{l,x_k}^\epsilon \\
&+ \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u_j^\epsilon} \frac{\partial C_{jl}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u_n^\epsilon} u_{n,x_i}^\epsilon u_{l,x_k}^\epsilon + \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u_j^\epsilon} C_{jl}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) u_{l,x_k,x_i}^\epsilon \,.
\end{aligned}
\tag{3.3.31}
$$

Daraus folgt für IV:

$$
IV = \sum_{i,j,l,k,n=1}^{d} \left(\frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u_j^\epsilon} C_{jl}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) \boldsymbol{u}_{l,x_k}^\epsilon \right)_{,x_i} - \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u_n^\epsilon \partial u_j^\epsilon} u_{n,x_i}^\epsilon C_{jl}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) u_{l,x_k}^\epsilon \right) \,. \tag{3.3.32}
$$

Da die Hesse–Matrix von U nach Voraussetzung existiert und diese symmetrisch ist, gilt:

$$
\frac{\partial^2 U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u_n^\epsilon \partial u_j^\epsilon} u_{n,x_i}^\epsilon C_{jl}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) u_{l,x_k}^\epsilon = u_{n,x_i}^\epsilon \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial u_n^\epsilon \partial u_j^\epsilon} C_{jl}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) u_{l,x_k}^\epsilon \,. \tag{3.3.33}
$$

Die Summen der beiden Terme in (3.3.32) lassen sich nun als Matrix–Vektor–Produkt schreiben.

$$
IV = \sum_{k,i=1}^{d} \left(\frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) \boldsymbol{u}_{,x_k}^\epsilon \right)_{,x_i} - \sum_{k,i=1}^{d} \boldsymbol{u}_{,x_i}^\epsilon \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial^2 \boldsymbol{u}^\epsilon} C^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) u_{,x_k}^\epsilon \,. \tag{3.3.34}
$$

Die Gleichung (3.3.29) geht mit (3.3.30) und (3.3.34) über in

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial \boldsymbol{u}^\epsilon} \boldsymbol{u}_{,t}^\epsilon + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial \boldsymbol{u}^\epsilon} \frac{\partial \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial \boldsymbol{u}^\epsilon} \boldsymbol{u}_{,x_k}^\epsilon = \\
&\quad \frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial \boldsymbol{u}^\epsilon} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}^\epsilon) + \epsilon \sum_{i,k=1}^{d} \left(\frac{\partial U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial \boldsymbol{u}^\epsilon} \boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) \boldsymbol{u}_{,x_k}^\epsilon \right)_{,x_i} \\
&\quad - \epsilon \sum_{i,k=1}^{d} \boldsymbol{u}_{,x_i}^\epsilon \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{u}^\epsilon)}{\partial^2 \boldsymbol{u}^\epsilon} C^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon) \boldsymbol{u}_{,x_k}^\epsilon \,.
\end{aligned}
\tag{3.3.35}
$$

Damit (3.3.24) eine zusätzliche Gleichung des parabolischen Problems ist, muß (3.3.35) mit (3.3.24) identisch sein. Da bisher eine beliebige Strömung betrachtet wurde, d.h.

es wurden keine Anfangs- und Randbedingungen gestellt, sind die partiellen Ableitungen $\boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_1}, \ldots, \boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_d}$ linear unabhängig. Ein Koeffizientenvergleich zwischen (3.3.24) und (3.3.35) liefert folgende Identitäten:

$$\frac{\partial F_k^U(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} \stackrel{!}{=} \frac{\partial U(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} \frac{\partial \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} , \tag{3.3.36}$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}}^{ki}(\boldsymbol{u}) \stackrel{!}{=} \frac{\partial U(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} C^{ki}(\boldsymbol{u}) , \tag{3.3.37}$$

$$S^U(\boldsymbol{u}) \stackrel{!}{=} \frac{\partial U(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) , \tag{3.3.38}$$

$$P \stackrel{!}{=} -\sum_{i,k=1}^{d} \boldsymbol{u}_{,x_i} \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{u})}{\partial^2 \boldsymbol{u}} \boldsymbol{C}^{ki}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{u}_{,x_k} . \tag{3.3.39}$$

Somit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 3.10 *Entropiesatz*

Vor.: (a) $\boldsymbol{u}^\epsilon$ sei eine glatte Lösung des parabolischen Problems (3.3.10);
(b) $\boldsymbol{u}$ sei eine klassische Lösung des hyperbolischen Problems (3.3.11);
(c) $U \in C^2(\mathrm{IR}^m, \mathrm{IR})$, $F_i^U \in C^1(\mathrm{IR}^m, \mathrm{IR})$, $i = 1, \ldots, d$ existieren, so daß (3.3.36) erfüllt ist.

Beh.: (a) Es existiert eine zusätzliche Gleichung des parabolischen Systems in der Form (3.3.24) mit $\tilde{\boldsymbol{C}}^{ki}$, S^U und $\sum$ gemäß (3.3.37), (3.3.38) und (3.3.39);
(b) es existiert eine zusätzliche Gleichung des hyperbolischen Problems in der Form (3.3.27).

Da U der negativen physikalischen Entropie entspricht, muß U aus Konsistenzgründen (vgl. (3.3.26)) eine konvexe Funktion sein.
Man beachte, daß (3.3.27) die gleiche Form hat wie das hyperbolische System (3.3.11). Diese Forminvarianz kann für die zusätzliche Gleichung (3.3.24) des parabolischen Systems (3.3.10) nicht erzielt werden. Hier kommt der Term $\sum$ hinzu. Die Invarianz kann nur dadurch erzielt werden, daß $\sum$ durch 0 abgeschätzt wird.
U wird im folgenden als Entropiefunktion bezeichnet, falls die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} &1.)\ U \text{ ist konvex, d.h. } \boldsymbol{x}^T \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{u})}{\partial^2 \boldsymbol{u}} \boldsymbol{x} > 0, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\ ; \\ &2.)\ \text{es existieren } F_i^U \in C^1(\mathrm{IR}^m, \mathrm{IR}), \text{ die (3.3.36) erfüllen;} \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

erfüllt sind. F_i^U ist dann der Entropiefluß in die Richtung x_i. Dieser ist durch die m Gleichungen aus (3.3.36) festgelegt. Für $m > 1$ ist er also überbestimmt und muß nicht existieren. In zwei wichtigen Spezialfällen kann er jedoch angegeben werden. So ist im skalaren Fall ($m = 1$) eine Entropiefunktion gegeben durch $U(u) = \frac{1}{2}u^2$ und man erhält den Entropiefluß F_i^U durch Integration von (3.3.36):

$$F_i^U(u) = F_i^U(0) + \int_0^u U'(v) F_i'(v)\, dv . \tag{3.3.41}$$

Ist der Fluß $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{u})$ insbesondere ein Gradient, d.h.

$$\exists\ \phi_i \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})\ :\ \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{u}) = \mathbf{grad}^{\boldsymbol{u}}\, \phi_i(\boldsymbol{u}) =: \phi_i'(\boldsymbol{u})\ , \tag{3.3.42}$$

so ergibt sich mit der Entropiefunktion $U(\boldsymbol{u}) := \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2$ der Entropiefluß

$$F_i^U(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{u}\phi_i'(\boldsymbol{u}) - \phi_i(\boldsymbol{u})\ . \tag{3.3.43}$$

Man beachte, daß die Entropiefunktion U nicht eindeutig festgelegt ist. Mit

$$\tilde{U}(\boldsymbol{u}) := U(\boldsymbol{u}) - c, \qquad c \in \mathbb{R} \tag{3.3.44}$$

ist eine weitere Entropiefunktion gegeben, die die Verträglichkeitsbedingung (3.3.36) sowie die Identitäten (3.3.37), (3.3.38) und (3.3.39) invariant läßt. Dies entspricht der physikalischen Entropie, die ebenfalls keine absolute Größe ist. Die Gleichung (3.3.44) ermöglicht also die Eichung des Systems auf einen Nullpunkt.
Die Verträglichkeitsbedingungen und die Konvexität sind von zentraler Bedeutung. Sie liefern nicht nur die Konsistenz mit der Physik, sondern sie bedingen auch die Existenz einer klassischen Lösung im Raum zumindest für kleine Zeiten (vgl. [LF], [FM]).
Multipliziert man nämlich das hyperbolische Problem (3.3.11) mit der Hessematrix von U, so erhält man folgendes System:

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{,t} + \sum_{k=1}^{d} \boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_{,x_k} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \qquad \text{mit} \tag{3.3.45}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{u}) &:= \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{u})}{\partial^2 \boldsymbol{u}}\ ,\\
\boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{u}) &:= \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{u})\frac{\partial \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\ ,\\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) &:= \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{u})\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\ .
\end{aligned}$$

Lax und Friedrichs haben nun folgende Aussage bewiesen:

Satz 3.11 *Symmetrisierbarkeit*

Vor.: (a) $\boldsymbol{u}$ sei eine klassische Lösung des hyperbolischen Problems (3.3.11);
(b) U sei eine Entropiefunktion.

Beh.: (a) Die Systeme (3.3.11) und (3.3.45) sind äquivalent;
(b) die $\boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{u})$, $k = 0, \ldots, d$, sind symmetrisch.

Der Beweis kann in [LF] nachgelesen werden. Die Symmetrie der $\boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{u})$, $k = 1, \ldots, d$, folgt aus der Verträglichkeitsbedingung (3.3.36). Diese muß nach $\boldsymbol{u}$ abgeleitet werden. Aus der Konvexität von U, d.h U^U positiv definit, und der Symmetrie der Hesse–Matrix $\partial^2 U(\boldsymbol{u})/\partial^2 \boldsymbol{u}$, folgt die Invertierbarkeit von $\boldsymbol{A}_0$ und somit die Äquivalenz der Systeme.
Da die $\boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{u})$, $k = 0, \ldots, d$ symmetrisch sind und $\boldsymbol{A}_0$ positiv definit, handelt es sich bei (3.3.45) um ein sogenanntes symmetrisch hyperbolisches System. Fischer und Marsden konnten für solche Systeme die Korrektheit, d.h. Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität, des Cauchy–Anfangswertproblems für kleine Zeiten auf $\mathbb{R}^d$ zeigen (vgl. [FM]).

Die Existenz einer Entropiefunktion sichert also im glatten Bereich die Existenz der Entropielösung. Da es sich bei der Lösung des hyperbolischen Systems aber in der Regel um schwache Lösungen handelt, muß ein weiteres Kriterium gefunden werden, das die physikalische Lösung charakterisiert. In der Physik charakterisiert die Entropie die Richtung, in der ein Prozeß abläuft. Diese ist durch die Entropiefunktion $\sum$ eindeutig festgelegt. Eventuell mögliche Alternativen des Systems werden durch (3.3.25) ausgesondert.
Um mit der Physik konsistent zu sein, erscheint es sinnvoll, von der Entropielösung die Ungleichung (3.3.25) zu fordern. Aus (3.3.39) geht hervor, daß die Entropieproduktion sowohl von der Entropie U als auch von der noch nicht näher festgelegten Viskositätsmatrix $\boldsymbol{C}^{ki}$ abhängt. Somit stellt (3.3.25) eine Restriktion an die Wahl der $\boldsymbol{C}^{ki}$ dar.
Im räumlich eindimensionalen Fall ergibt sich daraus die bekannte Forderung

$$\boldsymbol{x}^T \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{u})}{\partial^2 \boldsymbol{u}} \boldsymbol{C}^{11}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x} \geq 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{IR}^m \ , \tag{3.3.46}$$

d.h. $\left(\partial^2 U(\boldsymbol{u})/\partial^2 \boldsymbol{u}\right) \boldsymbol{C}^{11}(\boldsymbol{u})$ muß positiv semi-definit sein. Mit (3.3.25) kann nun ein Kriterium zur Charakterisierung von (3.3.11) hergeleitet werden. Dieses geht aus dem folgenden Satz hervor:

Satz 3.12 *Entropieungleichung*

Vor.: (a) $\boldsymbol{u}_0 \in L^\infty_{loc}(\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR})$;

(b) $\boldsymbol{u}^\epsilon$ sei eine glatte Lösung des parabolischen Problems (3.3.10) zu den Anfangsdaten $\boldsymbol{u}_0$;

(c) $\boldsymbol{u}^\epsilon(t,.)$ bzw. $\boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_i}(t,.)$ konvergiere für $\epsilon \to 0^+$ gegen eine Grenzfunktion $\boldsymbol{u}(t,.)$ bzw. $\boldsymbol{u}_{,x_i}(t,.)$ bezüglich $L^1(\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR}^m)$ mit $t > 0$ beliebig;

(d) für $\epsilon \to 0^+$ sei $\boldsymbol{u}^\epsilon(t \to 0^+, \cdot)$ im distributiven Sinne gleich mit den Anfangsdaten $\boldsymbol{u}_0$;

(e) U sei Entropiefunktion mit den zugehörigen Flüssen $F_i^U,\ i = 1, \ldots, d$ und der Entropieproduktion $\sum$ gemäß (3.3.36) und (3.3.39);

(f) $\sum \leq 0$;

(g) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{,x_i} \in L^\infty_{loc}(\mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}^d, \mathrm{IR})$.

Beh.:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}^d} U(\boldsymbol{u})\phi_{,t} \ &+ \ \sum_{i=1}^{d} F_i^U(\boldsymbol{u})\phi_{,x_i} + S^U(\boldsymbol{u})\phi \, dx_1 \ldots dx_d \, dt \\ &+ \int\limits_{\mathrm{IR}^d} U(\boldsymbol{u_0}(\boldsymbol{x}))\phi(0, \boldsymbol{x}) \, dx_1 \ldots dx_d \geq 0 \ ; \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

kurz: $U_{,t} + \operatorname{div}\left(F_1^U, \ldots, F_d^U\right) - S^U \leq 0$ im distributiven Sinne.

Da U eine Entropiefunktion ist, existiert mit Satz 3.10 eine zusätzliche Gleichung des parabolischen Problems in der Form (3.3.24) mit $\tilde{\boldsymbol{C}}^{ki}$, S^U gemäß (3.3.37) und (3.3.38). Da die Entropieproduktion $\sum$ nicht zunimmt und $\epsilon > 0$ vorausgesetzt ist, kann der Entropiesatz abgeschätzt werden:

$$\left(U(\boldsymbol{u}^\epsilon)\right)_{,t} + \operatorname{div}\left(F_1^U(\boldsymbol{u}^\epsilon), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u}^\epsilon)\right) \leq \epsilon \operatorname{div}\left(\tilde{F}_1^V, \ldots, \tilde{F}_d^V\right) + S^U(\boldsymbol{u}^\epsilon) \tag{3.3.48}$$

$$\text{mit} \qquad \tilde{F}_i^V = \tilde{F}_i^V(\boldsymbol{u}^\epsilon, \boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_1}, \ldots, \boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_d}) = \sum_{k=1}^{d} \tilde{\boldsymbol{C}}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon)\boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_k}. \tag{3.3.49}$$

Sei nun $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ eine positive Testfunktion. Multipliziere diese auf (3.3.48) auf und integriere über $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \phi \operatorname{div}^* \left(U(\boldsymbol{u}^\epsilon), F_1^U(\boldsymbol{u}^\epsilon), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u}^\epsilon)\right) - \phi S^U(\boldsymbol{u}^\epsilon) dx_1 \ldots dx_d \, dt$$
$$\leq \epsilon \int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \phi \operatorname{div} \left(\tilde{F}_1^V, \ldots, \tilde{F}_d^V\right) dx_1 \ldots dx_d \, dt \ . \tag{3.3.50}$$

Man beachte dabei, daß alle darin auftretenden Integrale endlich sind, da die Integranden stetig sind und ϕ einen kompakten Träger hat. Die Relation „$\leq$“ kehrt sich nicht um, da ϕ positiv gewählt wurde.
Die Divergenzterme werden nun umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \phi \operatorname{div}^* \left(U, F_1^U, \ldots, F_d^U\right) &= \operatorname{div}^* \left(\phi \left(U, F_1^U, \ldots, F_d^U\right)\right) \\ &\qquad - \left(U, F_1^U, \ldots, F_d^U\right) \mathbf{grad}^* \phi \ , \qquad (3.3.51) \\ \phi \operatorname{div} \left(\tilde{F}_1^V, \ldots, \tilde{F}_d^V\right) &= \operatorname{div} \left(\phi \left(\tilde{F}_1^V, \ldots, \tilde{F}_d^V\right)\right) - \left(\tilde{F}_1^V, \ldots, \tilde{F}_d^V\right) \mathbf{grad}\, \phi \ . \end{aligned}$$

Wendet man nun den Satz von Gauß auf den kompakten Träger $\operatorname{supp}^*(\phi)$ von ϕ an, so ergibt sich aus (3.3.50)

$$\begin{aligned} &\oint\limits_{\partial \operatorname{supp}^*(\phi)} \phi \left(U, F_1^U, \ldots, F_d^U\right) \boldsymbol{N}^* ds_1 \ldots ds_d \\ &\qquad - \int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \left(U, F_1^U, \ldots, F_d^U\right) \mathbf{grad}^* \phi \, dx_1 \ldots dx_d \, dt \\ &\qquad\qquad - \int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \phi S^U dx_1 \ldots dx_d \, dt \qquad (3.3.52) \\ &\leq \epsilon \int\limits_{\mathbb{R}_+} \oint\limits_{\partial \operatorname{supp}(\phi(t,\cdot))} \phi \left(\tilde{F}_1^V, \ldots, \tilde{F}_d^V\right) \boldsymbol{N}^* ds_1 \ldots ds_{d-1} \, dt \\ &\qquad -\epsilon \int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \left(\tilde{F}_1^V, \ldots, \tilde{F}_d^V\right) \mathbf{grad}\, \phi \, dx_1 \ldots dx_d \, dt \ . \end{aligned}$$

Da ϕ auf dem Rand des Trägers, außer für $t = 0$, verschwindet, gilt für die Randintegrale:

$$\begin{aligned} \oint\limits_{\partial \operatorname{supp}^*(\phi)} \phi \left(U, F_1^U, \ldots, F_d^U\right) \boldsymbol{N}^* ds_1 \ldots ds_d &= - \int\limits_{\mathbb{R}^d} \phi(0, \boldsymbol{x}) U \left(\boldsymbol{u}^\epsilon(0, \boldsymbol{x})\right) dx_1 \ldots dx_d \ , \\ \int\limits_{\mathbb{R}_+} \int\limits_{\partial \operatorname{supp}(\phi(t,\cdot))} \phi \left(\tilde{F}_1^V, \ldots, \tilde{F}_d^V\right) \boldsymbol{N} ds_1 \ldots ds_{d-1} dt &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.3.53}$$

Multipliziert man nun (3.3.52) mit (-1), so bleibt

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \Big(U(\boldsymbol{u}^\epsilon), F_1^U(\boldsymbol{u}^\epsilon), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u}^\epsilon)\Big)\, \mathbf{grad}^*\,\phi + S^U(\boldsymbol{u}^\epsilon)\phi\, dx_1 \ldots dx_d\, dt$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^d} \phi(0,\boldsymbol{x}) U\left(\boldsymbol{u}^\epsilon(0,\boldsymbol{x})\right) dx_1 \ldots dx_d \tag{3.3.54}$$

$$\geq \epsilon \sum_{k,i=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \tilde{C}^{ki}(\boldsymbol{u}^\epsilon)\boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_k}\phi_{,x_i} dx_1 \ldots dx_d\, dt\ .$$

Da nach Voraussetzung $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{u}_{,x_k}$ im wesentlichen beschränkt sind, ist das Integral auf der rechten Seite für $\epsilon \to 0^+$ beschränkt, somit verschwindet die rechte Seite beim Grenzübergang, und man erhält (3.3.47).
Mit Hilfe der Entropieungleichung (3.3.47) soll nun eine Unstetigkeit analog zur Sprungbedingung von Rankine und Hugoniot (siehe Satz 3.5) charakterisiert werden.
Im skalaren eindimensionalen Fall ist die Stoßgeschwindigkeit eindeutig festgelegt durch (3.2.14). Für Systeme ist diese aber überbestimmt. Unter Anwendung der Entropieungleichung zeigte Lax den folgenden Satz (siehe [La2], S. 607).

Satz 3.13 *Entropieungleichung für Unstetigkeiten*

Vor.: (a) $\boldsymbol{u}_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$;

(b) $\boldsymbol{u}^\epsilon$ sei eine glatte Lösung des parabolischen Problems (3.3.10) zu den Anfangsdaten $\boldsymbol{u}_0$;

(c) $\boldsymbol{u}^\epsilon(t,.)$ bzw. $\boldsymbol{u}^\epsilon_{,x_i}(t,.)$ konvergiere für $\epsilon \to 0^+$ gegen eine Grenzfunktion $\boldsymbol{u}(t,.)$ bzw. $\boldsymbol{u}_{,x_i}(t,.)$ bezüglich $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ mit $t > 0$ beliebig;

(d) für $\epsilon \to 0^+$ sei $\boldsymbol{u}^\epsilon(t \to 0^+, \cdot)$ im distributiven Sinne gleich mit den Anfangsdaten $\boldsymbol{u}_0$;

(e) U sei Entropiefunktion mit den zugehörigen Flüssen F_i^U, $i = 1, \ldots, d$ und der Entropieproduktion $\sum$ gemäß (3.3.36) und (3.3.39);

(f) $\sum < 0$;

(g) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{,x_i} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$;

(h) $\boldsymbol{u}$ stückweise glatte Funktion.

Beh.: Über der Unstetigkeit Γ^*_D mit äußerer Normalen $\boldsymbol{N}^*_D$ gilt:

(a)

$$\Big[U(\boldsymbol{u}), F_1^U(\boldsymbol{u}), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u})\Big]\, \boldsymbol{N}^*_D < 0\ ; \tag{3.3.55}$$

(b) Für $d = 1$ gilt insbesondere:

$$s\,[U(\boldsymbol{u})] < \Big[F^U(\boldsymbol{u})\Big] \qquad \text{mit} \qquad s = \frac{dx}{dt}\ . \tag{3.3.56}$$

Der Beweis geht vollkommen analog zu Satz 3.5. Man geht von einer lokalen Umgebung $V^* \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ einer Unstetigkeitsfläche Γ^*_D aus (vgl. Abb. 11), die durch diese in zwei disjunkte Gebiete $V^*_\pm$ unterteilt wird mit $\operatorname{supp}{}^*(\phi) = V^*$. Dann gilt mit (3.2.14):

$$\int\limits_{V^*} \left(U(\boldsymbol{u}), F_1^U(\boldsymbol{u}), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u})\right) \mathbf{grad}^* \phi + S^U(\boldsymbol{u})\phi \, dV^* > 0 \,. \tag{3.3.57}$$

Man beachte, daß hier „<“ steht und nicht „≤“. Dies folgt aus der Voraussetzung $\sum < 0$. Der Beweis zu Satz 3.13 kann analog durchgeführt werden. In (3.3.48) kann jedoch schärfer abgeschätzt werden. Ferner entfällt das Integral über die Anfangsdaten, da der Träger von ϕ nach Voraussetzung in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ liegt. Betrachtet man nun die Integration über die Teilintervalle $V_\pm^*$, so kann mit (3.3.51) die Differentiation der Testfunktion wieder auf die Entropiefunktion U und die Entropieflüsse F_i^U übertragen werden, da in $V_\pm^*$ nach Voraussetzung $\boldsymbol{u}$ glatt ist. Somit geht (3.3.57) über in

$$\begin{aligned} &\int\limits_{V_\pm^*} \operatorname{div}^* \left(U(\boldsymbol{u}), F_1^U(\boldsymbol{u}), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u})\right) + \phi S^U(\boldsymbol{u}) dV^* \\ &- \int\limits_{V_\pm^*} \operatorname{div}^* \left(\phi \left(U(\boldsymbol{u}), F_1^U(\boldsymbol{u}), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u})\right)\right) dV^* > 0 \,. \end{aligned} \tag{3.3.58}$$

Mit Satz 3.10 existiert im glatten Bereich von $\boldsymbol{u}$ ein zusätzlicher Erhaltungssatz (3.3.27). Somit verschwindet das erste Integral. Wendet man den Satz von Gauß auf das zweite Integral an, so bleiben, da ϕ auf dem Rand von V^* verschwindet, nur die Randintegrale über Γ_D^* übrig:

$$\int\limits_{\Gamma_D^*} \phi \left[U(\boldsymbol{u}), F_1^U(\boldsymbol{u}), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u})\right] \boldsymbol{N}_D^* \, ds_1 \ldots ds_d > 0 \,. \tag{3.3.59}$$

Da ϕ und somit auch der Träger beliebig gewählt waren, muß die Ungleichung lokal für den Integranden gelten. Da ϕ insbesondere positiv gewählt wurde, kann durch die Testfunktion geteilt werden ohne daß sich die Relation umkehrt. Somit ergibt sich (3.3.55). Der Teil (b) der Behauptung folgt mit (3.2.12) und (3.2.13).
Lax zeigte für räumlich eindimensionale Systeme sogar die Äquivalenz der Entropieungleichung (3.3.56) und den Sprungbedingungen (3.2.21) (vgl. [La2], S. 612 ff.).

Satz 3.14 *Äquivalenz der Lax–Sprungbedingung und der Entropieungleichung*

Vor.: (a) (3.1.2) sei ein strikt hyperbolisches System von Erhaltungssätzen und echt nichtlinear degeneriert, d.h. $\mathbf{grad}_{\boldsymbol{u}}(\lambda_k(\boldsymbol{u}))\, \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{u}) \not\equiv 0$;

(b) U sei Entropiefunktion mit zugehörigem Eigenfluß F^U;

(c) $\boldsymbol{u}$ sei Lösung des hyperbolischen Problems mit einem Stoß, der sich mit Geschwindigkeit s ausbreitet.

Beh.: Die Relationen (3.3.56) und (3.2.21) sind äqiuvalent.

Auf einen Beweis soll hier verzichtet werden, da einige grundlegende Kenntnisse der Lösung von sogenannten Riemannproblemen (vgl. [S]) für Systeme erforderlich sind, die nicht in diesen Rahmen passen.
Im folgenden soll noch diskutiert werden, warum es sinnvoll ist, über eine Unstetigkeit eine echte Entropieproduktion, d.h. $\sum < 0$, anzunehmen (vgl. Vor. (f), Satz 3.13). Diese ist wiederum durch die physikalische Entropie motiviert, von der man weiß, daß sie über

einen Stoß zunimmt. Es stellt sich die Frage, wann dies für (3.3.48) erfüllt ist. In der ursprünglichen Version von Lax werden die $\boldsymbol{C}^{ki}$ folgendermaßen gewählt:

$$\begin{array}{rclcl} \boldsymbol{C}^{ii} & = & \boldsymbol{I} & , & i = 1, \ldots, d\ , \\ \boldsymbol{C}^{ki} & = & \boldsymbol{0} & , & k \neq i\ . \end{array} \tag{3.3.60}$$

In diesem Fall reduziert sich die Entropieproduktion auf:

$$P = -\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{u}_{,x_i} \frac{\partial U(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}_{,x_i}\ . \tag{3.3.61}$$

Da U eine konvexe Funktion ist und über einen Stoß die Ableitung $\boldsymbol{u}^{\epsilon}_{,x_i}$ des parabolischen Systems für ϵ hinreichend klein nicht verschwindet, muß die Summe in (3.3.61) positiv sein, und somit muß die Entropieproduktion tatsächlich abnehmen.
Ein weiteres physikalisches Prinzip besagt, daß die Entropie in einem System nur zunehmen, aber niemals abnehmen kann. Dies folgt aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Lax hat gezeigt, daß sich dieses Prinzip auch für die Entropiefunktion U verifizieren läßt, falls man voraussetzt, daß kein Produktionsterm $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})$ vorhanden ist, d.h. die Größen $\boldsymbol{u}$ sind Erhaltungsgrößen (vgl. [La2]). Die Entropie in einem System $V \in \mathrm{IR}^d$ ist gegeben durch

$$E_V(t) = \int_V U(\boldsymbol{u})\, dV\ . \tag{3.3.62}$$

Man beachte, daß U der negativen volumenspezifischen physikalischen Entropie entspricht.

Satz 3.15 *2. Hauptsatz der Thermodynamik für quelltermfreie Erhaltungsgleichungen*

Vor.: (a) $\boldsymbol{u}_0 \in L^{\infty}_{loc}(\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR})$;

(b) $\boldsymbol{u}^{\epsilon}$ sei eine glatte Lösung des parabolischen Problems (3.3.10) zu den Anfangsdaten $\boldsymbol{u}_0$;

(c) $\boldsymbol{u}^{\epsilon}(t, .)$ bzw. $\boldsymbol{u}^{\epsilon}_{,x_i}(t, .)$ konvergiere für $\epsilon \to 0^+$ gegen eine Grenzfunktion $\boldsymbol{u}(t, .)$ bzw. $\boldsymbol{u}_{,x_i}(t, .)$ bezüglich $L^1(\mathrm{IR}^d, \mathrm{IR}^m)$ mit $t > 0$ beliebig;

(d) für $\epsilon \to 0^+$ sei $\boldsymbol{u}^{\epsilon}(t \to 0^+, \cdot)$ im distributiven Sinne gleich mit den Anfangsdaten $\boldsymbol{u}_0$;

(e) U sei Entropiefunktion mit den zugehörigen Flüssen F_i^U, $i = 1, \ldots, d$ und der Entropieproduktion $\sum$ gemäß (3.3.36) und (3.3.39);

(f) $\sum \leq 0$;

(g) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{,x_i} \in L^{\infty}_{loc}(\mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}^d, \mathrm{IR})$;

(h) $\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{0}$;

(i) $V \subset \mathrm{IR}^d$ kompakt;

(j) $\oint_{\partial V} (\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d)\boldsymbol{N}\, ds_1 \ldots ds_{d-1} = \boldsymbol{0}$.

Beh.: (a) $E_V(t)$ ist eine in $t \geq 0$ nicht zunehmende Funktion;

(b) ist $\boldsymbol{u}$ insbesondere eine glatte Lösung, so ist $E_V(t)$ konstant.

Aufgrund der Voraussetzungen existiert mit Satz 3.10 zum parabolischen System eine zusätzliche Gleichung der Form (3.3.24), worin der Produktionsterm $\sum$ abgeschätzt werden kann. Somit gilt für die totale zeitliche Änderung von

$$E_V^\epsilon(t) := \int_V U(\boldsymbol{u}^\epsilon)\, dV \tag{3.3.63}$$

folgende Abschätzung:

$$\frac{dE_V^\epsilon(t)}{dt} \overset{(3.3.24),\text{Vor. (f)}}{\leq} -\int_V \operatorname{div}\left(F_1^U(\boldsymbol{u}^\epsilon), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u}^\epsilon)\right) dV + \epsilon \int_V \operatorname{div}\left(\tilde{F}_1^V, \ldots, \tilde{F}_d^V\right) dV\,, \tag{3.3.64}$$

wobei die $\tilde{F}_i^V$ gemäß (3.3.49) definiert sind.
Man beachte, daß die Integrale wohldefiniert sind, da das Volumen V kompakt ist. Somit kann insbesondere der Satz von Gauß angewendet werden:

$$\begin{aligned} \frac{dE_V^\epsilon(t)}{dt} \leq & -\oint_{\partial V} \left(F_1^U(\boldsymbol{u}^\epsilon), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u}^\epsilon)\right) \boldsymbol{N}\, ds_1 \ldots ds_{d-1} \\ & + \epsilon \oint_{\partial V} \left(\tilde{F}_1^V, \ldots, \tilde{F}_d^V\right) \boldsymbol{N}\, ds_1 \ldots ds_{d-1}\,. \end{aligned} \tag{3.3.65}$$

Für $\epsilon \to 0^+$ verschwindet der 2. Term, da das Intergral nach Voraussetzung beschränkt ist, und es verbleibt

$$\frac{dE_V^0(t)}{dt} \leq -\oint_{\partial V} \left(F_1^U(\boldsymbol{u}), \ldots, F_d^U(\boldsymbol{u})\right) \boldsymbol{N}\, ds_1 \ldots ds_{d-1}\,. \tag{3.3.66}$$

Dieses Randintegral verschwindet aber gemäß Voraussetzung. Diese ist physikalisch durchaus sinnvoll, denn sie besagt, daß sich die Informationen, die über die Systemgrenzen fließen, aufheben. Dies ist für ein geschlossenes System offensichtlich erfüllt.
Der Teil (b) der Behauptung läßt sich direkt für $E_V(t)$ über den zusätzlichen Entropieerhaltungssatz (3.3.27) zeigen, da $\boldsymbol{u}$ differenzierbar vorausgesetzt ist. Auch diese Aussage gilt für die physikalische Entropie. Denn in einem System im thermodynamischen Gleichgewicht, in dem Reibung, Wärmeleitung und Diffusion vernachlässigt werden, ist die Entropie konstant, solange keine Unstetigkeiten auftreten.
Abschließend sei noch bemerkt, daß Lax den obigen Satz in einer etwas modifizierten Version bewiesen hat. Er hat als System V den ganzen Raum $\mathbb{R}^d$ gewählt. Damit das Integral aber endlich und somit $E_V(t)$ wohldefiniert bleibt, mußte er voraussetzen, daß $\boldsymbol{u}$ einen kompakten Träger hat und $U(0) = 0$ gilt. Dafür brauchte er keine Voraussetzungen über das Randintegral zu treffen.

4 Numerische Verfahren

In der Praxis sind die Erhaltungsgleichungen von großer Bedeutung. Die Probleme sind jedoch meist so komplex, daß eine explizite Lösung in der Regel nicht angegeben werden kann. Deshalb ist man an der numerischen Simulation solcher Probleme interessiert. Sehr viele numerische Verfahren werden für den skalaren und räumlich eindimensionalen Fall entwickelt. Durch lokale Entkopplungstechniken werden diese dann auf Systeme übertragen und mittels Dimensions–Splitting–Methoden auf den mehrdimensionalen Raum erweitert. Im folgenden soll deshalb nur eine skalare Gleichung in einer Raumdimension betrachtet werden:

$$u_{,t} + (F(u))_{,x} = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x) \; . \tag{4.0.67}$$

In den vorausgegangenen Kapiteln wurden einige charakterisierende Bedingungen von Erhaltungssätzen hergeleitet. Diese Erkenntnisse sollen hier nun einfließen.

4.1 Skalare Erhaltungssätze

4.1.1 Verfahren in Erhaltungsform

Durch Integration von (4.0.67) über ein finites Volumen $[t_n, t_{n+1}] \times [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ erhält man

$$\hat{u}_j^{n+1} = \hat{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\hat{F}_{j+1/2} - \hat{F}_{j-1/2}\right] \qquad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}
\hat{u}_j^{n+1} &:= \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(t_{n+1}, x)\,dx, \quad (\text{ analog } \hat{u}_j^n)\;, \\
\hat{F}_{j\pm 1/2} &:= \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} F(u(t, x_{j\pm 1/2}))\,dt\;.
\end{aligned}$$

Diese Finite–Volumen–Darstellung nimmt man als Motivation für die Definition eines numerischen $2q+1$–Punkte–Verfahrens in Erhaltungsform

$$\begin{aligned}
v_j^{n+1} &= v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[G_{j+1/2} - G_{j-1/2}]\;, \\
G_{j+1/2} &= G(v_{j-q+1}^n, \ldots, v_{j+q}^n).
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Darin ist $G : \mathbb{R}^{2q} \to \mathbb{R}$ der numerische Fluß. Dieser heißt konsistent, falls gilt:

$$G(v, \ldots, v) = F(v)\;. \tag{4.1.2}$$

Diese Klasse von Verfahren hat einen wesentlichen Vorteil. Falls das Verfahren konvergiert, so kann man zeigen, daß diese eine schwache Lösung von (4.0.67) ist (vgl. [LW]).

Satz 4.1 *Lax, Wendroff: Erhaltungsform ⇒ schwache Lösung*

Vor.: (a) Verfahren sei in Erhaltungsform, G stetig und konsistent;

(b) $v(x,t) := v_j^n,\ x_{j-1/2} \le x < x_{j+1/2},\ t_n \le t \le t_{n+1}$ konvergiere für $\Delta x, \Delta t \to 0$ auf einem beschränkten Gebiet gegen eine Funktion $u(t,x)$ mit $u(0,x) = u_0(x)$ in $L_1^{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(c) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ zerfalle in endlich viele Teilgebiete, in denen u stetig ist.

Beh.: u ist schwache Lösung von (4.0.67).

Dieser Satz sagt nichts darüber aus, ob oder wann das Verfahren konvergiert. Es wird nur gesagt, daß im Falle der Konvergenz die Grenzlösung eine schwache Lösung ist.

4.1.2 Numerische Entropielösung

Da man an der Entropielösung interessiert ist, muß ein Kriterium gefunden werden, mit dessen Hilfe man entscheiden kann, wann ein Verfahren gegen diese konvergiert. Dazu nutzt man wie im analytischen Fall das Entropiekonzept aus. Man geht von der Existenz einer Entropiefunktion U und einem zugehörigen Entropiefluß F^U aus. Dann erfüllen diese den zusätzlichen Erhaltungssatz

$$\begin{array}{rcll} (U(u))_{,t} + \left(F^U(u)\right)_{,x} &=& 0 & \text{(klassisch)} \quad \text{bzw.} \\ (U(u))_{,t} + \left(F^U(u)\right)_{,x} &\le& 0 & \text{(distributiv).} \end{array} \tag{4.1.3}$$

Auf diesen wendet man nun das Verfahren in Erhaltungsform an. Dies führt auf die numerische Entropiebedingung

$$U(v_j^{n+1}) - U(v_j^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[G_{j+1/2}^U - G_{j-1/2}^U\right] \le 0 \, , \tag{4.1.4}$$

wobei $G^U : \mathbb{R}^{2q} \to \mathbb{R}$ der numerische Entropiefluß ist. Dieser ist konsistent, falls gilt:

$$G^U(v, \ldots, v) = F^U(v) \, . \tag{4.1.5}$$

Man sagt nun, daß ein Verfahren eine numerische Entropiebedingung erfüllt, falls ein numerischer Entropiefluß existiert, so daß (4.1.4) erfüllt ist. Mit Hilfe der numerischen Entropie kann nun für Verfahren in Erhaltungsform die Konvergenz gegen die Entropielösung zeigen (vgl. [HLL]):

Satz 4.2 *Harten, Lax, Leer: numerische Entropiebedingung $\Rightarrow$ Entropielösung*

Vor.: (a) wie in Satz 4.1;

(b) Verfahren besitze konsistenten und stetigen numerischen Entropiefluß;

(c) Verfahren erfülle die numerische Entropiebedingung.

Beh.: (a) u ist schwache Lösung des Erhaltungssatzes;

(b) u erfüllt die Entropiebedingung $U(u)_{,t} + \left(F^U(u)\right)_{,x} \le 0$ im distributiven Sinne.

Man beachte, daß hier ebenfalls die Konvergenz des Verfahrens vorausgesetzt wird.

4.1.3 Klassifizierung von Differenzenverfahren

Die Verfahren in Erhaltungsform haben eine Sonderstellung unter allen numerischen Verfahren zur Diskretisierung von Erhaltungssätzen. Diese beruht auf den Sätzen 4.1 und 4.2. Sie basieren in der Regel auf Approximationen der partiellen Ableitungen durch finite Differenzen. Im folgenden sollen allgemeine Differenzenverfahren der Form

$$v_j^{n+1} = Q\left(\{v_j^n\}_j\right) \ , \tag{4.1.6}$$

wobei Q ein beliebiger Differenzenoperator ist, näher untersucht und klassifiziert werden. Man unterscheidet zwischen monotonen, monotonieerhaltenden und TVD–Verfahren. Ein Differenzenverfahren der Form $v_j^{n+1} = H(v_{j-q}^n, \ldots, v_{j+q}^n)$, $H : \mathbb{R}^{2q+1} \to \mathbb{R}$, für einen skalaren Erhaltungssatz heißt monoton, falls gilt:

$$H_i := \frac{\partial H}{\partial Y_i}(Y_{-q}, \ldots, Y_q) \geq 0, \qquad i = -q, \ldots, q \ . \tag{4.1.7}$$

Ist ein Verfahren monoton, so folgt daraus insbesondere die Erfüllung einer Entropiebedingung wie der folgende Satz besagt:

Satz 4.3 *Harten, Hyman, Lax: Monotonie $\Rightarrow$ Entropiebedingung*

Vor.: (a) wie in Satz 4.1;
(b) Verfahren monoton.

Beh.: (a) u ist schwache Lösung;
(b) u erfüllt die Entropiebedingung von Sod:

$$\frac{F(u) - F(u_L)}{u - u_L} \geq s \geq \frac{F(u) - F(u_R)}{u - u_R} \ . \tag{4.1.8}$$

Diese Eigenschaft ist also sehr stark. Der Preis ist dafür auch sehr hoch, denn die Ordnung bleibt auf 1 beschränkt.

Satz 4.4 *Harten, Hyman, Lax: Ordnungsbeschränkung für monotone Verfahren*

Vor.: Verfahren sei monoton und in Erhaltungsform.

Beh.: Verfahren hat höchstens Ordnung 1.

Die Beweise zu den Sätzen 4.3 und 4.4 können in [HHL] nachgelesen werden.
Eine Abschwächung der Monotonie stellt die Monotonieerhaltung dar. Ein Differenzenverfahren $v_j^{n+1} = Q(\{v_j^n\}_j)$ heißt monotonieerhaltend, wenn gilt:

$$\{v_j^n\}_j \text{ monotone Gitterfunktion} \qquad \Rightarrow \qquad \left\{Q(v_j^n)\right\}_j \quad \text{monoton.}$$

Eine weitere Klasse beruht auf dem Begriff der totalen Variation

$$TV\left(\{v_j^n\}_j\right) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_{j+1}^n - v_j^n| \ . \tag{4.1.9}$$

Ein Verfahren $v_j^{n+1} = Q(\{v_j^n\}_j)$ heißt TVD–Verfahren, wenn für alle $\{v_j^n\}_j$ mit beschränkter Variation gilt:

$$TV\left(\{Q(v_j^n)\}_j\right) \leq TV\left(\{v_j^n\}_j\right) .$$

Zwischen diesen drei Klassen besteht ein Zusammenhang, der aus dem folgenden Satz hervorgeht:

Satz 4.5 *Zusammenhang von monoton, monotonieerhaltend und TVD*

Vor.: $(2q+1)$–Punkte–Verfahren sei in Erhaltungsform.

Beh.: (a) monoton $\Rightarrow$ TVD $\Rightarrow$ monotonieerhaltend;

(b) Für einen linearen Erhaltungssatz gilt in (a) die Äquivalenz.

Der Beweis zu (a) findet sich in [H83]. Für den linearen Fall zeigte Godunov 1959 die Äquivalenz von monotonen und monotonieerhaltenden Verfahren ([G]).
Ein mit dem TVD–Begriff verwandter Begriff ist die TV–Stabilität. Ein Verfahren heißt TV–stabil, wenn gilt:

$$\begin{gathered} \exists\, K > 0 :\ TV(\{v_j^n\}_j) \leq K \cdot TV(\{v_j^0\}_j) \\ \forall\, \Delta x \in (0, \Delta x_0),\ \Delta t \in [0, T], \quad \mu := \frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{ const.} \end{gathered} \tag{4.1.10}$$

TVD–Verfahren sind somit insbesondere TV–stabil. Diese Eigenschaft bedingt insbesondere die Konvergenz des Verfahrens.

Satz 4.6 *Harten: TV - Stabilität $\Rightarrow$ Konvergenz*

Vor.: (a) Erhaltungssatz besitze Entropiepaar (U, F^U);

(b) Anfangsdaten haben kompakten Träger;

(c) Verfahren sei in Erhaltungsform, TV–stabil und erfülle numerische Entropiebedingung.

Beh.: (a) Verfahren konvergiert gegen eine Grenzfunktion u;

(b) u ist eindeutige Entropielösung.

Der Beweis wird mit dem sogenannten Kompaktheitsargument geführt (vgl. [H84]). Dadurch existieren keine Fehlerschranken. Dieser Satz hebt sich von den Sätzen 4.1 und 4.2 entscheidend ab, denn hier wird die Konvergenz des Verfahrens nicht vorausgesetzt.

4.1.4 Verfahrensklassen

Bisher wurden nur allgemeine Differenzenverfahren betrachtet und diese nach unterschiedlichen Eigenschaften klassifiziert. Es soll nun noch auf die Herleitung und Motivation solcher Verfahren eingegangen werden. Man unterscheidet aufgrund der unterschiedlichen Ansätze im wesentlichen zwischen vier Typen:
Bei einem Finiten–Differenzen–Verfahren werden die partiellen Ableitungen durch finite Differenzen ersetzt, z.B.:

$$
\begin{aligned}
u_{,t} &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \, , \\
(F(u))_{,x} &= \frac{F(u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \, , \\
u_j^n &= \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} + \mathcal{O}(\Delta x) \, .
\end{aligned}
$$

Dieser Ansatz führt auf das sogenannte Lax–Friedrichs–Verfahren 1. Ordnung.
Aufgrund der Charakteristikentheorie weiß man, daß sich Informationen in ganz bestimmten Richtungen ausbreiten. Ein Finiter–Differenzen–Ansatz berücksichtigt dieses physikalische Verhalten nicht. Sogenannte Upwind–Verfahren greifen deshalb in Anhängigkeit des Informationsflusses, d.h. Lage der Charakteristik, auf unterschiedliche Diskretisierungen zurück (vgl. Abb. 15), z.B.:

$$
(F(u))_{,x} = \begin{cases} \dfrac{F(u_{j+1}^n) - F(u_j^n)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \, , & a := F'(u_j^n) < 0 \\ \dfrac{F(u_j^n) - F(u_{j-1}^n)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \, , & a := F'(u_j^n) > 0 \end{cases} .
$$

Dies führt auf das sogenannte Engquist–Osher–Verfahren 1. Ordnung. Ebenfalls physikalisch motiviert sind die sogenannten Godunov–Typ–Verfahren. Sie beruhen auf dem Finiten–Volumen–Ansatz (4.0.67). An den Zellgrenzen werden nun sogenannte Riemann–Probleme

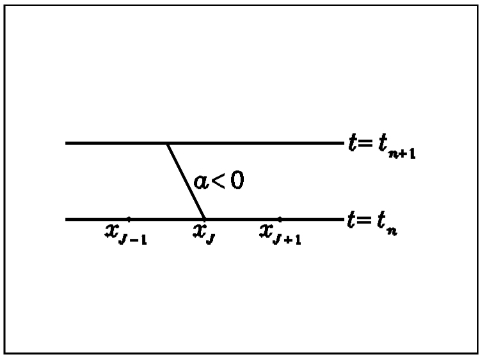


Abbildung 15: Upwind

$$
\begin{aligned}
&u_{,t} + (F(u))_{,x} = 0 \, , \\
&u(x, t_n) = \begin{cases} v_{j+1}^n & , x > x_{j+1/2} \\ v_j^n & , x < x_{j+1/2} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.1.11}
$$

gelöst (vgl. Abb. 16).
Dies führt hier zum Godunov–Verfahren 1. Ordnung. Durch die Wahl der Anfangsbedingungen in (4.1.11) kann die Ordnung erhöht werden. Dies führt z.B. auf die ENO–Verfahren (Harten, Chakravarthy, Engquist, Osher) oder die PPM–Verfahren (Woodward, Colella).

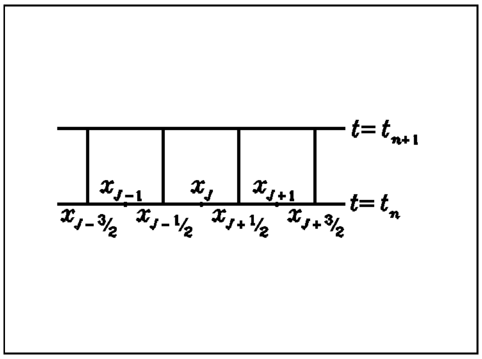


Abbildung 16: lokale Riemann–Probleme

Die schon im vorangegangenen Kapitel erwähnten TVD–Verfahren beruhen auf einer analytischen Eigenschaft eines skalaren Erhaltungssatzes in einer Raumdimension. Die Lösung hat nämlich die Eigenschaft, daß die totale Variation nicht zunehmen kann (vgl. [S]). Solche Verfahren wurden z.B. von Harten oder Yee entwickelt und untersucht.

4.2 Erweiterung auf inhomogene, räumlich mehrdimensionale Probleme

Bisher wurden bei der numerischen Diskretisierung nur skalare Probleme in einer Raumdimension ohne Quellterm behandelt. Die dort entwickelten Verfahren können nun in drei Schritten auf inhomogene, räumlich mehrdimensionale Systeme von Erhaltungssätzen erweitert werden.
Der erste Schritt besteht in der Übertragung auf Systeme. Dies kann man komponentenweise durchführen, d.h. man wendet das Verfahren auf jede Komponente des Systems einzeln an. Wesentlich geeigneter ist die lokale Entkopplung (vgl. 3.2.16, 3.2.17, 3.2.18 mit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}_j^n)$). Der zweite Schritt besteht in der Erweiterung von einer Raumdimension auf mehrere. Dies kann zum einen mittels des Finiten–Volumen–Ansatzes, d.h. Integration der Differentialgleichung über ein räumlich–zeitliches Kontinuum $[t_n, t_{n+1}] \times V \subset \mathrm{IR}_+ \times \mathrm{IR}^d$ und Anwendung des Gaußschen Satzes analog zu (4.0.67) geschehen. Ein anderer Zugang ist die Dimensions–Splitting–Technik. Diese beruht auf der abwechselnden Lösung der Gleichungen

$$\boldsymbol{u}_t^i + (\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{u}^i))_{,x_i} = \boldsymbol{0}\ ,\ i = 1, d. \tag{4.2.1}$$

Die Erweiterung auf das inhomogene Problem kann ebenfalls über den Finiten–Volumen–Ansatz erfolgen. Alternativ kann aber auch die Operator–Splitting–Technik verwendet werden. Dabei wird der Quellterm in jedem Zeitschritt von der partiellen Differentialgleichung abgespalten, d.h. es werden abwechselnd

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{,t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d) &= \boldsymbol{0}\ , \\ \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} &= \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

gelöst.

4.3 Konvergenzbeweise mittels Kompaktheitsargumenten

In Kapitel 4.1 wurden verschiedene Verfahren zur Approximation eines skalaren Erhaltungssatzes vorgestellt. Es wurde dabei nur unzureichend auf das Konvergenzverhalten eingegangen. Im folgenden soll nun das klassische Kompaktheitsprinzip vorgestellt werden, mit dem die Konvergenz untersucht werden kann. Dieses Prinzip wurde von Oleinik [O] erstmals auf skalare, inhomogene, räumlich eindimensionale Probleme angewendet. Später haben Majda und Crandall [CrMa], Sanders [Sa], Schulte [Sch] und andere dieses auch auf räumlich mehrdimensionale Probleme adaptiert.
Bisher konnte das Prinzip jedoch nur für skalare Probleme erfolgreich verifiziert werden und soll deshalb hier nur für diesen Fall beschrieben werden. Für Systeme kann aber alles komponentenweise übertragen werden. Ausgangspunkt für die nun folgende Betrachtung bildet eine Zerlegung $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ des d-dimensionalen Ortsraumes in paarweise nichtüberlappende Elemente, die zusammenhängend sind und keine Löcher aufweisen. Jedem Element V_j wird ein Wert $\boldsymbol{x}_j \in V_j \subset \mathbb{R}^d$, z.B. der Schwerpunkt von V_j, zugewiesen. Ein beliebiges Intervall $[0,T]$, $T>0$, wird ebenfalls zerlegt durch $\{t_i\}_{i=1,\ldots,N}$ mit $0=t_0<\ldots<t_N=T$. Mittels eines beliebigen numerischen Verfahrens wird zu jedem Zeitlevel t_n eine Approximation v_j^n von $u(t_n,\boldsymbol{x}_j)$ berechnet, wobei u eine schwache Lösung des Erhaltungssatzes (3.1.1) zu den Anfangsdaten (3.1.3) sein soll (Existenz vorausgesetzt). Handelt es sich bei dem Verfahren um ein adaptives, so wird sich die Zerlegung des Ortsraumes nach jedem Zeitpunkt verändern. Die Zerlegung des Zeitintervalls muß auch nicht a-priori bekannt sein. Sie könnte nach jedem Zeitschritt erneut ermittelt werden.
Es wird ferner angenommen, daß sich mit $N\to\infty$ die Elemente V_j und die Zeitintervalle auf einen Punkt zusammenziehen, d.h.

$$\operatorname{diam} V_j \to 0 \quad \text{und} \quad \Delta t_N := \max_{t=0,\ldots,N-1} |t_{i+1}-t_i| \to 0$$

konvergieren monoton fallend gegen Null. Bei expliziten Verfahren ist dieser Zusammenhang durch die CFL-Bedingung erzwungen. Der Konvergenzbeweis gliedert sich nun in mehrere Schritte:

Schritt 1: *(Gitterfunktion)*

Zunächst muß der Approximation $\{v_j^n\}_{j\in\mathbb{N}_0,n\in\{0,\ldots N\}}$ eine kontinuierliche Funktion $v_N:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ zugewiesen werden, um darauf die Hilfsmittel der Funktionalanalysis anwenden zu können. Die Art und Weise wie diese Gitterfunktion zu definieren ist, ist nicht eindeutig. Eine Möglichkeit ist zum Beispiel die Verwendung von Treppenfunktionen auf obiger Zerlegung, d.h.

$$v_N(t,\boldsymbol{x}) = v_j^n \quad \text{für} \quad \boldsymbol{x}\in V_j,\, t_n\le t<t_{n+1},\, 0\le n\le N. \tag{4.3.1}$$

Schritt 2: *(Räumliche Konvergenz auf einem beliebigen Zeitlevel)*

Von der Folge der Gitterfunktionen $\{v_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ soll zunächst gezeigt werden, daß sie für $t\in[0,T]$ beliebig, aber fest eine konvergente Teilfolge besitzt. Im Sinne der Funktionalanalysis bedeutet dies die Präkompaktheit der Menge

$$A_t := \{v_N(t,\cdot)\,|\,N\in\mathbb{N}\}.$$

Angenommen, A_t sei eine Teilmenge des Banachraumes $(X(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{X(\mathbb{R}^d)})$, die insbesondere präkompakt ist. Dann gilt:

$$\exists \{v_{N_i}\}_{i\in\mathbb{N}_0} \subset A_t,\ v(t_i) \in X(\mathbb{R}^d) : \lim_{k\to\infty} \|v_{N_i}(t_i) - v(t_i)\|_{X(\mathbb{R}^d)} = 0. \qquad (4.3.2)$$

Man wird sich später überlegen müssen, wie der Raum $X(\mathbb{R}^d)$ zu wählen ist.

Schritt 3: *(Räumliche und zeitliche Konvergenz auf* $[0,T] \times \mathbb{R}^d$*)*

Mittels eines Diagonalisierungsarguments kann unter den obigen Voraussetzungen eine Teilfolge $\{v_{N_i}\} \subset A_t$ so ausgewählt werden, daß (4.3.2) für alle $t \in D \subset [0,T]$ erfüllt ist, wobei D eine dichte abzählbare Teilmenge in $[0,T]$ ist. Um die Konvergenz dieser Teilfolge auch auf $t \in [0,T] \setminus D$ zu übertragen, macht man sich folgende Tatsachen zu nutze:

- $\overline{D} = [0,T]$.
- $\{v_{N_i}(t_i,\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_{X(\mathbb{R}^d)}$ für alle $t \in D$.

Für jedes $\epsilon > 0$ kann man somit zwei Dinge wählen:

- Eine Zerlegung $\{t_i\}_i \in D$ mit $0 \le t_1 < \ldots < t_{N(\epsilon)} \le T$ und $|t_{i+1} - t_i| < \epsilon$.
- Es existiert ein $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ und $\delta = \delta(\epsilon, n_0)$ derart, daß für $N_1, N_2 > n_0(\epsilon)$ gilt:
  - $\Delta t_{N_1}, \Delta t_{N_2} < \delta$ und
  - $\|v_{N_1}(t_i,\cdot) - v_{N_2}(t_i,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}^d)} < \epsilon$ für $i = 1, \ldots N(\epsilon)$.

Es muß zusätzlich eine Abschätzung der Form

$$\|v_N(t_i,\cdot) - v_N(t_i,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}^d)} \le C\left(\Delta t_N + \left|t - \tilde{t}\right|\right), \quad 0 \le t, \tilde{t} \le T \qquad (4.3.3)$$

für ein $C = C(T) > 0$ vorausgesetzt werden. Mittels der Dreiecksungleichung gilt dann für jedes $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
&\|v_{N_1}(t_i,\cdot) - v_{N_2}(t_i,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}^d)} \le \\
&\|v_{N_1}(t_i,\cdot) - v_{N_1}(t_i,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}^d)} + \|v_{N_1}(t_i,\cdot) - v_{N_2}(t_i,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}^d)} + \\
&\|v_{N_2}(t_i,\cdot) - v_{N_2}(t_i,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}^d)} \le \\
&C\left(\Delta t_{N_1} + |t - t_i|\right) + \epsilon + C\left(\Delta t_{N_2} + |t - t_i|\right).
\end{aligned}$$

Wählt man nun $|t - t_i| < \epsilon$ und N_1, N_2 so groß, daß $\Delta t_{N_1}, \Delta t_{N_2} < \epsilon$ gilt, so erhält man

$$\|v_{N_1}(t,\cdot) - v_{N_2}(t,\cdot)\|_{X(\mathbb{R}^d)} < (4C+1)\epsilon. \qquad (4.3.4)$$

Somit ist $\{v_{N_i}(t,\cdot)\}_i$ für alle $t \in [0,T]$ eine Cauchy-Folge in $X(\mathbb{R}^d)$. Die Vollständigkeit von $X(\mathbb{R}^d)$ liefert die Konvergenz dieser Folge.

Nimmt man nun an, daß

$$\|v\|_{X([0,T]\times\mathbb{R}^d)} = \left\| \|v\|_{X(\mathbb{R}^d)} \right\|_{X([0,T])} \qquad (4.3.5)$$

gilt, was beispielsweise für die L^p-Räume erfüllt ist, so folgt aus (4.3.4)

$$\|v_{N_1} - v_{N_2}\|_{X([0,T]\times\mathbb{R}^d)} < M\epsilon \tag{4.3.6}$$

mit $M = M(T)$ und somit ist $\{v_{N_i}\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in $X([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. Die Vollständigkeit dieses Raumes sichert die Existenz eines Grenzwertes.

Schritt 4: *(Schwache Lösung)*

Bis jetzt wurde die Konvergenz einer Teilfolge $\{v_{N_i}\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ gegen eine Grenzfunktion v in $X([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ verifiziert. Von ihr muß nun überprüft werden, ob sie eine schwache Lösung ist. Da v aber nicht explizit bekannt ist, muß für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ gelten

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ \int\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \left[v_N\phi_{,t} + \sum_{i=1}^{d} F_i(v_N)\phi_{,x_i} \right](t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\mathbb{R}^d} (v_N\phi)(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d - \int\limits_{\mathbb{R}^d} (v_N\phi)(T,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d \right\} = 0. \tag{4.3.7}$$

Die Integrale sind wohldefiniert, da der Integrationsbereich auf den kompakten Träger von ϕ eingeschränkt ist und v_N dort nur endlich viele Werte annehmen kann. Um die Äquivalenz mit der Darstellung (3.2.8) zu gewährleisten, müssen der Grenzwertprozeß und die Integration vertauschbar sein. Im Rahmen der Lebesque-Integration liefert der Satz von Lebesque über die dominierte Konvergenz (siehe z.B. [Alt], S. 62) Kriterien für die Zulässigkeit dieses Vorgehens. Hinreichende Bedingungen sind

$$v_N \quad \text{meßbar für } N \in \mathbb{N}_0 \tag{4.3.8}$$

$$\exists C = C(T) > 0 : \ \|v_N(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le C, \quad \forall t \in [0,T] \tag{4.3.9}$$

$$v(t,\cdot) = \lim_{N\to\infty} v_N(t,\cdot) \quad \text{f.ü.} \quad \forall t \in [0,T], \tag{4.3.10}$$

falls die Flüsse F_i wenigstens stetig sind. Die punktweise Konvergenz ist gesichert, falls $X(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. Um die Konsistenz mit den Anfangsdaten (3.1.3) zu gewährleisten, muß zusätzlich noch

$$\lim_{N\to\infty} \|v_N(0,\cdot) - u_0(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0 \tag{4.3.11}$$

vorausgesetzt werden.

Schritt 5: *(Entropielösung)*

In den vorangegangenen Schritten wurde die Existenz einer schwachen Lösung v als Grenzwert einer konvergenten Teilfolge $\{v_{N_i}\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ gezeigt. Da eine schwache Lösung aber nicht eindeutig sein muß (vgl. (3.3.2)), ist dieser Grenzwert nicht notwendig eindeutig. Es könnte also eine weitere Teilfolge existieren, die gegen eine weitere schwache Lösung $\tilde{v}$ im obigen Sinne konvergiert, die aber nicht identisch mit v im schwachen Sinne ist, d.h.

$$\int\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} [(v-\tilde{v})\phi]\,(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d\,\mathrm{d}t \neq 0, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d). \tag{4.3.12}$$

Um die Eindeutigkeit zu gewährleisten, ist ein Kriterium erforderlich, das die geeignete schwache Lösung charakterisiert. Dieses wird in Anlehnung an die physikalische Entropie (vgl. Kapitel 2.2) auch Entropiekonzept genannt und die entsprechende Lösung bezeichnet man als Entropielösung. In der Literatur finden sich eine Reihe von Entropiekriterien: Oleinik [O] (siehe auch (3.3.4)); Sod [So], S. 274 (siehe auch (4.1.8)); Kruzkov [Kr]; Lax [La2] (siehe auch (3.3.47)). Dabei ist nicht unbedingt klar, ob diese alle äquivalent zueinander sind. Zudem sind diese Kriterien bis auf dasjenige von Lax auf skalare Probleme beschränkt. Heute wird im allgemeinen Kruzkov's Konzept verwendet, da es auf mehrdimensionale Probleme anwendbar ist. Sie alle können aber formal geschrieben werden als

$$f_E(u) \le 0, \tag{4.3.13}$$

wobei diese Ungleichung im schwachen Sinne zu interpretieren ist, d.h.

$$\int\limits_{\mathrm{I\!R}\times\mathrm{I\!R}^d} f_E(u(t,\boldsymbol{x}))\phi(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\,\mathrm{d}x_d\,\mathrm{d}t \le 0, \quad \forall\phi\in C_0^\infty(\mathrm{I\!R}\times\mathrm{I\!R}^d), \quad \phi \text{ positiv.} \tag{4.3.14}$$

Hierbei werden eventuell auftretende Ableitungen in f_E auf ϕ mittels partieller Integration übertragen. Die oben erwähnten Entropiekonzepte liefern Eindeutigkeit im Sinne von

$$\begin{aligned} &u_1, u_2 \text{ Entropielösungen, d.h. sie erfüllen (4.3.13) bzw. (4.3.14)} \Longrightarrow \\ &u_1 = u_2 \text{ im schwachen Sinne (4.3.12).} \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Um nun die Eindeutigkeit des Grenzwertes zu erhalten, muß gewährleistet sein, daß dieser einer Entropiebedingung genügt. In Analogie zur schwachen Lösung muß also für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathrm{I\!R}\times\mathrm{I\!R}^d)$, ϕ positiv, gelten:

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{[0,T]\times\mathrm{I\!R}^d} f_E(v_N(t,\boldsymbol{x}))\phi(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\,\mathrm{d}x_d\,\mathrm{d}t \le 0. \tag{4.3.16}$$

Die Äquivalenz von (4.3.14) und (4.3.16) ist wiederum gegeben, falls Integration und Grenzwertbildung vertauscht werden können. Dies ist unter den hinreichenden Bedingungen (4.3.9) und (4.3.10) gewährleistet, falls f_E stetig ist.

Erfüllt der Grenzwert v einer Teilfolge $\{v_{N_i}\}_{i\in\mathrm{I\!N}_0}$ die Bedingung (4.3.16), so ist v insbesondere eine Entropielösung und somit wegen (4.3.15) auch eindeutig. Daraus ergibt sich also insbesondere auch die Konvergenz der gesamten Folge $\{v_N\}_{N\in\mathrm{I\!N}_0}$ und nicht nur einer Teilfolge.

Faßt man die Schritte 1–5 zusammen, so erhält man

Satz 4.7 *Konvergenz*

Vor.: (a) $(X(\Omega), \|\cdot\|_{X(\Omega)})$, $\Omega \in \{[0,T]\times\mathrm{I\!R}^d, \mathrm{I\!R}^d\}$, $T > 0$ beliebig, aber fest sei ein Banachraum und die Normen erfüllen (4.3.5);

(b) $u_0 \in X(\mathrm{I\!R}^d) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(R^d)$;

(c) die Folge $\{v_N\}_{N\in\mathrm{I\!N}_0}$ gegeben durch (4.3.1) erfülle die Bedingungen (4.3.2), (4.3.3) und (4.3.7)–(4.3.11).

Beh.: (a) Es existiert eine in $X([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ konvergente Teilfolge, und der Grenzwert ist eine schwache Lösung.

(b) Diese schwache Lösung ist eindeutig im Sinne von (4.3.15), falls zusätzlich eine Entropiegleichung der Form (4.3.16) erfüllt ist.

Es stellt sich nun die Frage, wie der Raum X zu wählen ist. Aus (4.3.8) und (4.3.9) folgt unmittelbar

$$X(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d). \tag{4.3.17}$$

Die Bedingung (4.3.2) wird aber zusätzliche Restriktionen an X stellen, da nicht jeder Raum präkompakt und vollständig ist. Im räumlich eindimensionalen Fall ($d = 1$) liefert der Satz von Helly ein Kompaktheitskriterium.

Satz 4.8 *Helly*

Vor.: Sei $A = \{f_i : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, i \in \mathbb{N}_0\}$, $-\infty < a < b < \infty$, eine beliebige Menge von reellen Funktionen, so daß eine Konstante $C < \infty$ existiert mit

(a) $|f_i|_{BV([a,b])} < C, \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$

(b) $|f_i| < C, \quad \forall x \in [a,b],\, i \in \mathbb{N}_0$.

Beh.: Es existiert eine Teilfolge $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ und eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, so daß f_{i_k} punktweise gegen f konvergiert.

Ein Beweis findet sich in [N], S. 220. Der Raum $BV(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, der Funktionen mit beschränkter Variation ist dabei gemäß Crandall und Majda [CrMa] definiert durch

$$BV(\Omega) := \{f \in L^1(\Omega) \,|\, |f|_{BV(\Omega)} < \infty\} \subset L^1(\Omega)$$

mit

$$|f|_{BV(\Omega)} := \sum_{i=1}^{d} \sup_{|h|\neq 0} \frac{1}{|h|} \left\| f(\cdot + h\boldsymbol{e}_i) - f(\cdot) \right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Ein Kompaktheitskriterium für den allgemeinen d-dimensionalen Fall liefert der folgende Satz:

Satz 4.9 *M. Riesz*

Vor.: Sei $A \subset L^p(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$.

Beh.: A ist präkompakt $\iff$

(a) $\sup_{f\in A} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \infty$,

(b) $\sup_{f\in A} \|f(\cdot + \boldsymbol{h}) - f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad$ für $|\boldsymbol{h}| \to 0$,

(c) $\sup_{f\in A} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d \setminus B_R(\boldsymbol{0}))} \to 0 \quad$ für $R \nearrow 0$.

Der Beweis kann in [Alt], S. 88, nachgelesen werden. Die Voraussetzungen aus den Sätzen 4.8 und 4.9 stellen weitere Anforderungen an die Folge der Gitterfunktionen $\{v_N\}_{N\in\mathbb{N}_0}$ aus Satz 4.7.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß obiges Vorgehen aus numerischer Sicht sehr unbefriedigend ist, da es keine Fehlerabschätzung liefert. Die einzige Möglichkeit Fehlerabschätzungen durchzuführen, bietet heute das Entropiemaß von Kusnetzov [Ku], das auf der Entropiebedingung von Kruzkov [Kr] aufbaut. Das Kompaktheitsargument hat aber den konstruktiven Beweis einer Entropielösung ermöglicht ([O], [Kr]). Die Voraussetzungen aus Satz 4.7 wurden als Konstruktionsvorlage für die Entwicklung numerischer Verfahren erfolgreich angewendet; siehe dazu Kapitel 4.1, insbesondere die Sätze 4.1, 4.2, 4.3 und 4.6.

5 Anhang

5.1 Tensorrechnung

Die Tensorrechnung ist ein wesentliches Hilfsmittel zur Beschreibung der Navier-Stokes-Gleichungen in beliebigen Koordinaten. Es kann auch als kompakte Beschreibung dieser Gleichungen unter einer Koordinatentransformation aufgefaßt werden. Zur Einführung sei auf Lagally und Franz [LaFr] verwiesen.
Ausgangspunkt bildet dabei die Darstellung des infinitesimalen Ortsvektors $\mathrm{d}\underset{\sim}{r}$ zwischen zwei verschiedenen benachbarten Punkten der Form

$$\mathrm{d}\underset{\sim}{r} = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}x^i \underset{\sim}{g}_i \tag{5.1.1}$$

wobei die $\underset{\sim}{g}_i$ die kovarianten Basisvektoren im d-dimensionalen Raum definiert durch

$$\underset{\sim}{g}_i \equiv \underset{\sim}{g}_i(x^1, \ldots, x^d) := \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, d \tag{5.1.2}$$

sind und x^i die Koordinaten. Die $\underset{\sim}{g}_i$ sind gerade die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien. Dazu können durch die Orthonormalbeziehung

$$\underset{\sim}{g}_i \underset{\sim}{g}^k \overset{!}{=} \delta_i^k \tag{5.1.3}$$

kontravariante Basisvektoren konstruiert werden. Im Fall eines kartesischen Koordinatensystems erhält man insbesondere

$$\underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{g}_i = \underset{\sim}{g}^i, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{5.1.4}$$

Mittels der Basisvektoren kann über das innere (euklidische) Produkt zweier Vektoren eine Metrik definiert werden:

$$g^{ik} := \underset{\sim}{g}^i \underset{\sim}{g}^k, \quad g_{ik} := \underset{\sim}{g}_i \underset{\sim}{g}_k, \quad i, k = 1, \ldots, d. \tag{5.1.5}$$

Durch diese Metrik kann der Basiswechsel zwischen dem kovarianten und dem kontravarianten System beschrieben werden:

$$\underset{\sim}{g}^i = \sum_{k=1}^{d} g^{ik} \underset{\sim}{g}_k, \quad \underset{\sim}{g}_i = \sum_{k=1}^{d} g_{ik} \underset{\sim}{g}^k. \tag{5.1.6}$$

Die Matrizen der Metrikterme

$$\boldsymbol{M} := (g^{ik})_{i,k=1,\ldots,d}, \quad \boldsymbol{M}^{-1} := (g_{ik})_{i,k=1,\ldots,d} \tag{5.1.7}$$

sind per Definition symmetrisch, und es gilt wegen (5.1.6):

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{I}. \tag{5.1.8}$$

Unter einem Vektor im Sinne der Tensorrechnung wird nun ein Gebilde der Form

$$\underset{\sim}{a} = \sum_{i=1}^{d} a^i \underset{\sim}{g}_i = \sum_{i=1}^{d} a_i \underset{\sim}{g}^i \tag{5.1.9}$$

mit den Koeffizienten (vgl. (5.1.3))

$$a^i = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{g}^i \quad \text{bzw.} \quad a_i = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{g}_i \tag{5.1.10}$$

verstanden, das unter einer Koordinatentransformation forminvariant ist, d.h.

$$\underset{\sim}{a} = \sum_{i=1}^{d} a^i \underset{\sim}{g}_i \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{d} \tilde{a}^i \underset{\sim}{\tilde{g}}_i \quad \text{bzw.} \quad \underset{\sim}{a} = \sum_{i=1}^{d} a_i \underset{\sim}{g}^i \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{d} \tilde{a}_i \underset{\sim}{\tilde{g}}^i. \tag{5.1.11}$$

Auf diesen Vektoren kann das m-fache dyadische Produkt der Form

$$\underset{\approx}{A} = \underset{\sim}{a}_1 \circ \cdots \circ \underset{\sim}{a}_m \tag{5.1.12}$$

definiert werden. $\underset{\approx}{A}$ heißt m-fache Dyade. Eine Operation $\circ$ auf dem Raum der d-dimensionalen Vektoren heißt dyadisches Produkt, falls die Gesetze eines Vektorraumes erfüllt sind. Ferner soll gelten:

- $\lambda(\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}) = (\lambda \underset{\sim}{a}) \circ \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a} \circ (\lambda \underset{\sim}{b})$
- $\lambda(\underset{\sim}{a} \circ \underset{\approx}{B}) = (\lambda \underset{\sim}{a}) \circ \underset{\approx}{B} = \underset{\sim}{a} \circ (\lambda \underset{\approx}{B})$
- $\lambda(\underset{\approx}{A} \circ \underset{\approx}{B}) = (\lambda \underset{\approx}{A}) \circ \underset{\approx}{B} = \underset{\approx}{A} \circ (\lambda \underset{\approx}{B})$
- $(\underset{\approx}{A} \circ \underset{\approx}{B}) \circ \underset{\approx}{C} = \underset{\approx}{A} \circ (\underset{\approx}{B} \circ \underset{\approx}{C}) = \underset{\approx}{A} \circ \underset{\approx}{B} \circ \underset{\approx}{C}$
- $(\underset{\approx}{A} + \underset{\approx}{B}) \circ \underset{\approx}{C} = \underset{\approx}{A} \circ \underset{\approx}{C} + \underset{\approx}{B} \circ \underset{\approx}{C}$.

Aus den obigen Axiomen folgt insbesondere, daß das dyadische Produkt einer m-fachen und einer n-fachen Dyade eine $(m+n)$-fache Dyade ergibt. Die Dyaden aus den Basisvektoren

$$\underset{\sim}{g}_{i_1} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{g}_{i_m} \quad \text{bzw.} \quad \underset{\sim}{g}^{i_1} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{g}^{i_m}, \qquad i_\ell \in \{1, \ldots, d\},\ \ell = 1, \ldots, m \tag{5.1.13}$$

heißen Basisdyaden m-ter Stufe. Die d^m Dyaden sind linear unabhängig. Jedes m-fache dyadische Produkt ist durch sie darstellbar:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{a}_{(i)} = \sum_{k=1}^{d} a_{(i)}^k \underset{\sim}{g}_k &= \sum_{k=1}^{d} a_{(i)k} \underset{\sim}{g}^k \\ \underset{\approx}{A} := \underset{\sim}{a}_{(1)} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{a}_{(m)} &= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{d} A^{i_1\ldots i_m} \underset{\sim}{g}_{i_1} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{g}_{i_m} \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{d} A_{i_1\ldots i_m} \underset{\sim}{g}^{i_1} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{g}^{i_m} \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

mit

$$A^{i_1\ldots i_m} := a_{(1)}^{i_1} \cdots a_{(m)}^{i_m}, \qquad A_{i_1\ldots i_m} := a_{(1)i_1} \cdots a_{(m)i_m}.$$

Auf dem Raum der Dyaden kann das innere Produkt wie folgt definiert werden. Dazu wähle

$$\underset{\approx}{A} = \underset{\sim}{a}_{(1)} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{a}_{(m)}, \quad \underset{\approx}{B} = \underset{\sim}{b}_{(1)} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{b}_{(n)}, \quad \underset{\approx}{C} = \underset{\sim}{c}_{(1)} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{c}_{(r)}$$

für $m, n, r \in \mathrm{IN}$.

$$
\begin{aligned}
\underset{\approx}{A}\underset{\approx}{B} &:= (\underset{\sim}{a}_{(m)} \cdot \underset{\sim}{b}_{(1)})\, \underset{\sim}{a}_{(1)} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{a}_{(m-1)} \circ \underset{\sim}{b}_{(2)} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{b}_{(n)} \\
\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A} &:= (\underset{\sim}{b}_{(n)} \cdot \underset{\sim}{a}_{(1)})\, \underset{\sim}{b}_{(1)} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{b}_{(n-1)} \circ \underset{\sim}{a}_{(2)} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{a}_{(m)} \\
(\underset{\approx}{A} + \underset{\approx}{B}) \cdot \underset{\approx}{C} &:= \underset{\approx}{A} \cdot \underset{\approx}{C} + \underset{\approx}{B} \cdot \underset{\approx}{C}
\end{aligned}
\tag{5.1.15}
$$

Dieses innere Produkt kann verallgemeinert werden. In diesem Fall spricht man von einer ℓ-fachen Überschiebung:

$$
\underset{\approx}{A} \overset{(\ell)}{\cdot} \underset{\approx}{B} := (\underset{\sim}{a}_{(m)} \cdot \underset{\sim}{b}_{(\ell)}) \cdots (\underset{\sim}{a}_{(m-\ell+1)} \cdot \underset{\sim}{b}_{(1)})\, \underset{\sim}{a}_{(1)} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{a}_{(m-\ell)} \circ \underset{\sim}{b}_{(\ell+1)} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{b}_{(n)}. \tag{5.1.16}
$$

Hierbei sind jedoch $m, n, r \geq \ell$ zu wählen. Für $\ell = 1$ ergibt sich gerade das innere Produkt zwischen zwei Dyaden. Im Fall $\ell = 2$ spricht man von einer doppelten Überschiebung und schreibt:

$$
\underset{\approx}{A} \overset{(2)}{\cdot} \underset{\approx}{B} \equiv \underset{\approx}{A} : \underset{\approx}{B}.
$$

Die Gebilde der Form (5.1.14) werden als Tensoren m-ter Stufe bezeichnet, falls sie unter einer Koordinatentransformation forminvariant sind, d.h.

$$
\begin{aligned}
\underset{\approx}{A} &= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{d} A^{i_1\ldots i_m} \underset{\sim}{g}_{i_1} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{g}_{i_m} \overset{!}{=} \sum_{i_1,\ldots i_m=1}^{d} \widetilde{A}^{i_1\ldots i_m} \underset{\sim}{\widetilde{g}}_{i_1} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{\widetilde{g}}_{i_m}, \\
\underset{\approx}{A} &= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{d} A_{i_1\ldots i_m} \underset{\sim}{g}^{i_1} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{g}^{i_m} \overset{!}{=} \sum_{i_1,\ldots i_m=1}^{d} \widetilde{A}_{i_1\ldots i_m} \underset{\sim}{\widetilde{g}}^{i_1} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{\widetilde{g}}^{i_m}
\end{aligned}
\tag{5.1.17}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A}^{k_1\ldots k_m} &= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{d} A^{i_1\ldots i_m} \frac{\partial \widetilde{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \widetilde{x}^{k_m}}{\partial x^{i_m}}, \\
\widetilde{A}_{k_1\ldots k_m} &= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{d} A_{i_1\ldots i_m} \frac{\partial \widetilde{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial \widetilde{x}^{i_m}}{\partial x^{k_m}}
\end{aligned}
\tag{5.1.18}
$$

und den Rechenregeln von Dyaden genügen. Dyaden sind insbesondere Tensoren. In der Physik entspricht ein Skalar einem Tensor 0-ter Stufe, ein Vektor einem Tensor 1-ter Stufe und eine Matrix einem Tensor 2-ter Stufe. Diese können mit den entsprechenden Gebilden in der Mathematik identifiziert werden durch den Isomorphismus

$$
\underset{\approx}{A} = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{d} A^{i_1\ldots i_m} \underset{\sim}{g}_{i_1} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{g}_{i_m} \to (A^{i_1\ldots i_m})_{i_1,\ldots,i_m=1,\ldots,d} =: \boldsymbol{A} \in (\mathrm{IR}^d)^m. \tag{5.1.19}
$$

Ein spezieller Tensor ist der Einheitstensor

$$
\begin{aligned}
\underset{\approx}{E} := \sum_{i=1}^{d} \underset{\sim}{g}^{i} \circ \underset{\sim}{g}_{i} &\overset{(5.1.6)}{=} \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} g^{ik} \underset{\sim}{g}_{k} \circ \underset{\sim}{g}_{i} \\
&= \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} g_{ik} \underset{\sim}{g}^{i} \circ \underset{\sim}{g}^{k}.
\end{aligned}
\tag{5.1.20}
$$

Für beliebige Tensorfelder $\underset{\approx}{C} = \underset{\approx}{C}(t, \underset{\sim}{x})$ können nun die Differentialoperatoren des Gradienten und der Divergenz allgemein definiert werden:

$$\operatorname{grad} \underset{\approx}{C} := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \underset{\approx}{C}}{\partial x^i} \circ \underset{\sim}{g}^i, \quad \operatorname{div} \underset{\approx}{C} := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \underset{\approx}{C}}{\partial x^i} \cdot \underset{\sim}{g}^i \tag{5.1.21}$$

mit

$$\underset{\approx}{C} = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{d} C^{i_1\dots i_m} \underset{\sim}{g}_{i_1} \circ \dots \circ \underset{\sim}{g}_{i_m}.$$

Diese Definition gilt für ein beliebiges krummliniges Koordinatensystem.
Es soll nun im folgenden die explizite Darstellung dieser Operatoren für bestimmte Vektorfelder, wie sie in den Navier-Stokes-Gleichungen auftreten, ermittelt werden. Dabei müssen Ableitungen der Basisvektoren berechnet werden:

$$\Gamma_{ik\ell} := \frac{\partial \underset{\sim}{g}_i}{\partial x^k} \underset{\sim}{g}_\ell \quad \text{bzw.} \quad \Gamma_{ik}^{\ell} := \frac{\partial \underset{\sim}{g}_i}{\partial x^k} \underset{\sim}{g}^\ell. \tag{5.1.22}$$

Diese werden auch als Christoffel-Symbole 1. und 2. Art bezeichnet. Damit gilt

1. $\psi = \psi(t, \underset{\sim}{x})$:

$$\operatorname{grad} \psi = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \circ \underset{\sim}{g}^i = \sum_{\ell=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} g^{\ell i} \, \underset{\sim}{g}_\ell \tag{5.1.23}$$

2. $\underset{\sim}{f} = \sum_{i=1}^{d} f^i(t, \underset{\sim}{x}) \underset{\sim}{g}_i$:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \underset{\sim}{f} &= \sum_{i,k=1}^{d} \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i} + \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell \Gamma_{\ell i}^{k} \right) \underset{\sim}{g}_k \circ \underset{\sim}{g}^i \qquad (5.1.24) \\ &= \sum_{j,i,k=1}^{d} g^{ij} \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i} + \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell \Gamma_{\ell i}^{k} \right) \underset{\sim}{g}_k \circ \underset{\sim}{g}_j \\ \operatorname{div} \underset{\sim}{f} &= \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^i} + \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell \Gamma_{\ell i}^{i} \right) \qquad (5.1.25) \end{aligned}$$

3. $\underset{\approx}{A} = \sum_{j,k=1}^{d} A^{jk}(t, \underset{\sim}{x}) \, \underset{\sim}{g}_j \circ \underset{\sim}{g}_k$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underset{\approx}{A} &= \sum_{j,i=1}^{d} \left[\frac{\partial A^{ji}}{\partial x^i} + \sum_{\ell=1}^{d} \left(A^{\ell i} \Gamma_{\ell i}^{j} + A^{j\ell} \Gamma_{\ell i}^{i} \right) \right] \underset{\sim}{g}_j, \qquad (5.1.26) \\ \operatorname{div} (\psi \underset{\approx}{E}) &= \operatorname{grad} \psi. \qquad (5.1.27) \end{aligned}$$

Es soll nun im weiteren Verlauf untersucht werden, wie sich diese Differentialoperatoren unter einer Koordinatentransformation verhalten. Dazu seien x^i und $\widetilde{x}^i$ krummlinige Koordinaten mit

$$\widetilde{x}^i = \widetilde{x}^i(x^1, \dots, x^d), \quad i = 1, \dots, d \tag{5.1.28}$$

und den Basisvektoren

$$\underset{\sim}{g}_i := \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial x^i} \quad \text{und} \quad \underset{\sim}{\widetilde{g}}_i := \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \widetilde{x}^i}. \tag{5.1.29}$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Koordinatentransformation bijektiv ist, d.h. die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{G} := \left(\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k}\right)_{i,k=1,\ldots,d}$$

ist invertierbar. Der Ortsvektor $\underset{\sim}{r}$ ist somit darstellbar als

$$\underset{\sim}{r} = \sum_{i=1}^{d} x^i \underset{\sim}{g}_i = \sum_{i=1}^{d} \widetilde{x}^i \underset{\sim}{\widetilde{g}}_i \tag{5.1.30}$$

und der infinitesimale Ortsvektor $\mathrm{d}\underset{\sim}{r}$ als

$$\mathrm{d}\underset{\sim}{r} = \mathrm{d}x^i \underset{\sim}{g}_i = \mathrm{d}\widetilde{x}^i \underset{\sim}{\widetilde{g}}_i \tag{5.1.31}$$

mit

$$\mathrm{d}x^i = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^k} \mathrm{d}\widetilde{x}^k \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}\widetilde{x}^i = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k. \tag{5.1.32}$$

Die kovarianten Basisvektoren lassen sich dann folgendermaßen ineinander überführen:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\widetilde{g}}_i &\overset{(5.1.29)}{=} \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \widetilde{x}^i} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i} \overset{(5.1.29)}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i} \underset{\sim}{g}_k \quad \text{bzw.} \\ \underset{\sim}{g}_i &\overset{(5.1.29)}{=} \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial \widetilde{x}^k} \frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^i} \overset{(5.1.29)}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^i} \underset{\sim}{\widetilde{g}}_k. \end{aligned} \tag{5.1.33}$$

Die kontravarianten Basisvektoren bezüglich der beiden Koordinatensysteme sind durch die Orthonormalitätsbedingung (5.1.3) festgelegt. Diese können mittels einer Basistransformation eindeutig untereinander in Relation gesetzt werden:

$$\underset{\sim}{\widetilde{g}}^i = \sum_{k=1}^{d} \left(\underset{\sim}{\widetilde{g}}^i \underset{\sim}{g}_k\right) \underset{\sim}{g}^k \quad \text{bzw.} \quad \underset{\sim}{g}^i = \sum_{k=1}^{d} \left(\underset{\sim}{g}^i \underset{\sim}{\widetilde{g}}_k\right) \underset{\sim}{\widetilde{g}}^k. \tag{5.1.34}$$

Mit (5.1.33) folgt daraus unmittelbar:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\widetilde{g}}^i &= \sum_{k,\ell=1}^{d} \frac{\partial \widetilde{x}^\ell}{\partial x^k} \left(\underset{\sim}{\widetilde{g}}^i \underset{\sim}{\widetilde{g}}_\ell\right) \underset{\sim}{g}^k \overset{(5.1.3)}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k} \underset{\sim}{g}^k \quad \text{bzw.} \\ \underset{\sim}{g}^i &= \sum_{k,\ell=1}^{d} \frac{\partial x^\ell}{\partial \widetilde{x}^k} \left(\underset{\sim}{g}^i \underset{\sim}{g}_\ell\right) \underset{\sim}{\widetilde{g}}^k \overset{(5.1.3)}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^k} \underset{\sim}{\widetilde{g}}^k. \end{aligned} \tag{5.1.35}$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so ergibt sich:

$$\underset{\sim}{\widetilde{g}}^i = \sum_{k,\ell=1}^{d} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^\ell} \underset{\sim}{\widetilde{g}}^\ell. \tag{5.1.36}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\underset{\sim}{\tilde{g}}_j$ so ergibt sich aus der Orthonormalitätsbedingung (5.1.3):

$$\delta^i_j = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \right)_{i,k=1,\dots,d} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} \right)_{k,j=1,\dots,d} = \underset{\approx}{E}, \tag{5.1.37}$$

also

$$\boldsymbol{G}^{-1} = \left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} \right)_{k,j=1,\dots,d}.$$

Die Koeffizienten eines Vektors $\underset{\sim}{a}$

$$\underset{\sim}{a} = \sum_{i=1}^{d} a^i \underset{\sim}{g}_i = \sum_{i=1}^{d} a_i \underset{\sim}{g}^i = \sum_{i=1}^{d} \tilde{a}^i \underset{\sim}{\tilde{g}}_i = \sum_{i=1}^{d} \tilde{a}_i \underset{\sim}{\tilde{g}}^i$$

bezüglich der unterschiedlichen Koordinatensysteme stehen wie folgt in Bezug:

$$\begin{aligned} \tilde{a}^i &\overset{(5.1.3)}{=} \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{\tilde{g}}^i \overset{(5.1.35)}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{g}^k \overset{(5.1.3)}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} a^k, \\ \tilde{a}_i &\overset{(5.1.3)}{=} \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{\tilde{g}}_i \overset{(5.1.33)}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{g}_k \overset{(5.1.3)}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} a_k, \end{aligned} \tag{5.1.38}$$

beziehungsweise in Matrix-Vektor-Schreibweise:

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{a} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\tilde{\boldsymbol{a}}} = \boldsymbol{G}\underline{\boldsymbol{a}} \tag{5.1.39}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{a}} &= (\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^d)^T, \quad \boldsymbol{a} = (a^1, \dots, a^d)^T, \\ \underline{\tilde{\boldsymbol{a}}} &= (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_d)^T, \quad \underline{\boldsymbol{a}} = (a_1, \dots, a_d)^T. \end{aligned}$$

Im folgenden sei nun x^i das kartesische Koordinatensystem. Dann gilt:

$$\underset{\sim}{g}_i = \underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{g}^i, \quad i = 1, \dots, d. \tag{5.1.40}$$

Mit (5.1.33) und (5.1.35) folgt daraus

$$\underset{\sim}{\tilde{g}}^i = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \underset{\sim}{e}_k \quad \text{bzw.} \quad \underset{\sim}{\tilde{g}}_i = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \underset{\sim}{e}_k. \tag{5.1.41}$$

Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Funktionalmatrizen und den Komponenten der ko- und kontravarianten Basisvektoren:

$$\boldsymbol{G} \overset{!}{=} (\tilde{\boldsymbol{g}}^1, \dots, \tilde{\boldsymbol{g}}^d)^T, \quad \boldsymbol{G}^{-1} \overset{!}{=} (\tilde{\boldsymbol{g}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{g}}_d) \tag{5.1.42}$$

und

$$\boldsymbol{G}^T = \boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{M}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\boldsymbol{M}} = (\tilde{g}^{ik})_{i,k=1,\dots,d}. \tag{5.1.43}$$

Es soll nun die Darstellung der Navier-Stokes-Gleichungen in beliebigen krummlinigen Koordinaten hergeleitet werden. Diese sind formal durch die Gleichungen (5.1.23)–(5.1.26) gegeben, wobei $\underset{\sim}{g}_i$, $\underset{\sim}{g}^i$ durch $\underset{\sim}{\tilde{g}}_i$, $\underset{\sim}{\tilde{g}}^i$ zu ersetzen sind. In der Mathematik wird aber von der Darstellung in kartesischen Koordinaten ausgegangen, d.h. es muß eine Koordinatentransformation durchgeführt werden. Für kartesische Koordinaten entfallen in (5.1.23)–(5.1.26) die Metrikterme, da die Christoffel-Symbole verschwinden. Zur Vereinfachung der Darstellung setze man

$$\mathbf{grad}_{\tilde{\boldsymbol{x}}} \tilde{\boldsymbol{C}} := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^i} \circ \underset{\sim}{e}_i, \quad \operatorname{div}_{\tilde{\boldsymbol{x}}} \tilde{\boldsymbol{C}} := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^i}\, \underset{\sim}{e}_i \tag{5.1.44}$$

mit

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{d} \tilde{C}^{i_1\ldots i_m} \underset{\sim}{e}_{i_1} \circ \cdots \circ \underset{\sim}{e}_{i_m}.$$

Dabei sind die $\tilde{C}^{i_1\ldots i_m}$ die Koeffizienten des Tensors $\tilde{C}$ bzgl. der Basis $\underset{\sim}{\tilde{g}}_i$. Die Operatoren (5.1.44) sind identisch zu denen aus Kapitel 1.6 über die Konventionen.
Mit (5.1.44) und den Relationen (5.1.42) lassen sich (5.1.23)–(5.1.26) auch in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\psi = \boldsymbol{G}^T \mathbf{grad}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}\psi = \boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{M}}\,\mathbf{grad}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}\psi,\\
&(\operatorname{grad}\underset{\sim}{\tilde{f}})^{kj} = (\boldsymbol{G}^T\mathbf{grad}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}\tilde{\boldsymbol{f}})_{kj} + \sum_{i,\ell=1}^{d} g^{ij}\tilde{f}^\ell\tilde{\Gamma}^k_{\ell i},\\
&\operatorname{div}\underset{\sim}{\tilde{f}} = \operatorname{div}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}\tilde{\boldsymbol{f}} + \sum_{i,\ell=1}^{d}\tilde{f}^\ell\tilde{\Gamma}^i_{\ell i},\\
&\operatorname{div}\underset{\approx}{\tilde{A}} = \boldsymbol{G}^{-1}\left(\operatorname{div}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}\tilde{\boldsymbol{A}} + \tilde{\boldsymbol{b}}\right) \text{ mit}\\
&\tilde{b}^k = \sum_{i,j=1}^{d}\left[\tilde{A}^{ji}\,\Gamma^k_{ji} + \tilde{A}^{kj}\,\tilde{\Gamma}^i_{ji}\right], \qquad k=1,\ldots,d,
\end{aligned}$$

Hierbei ist die Gleichheit im Sinne des Isomorphismus (5.1.19) zu verstehen.
Zu transformieren sind nun die Divergenzen beziehungsweise Gradienten von

$$\underset{\sim}{\tilde{f}} = \psi\underset{\sim}{\tilde{v}}, \quad \underset{\sim}{\tilde{f}} = \rho\underset{\sim}{\tilde{v}}\circ\underset{\sim}{\tilde{v}}, \quad \underset{\sim}{\tilde{f}} = \underset{\approx}{\tilde{\tau}}_v\underset{\sim}{\tilde{v}}, \quad \underset{\sim}{\tilde{f}} = w\operatorname{grad}\psi, \quad \underset{\approx}{\tilde{A}} = \underset{\approx}{\tilde{\tau}}_v.$$

Nach einer länglichen Rechnung erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\psi\underset{\sim}{v}) &= \operatorname{div}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}(\psi\tilde{\boldsymbol{v}}) + \sum_{i,\ell=1}^{d}\psi\tilde{v}^\ell\tilde{\Gamma}^i_{\ell i},\\
\operatorname{div}(p\underset{\approx}{E}) &= \boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{M}}\,\mathbf{grad}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}(p),\\
\operatorname{div}(\rho\underset{\sim}{v}\circ\underset{\sim}{v}) &= \boldsymbol{G}^{-1}\left[\operatorname{div}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}(\rho\tilde{\boldsymbol{v}}\tilde{\boldsymbol{v}}^T) + \tilde{\boldsymbol{a}}\right],\\
\operatorname{div}(\underset{\approx}{\tau}_v) &= \boldsymbol{G}^{-1}\left[\operatorname{div}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v) + \tilde{\boldsymbol{b}}\right],\\
\operatorname{div}(\underset{\approx}{\tau}_v\underset{\sim}{v}) &= \operatorname{div}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v\tilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{v}}) + \tilde{c},\\
\operatorname{div}(\underset{\sim}{q}) &= \operatorname{div}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}\tilde{\boldsymbol{q}} + \tilde{d}
\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\boldsymbol{q}} \;=\; \psi\operatorname{grad}w = \psi\,\boldsymbol{G}^{-1}\tilde{\boldsymbol{M}}\,\mathbf{grad}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}w \qquad (\text{hier: } \psi=-\lambda,\ w=T),$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\tau}_v^{kj} &= \sum_{i=1}^{d} \left\{ \mu_s \left[\frac{\partial \widetilde{v}^k}{\partial \widetilde{x}^i} \widetilde{g}^{ij} + \frac{\partial \widetilde{v}^j}{\partial \widetilde{x}^i} \widetilde{g}^{ik} \right] + \left(\mu_B - \tfrac{2}{3}\mu_s \right) \frac{\partial \widetilde{v}^i}{\partial \widetilde{x}^i} \widetilde{g}^{jk} \right\} + \\
&\quad \sum_{\ell,i=1}^{d} \left\{ \mu_s \left[\widetilde{v}^\ell \, \widetilde{\Gamma}^k_{\ell i} \, \widetilde{g}^{ij} + \widetilde{v}^\ell \, \widetilde{\Gamma}^j_{\ell i} \, \widetilde{g}^{ik} \right] + \left(\mu_B - \tfrac{2}{3}\mu_s \right) \widetilde{v}^\ell \, \widetilde{\Gamma}^i_{\ell i} \, g^{jk} \right\}, \\
\widetilde{a}^k &= \rho \sum_{i,j=1}^{d} \left[\widetilde{v}^j \, \widetilde{v}^i \, \widetilde{\Gamma}^k_{ji} + \widetilde{v}^k \, \widetilde{v}^j \, \widetilde{\Gamma}^i_{ji} \right], \qquad k = 1, \ldots, d, \\
\widetilde{b}^k &= \sum_{i,j=1}^{d} \left[\widetilde{\tau}_v^{ji} \, \Gamma^k_{ji} + \widetilde{\tau}_v^{kj} \, \widetilde{\Gamma}^i_{ji} \right], \qquad k = 1, \ldots, d, \\
\widetilde{c} &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{d} \widetilde{\tau}_v^{ij} \, \widetilde{v}^k \, \widetilde{\Gamma}^\ell_{il} \, \widetilde{g}_{ik}, \\
\widetilde{d} &= \sum_{i,\ell=1}^{d} \widetilde{q}^\ell \, \widetilde{\Gamma}^i_{\ell i}.
\end{aligned}
$$

Multipliziert man die Impulsgleichung mit $\widetilde{\boldsymbol{G}}$, so ergeben sich die Gleichungen für die kovarianten Komponenten des Impulsvektors zu der transformierten Basis $\underset{\sim}{\widetilde{g}}^i$, d.h. dem neuen Koordinatensystem. Die Navier-Stokes-Gleichungen (2.3.1) nehmen somit folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
&\rho_{,t} + \operatorname{div}_{\widetilde{\boldsymbol{x}}}(\rho \widetilde{\boldsymbol{v}}) + \rho \sum_{i,\ell=1}^{d} \widetilde{v}^\ell \widetilde{\Gamma}^i_{\ell i} = 0 \\
&(\rho \widetilde{\boldsymbol{v}})_{,t} + \operatorname{div}_{\widetilde{\boldsymbol{x}}}(\rho \widetilde{\boldsymbol{v}} \widetilde{\boldsymbol{v}}^T) + \widetilde{\boldsymbol{M}} \, \mathbf{grad}_{\widetilde{\boldsymbol{x}}} \, p + \widetilde{\boldsymbol{a}} = \operatorname{div}_{\widetilde{\boldsymbol{x}}} \widetilde{\boldsymbol{\tau}}_v + \widetilde{\boldsymbol{b}} \\
&(\rho E)_{,t} + \operatorname{div}_{\widetilde{\boldsymbol{x}}}(\rho \widetilde{\boldsymbol{v}} H) + \rho H \sum_{i,\ell=1}^{d} \widetilde{v}^\ell \widetilde{\Gamma}^i_{\ell i} = \operatorname{div}_{\widetilde{\boldsymbol{x}}}(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}_v \widetilde{\boldsymbol{M}}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{v}} - \widetilde{\boldsymbol{q}}) + \widetilde{c} - \widetilde{d}.
\end{aligned}
\tag{5.1.45}
$$

Man sieht, daß sich die Form von (2.3.1) nur unwesentlich ändert. Es treten aufgrund der Koordinatentransformation nur einige zusätzliche Metrikterme auf.

5.2 Distributionentheorie

In Kapitel 3.2 wurde die Differentialgleichung (3.1.1) in die Integralgleichung (3.2.8) überführt. Dadurch wurden die partiellen Ableitungen der Erhaltungsgrößen $\boldsymbol{u}$ auf Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathrm{IR} \times \mathrm{IR}^d, \mathrm{IR})$ übertragen. Im Rahmen der Distributionentheorie ist es möglich, diesen Prozeß zu verallgemeinern und so die partiellen Ableitungen von $\boldsymbol{u}$ in einem distributiven Sinne zu interpretieren. Dazu sollen im folgenden die grundlegenden Elemente dieser Theorie aufgezeigt werden. Ausgangspunkt bildet der Raum $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathrm{IR}^n)$ der Testfunktionen.[1] Dieser wird mit einem Konvergenzbegriff versehen. Eine Folge $\{\phi_j\}_{j\in\mathrm{IN}_0} \subset \mathcal{D}$ heißt konvergent in $\mathcal{D}$, falls gilt:

1. Es gibt $a > 0$ mit $\phi_j(\boldsymbol{x}) = 0$ für alle $|\boldsymbol{x}| > a$ und $j \in \mathrm{IN}_0$, d.h. $\operatorname{supp} \phi_j$ ist gleichmäßig beschränkt in j.

2. Die Folge $\{D^{\boldsymbol{k}}\phi_j\}_{j\in\mathrm{IN}_0}$ konvergiert gleichmäßig auf IR^n für alle $\boldsymbol{k} \in \mathrm{IN}_0^n$.

Der Grenzwert ϕ kann somit punktweise definiert werden durch

$$\phi(\boldsymbol{x}) := \lim_{j\to\infty} \phi_j(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathrm{IR}^n \tag{5.2.1}$$

und ist selber ein Element aus dem Testraum $\mathcal{D}$. Man schreibt auch kurz

$$\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi.$$

Unter obigem Konvergenzbegriff ist es nun möglich, die Stetigkeit eines linearen Funktionals $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ auf $\mathcal{D}$ zu definieren. T heißt stetig, falls für alle in $\mathcal{D}$ konvergenten Folgen $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi$ gilt:

$$\lim_{j\to\infty} T\phi_j = T\phi, \tag{5.2.2}$$

d.h. der Grenzwertprozeß kann unter das Funktional gezogen werden.
Ein lineares und stetiges Funktional auf $\mathcal{D}$ bezeichnet man als Distribution oder verallgemeinerte Funktion. Der Raum $\mathcal{D}'$ aller Distributionen

$$\mathcal{D}' := \{T : \mathcal{D} \to \mathbb{C} \,|\, T \text{ linear und stetig}\}$$

ist somit der Dualraum zu $\mathcal{D}$. In Anlehnung an die Hilbert-Raum-Theorie schreibt man

$$T\phi := \langle T, \phi \rangle\,, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}. \tag{5.2.3}$$

Zu jedem $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{IR}^n)$ kann eine Distribution auf $\mathcal{D}$ definiert werden durch

$$\langle T_f, f \rangle := \int\limits_{\mathrm{IR}^n} f(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}, \tag{5.2.4}$$

wobei die Integration bezüglich dem Lebesgue-Maß durchgeführt wird. Die Kompaktheit des Trägers von ϕ sichert die Wohldefiniertheit des Integrals. Eine solche Distribution wird als regulär bezeichnet, und die Menge aller regulären Distributionen wird mit

$$\mathcal{D}'_{\mathrm{reg}} := \{T_f \,|\, f \in L^1_{\mathrm{loc}}\}$$

[1] In der Literatur werden auch andere Testräume verwendet, z.B. $C^\infty(\mathrm{IR}^n)$, $C^{|\boldsymbol{k}|}(\Omega)$, $C_0^{|\boldsymbol{k}|}(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathrm{IR}^n$ offen.

bezeichnet.
Durch die Abbildung $f \to T_f$ wird ein Isomorphismus von L^1_{loc} auf $\mathcal{D}'_{\text{reg}}$ definiert. In diesem Sinne gilt dann

$$L^1_{\text{loc}} \cong \mathcal{D}'_{\text{reg}} \subset \mathcal{D}'.$$

Die Distribution aus $\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}'_{\text{reg}}$ werden als singulär bezeichnet. Die wohl bedeutenste singuläre Distribution ist die δ-Distribution definiert durch

$$\langle \delta, \phi \rangle := \phi(\mathbf{0}), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}. \tag{5.2.5}$$

Bezüglich dem Dirac-Maß $\delta_{\mathbf{0}}$ gilt dann insbesondere

$$\phi(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\delta_{\mathbf{0}}. \tag{5.2.6}$$

Man kann zeigen, daß es kein $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gibt mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \phi(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\delta_{\mathbf{0}}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

(vgl. [Tr], S. 43).
Obwohl nicht jede Distribution regulär ist, so kann jedoch jede[1] singuläre Distribution durch eine Folge regulärer Distributionen approximiert werden. Dazu muß zunächst ein Konvergenzbegriff in $\mathcal{D}'$ definiert werden, um den Approximationsprozeß beschreiben zu können:

1. $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{D}'$ heißt konvergent in $\mathcal{D}'$, falls $\{\langle T_j, \phi\rangle\}_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ konvergiert für alle $\phi \in \mathcal{D}$.

2. $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{D}'$ heißt konvergent in $\mathcal{D}'$ gegen $T \in \mathcal{D}'$, falls

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_j, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

(kurz: $T_j \stackrel{\mathcal{D}'}{\to} T$).

Unter diesem Konvergenzbegriff ist $\mathcal{D}'$ vollständig. Man kann nun zeigen, daß beispielsweise die Folge

$$\phi_j(\boldsymbol{x}) := \left[\int_{\mathbb{R}^n} \rho(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n \right]^{-1} j\rho(j\boldsymbol{x})$$

mit

$$\rho(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|^2 - 1} \right) & , |\boldsymbol{x}| < 1 \\ 0 & , |\boldsymbol{x}| \geq 1 \end{cases}$$

gegen die δ-Distribution im obigen Sinne konvergiert.
Zur Identifikation von Distributionen muß die Gleichheit von Distributionen eingeführt werden. Man sagt, daß $T, S \in \mathcal{D}'$ gleich sind, falls gilt:

$$\langle T, \phi \rangle = \langle S, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}. \tag{5.2.7}$$

[1]Dies gilt zumindest für die Delta-Distribution.

Für reguläre Distributionen gilt dann:

$$\begin{aligned} &f,g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{I\!R}^n): \quad T_f = T_g \Leftrightarrow f = g \quad \text{f.ü. auf } \mathrm{I\!R}^n,\\ &f,g \in C^0(\mathrm{I\!R}^n): \quad T_f = T_g \Leftrightarrow f = g \quad \text{auf } \mathrm{I\!R}^n. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Um mit Distributionen arbeiten zu können, müssen Operationen definiert werden und geeignete Rechenregeln abgeleitet werden. Die Definition der Gleichheit legt nahe, anhand von regulären Distributionen einen geeigneten Ansatz zu finden und diese Operation per Definition auf alle Distributionen zu erweitern. Dieses Vorgehen nennt man auch Permanenzprinzip und besteht aus drei Schritten:

1. Sei A eine Operation auf $M \subset L^1_{\mathrm{loc}}$, dann setze
$$AT_f := T_{Af}.$$
2. Anwendung einer Rechenregel für das Lebesgue-Integral (z.B. Substitution, partielle Integration, etc.), um die Operation A auf $\phi \in \mathcal{D}$ zu übertragen (Dualisierung).
3. Fortsetzen auf $\mathcal{D}'$, falls von der Fortsetzung Wohldefiniertheit, Linearität und Stetigkeit gezeigt werden kann.

Einige wesentliche Regeln sind im Folgenden aufgelistet:

1. Addition:
$$\langle S+T,\phi\rangle := \langle S,\phi\rangle + \langle T,\phi\rangle\,, \quad \forall S,T \in \mathcal{D}',\ \phi \in \mathcal{D}, \tag{5.2.9}$$
2. Skalare Multiplikation:
$$\langle \alpha T,\phi\rangle := \alpha\,\langle T,\phi\rangle\,, \quad \forall T \in \mathcal{D}',\ \alpha \in \mathbb{C},\ \phi \in \mathcal{D}, \tag{5.2.10}$$
3. Multiplikation mit C^∞:
$$\langle \chi T,\phi\rangle := \langle T,\chi\phi\rangle\,, \quad \forall T \in \mathcal{D}',\ \chi \in C^\infty,\ \phi \in \mathcal{D}, \tag{5.2.11}$$
4. Lineare Substitution:
$$\begin{aligned} &\langle T(\boldsymbol{A}\cdot+\boldsymbol{b}),\phi\rangle \equiv T(\phi(\boldsymbol{A}\cdot+\boldsymbol{b}))\\ &:= \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} T(\phi(\boldsymbol{A}^{-1}(\cdot-\boldsymbol{b}))) \equiv \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\left\langle T,\phi(\boldsymbol{A}^{-1}(\cdot-\boldsymbol{b}))\right\rangle \end{aligned} \tag{5.2.12}$$
für alle $T \in \mathcal{D}'$, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{I\!R}^n$, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{I\!R}^{n\times n}$, $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, $\phi \in \mathcal{D}$,
5. Partielle Ableitung:
$$\left\langle D^{\boldsymbol{k}}T,\phi\right\rangle := (-1)^{|\boldsymbol{k}|}\left\langle T,D^{\boldsymbol{k}}\phi\right\rangle, \quad \forall T \in \mathcal{D}',\ \boldsymbol{k} \in \mathrm{I\!N}_0^n,\ \phi \in \mathcal{D}. \tag{5.2.13}$$

Im folgenden sollen die partiellen Ableitungen für reguläre Distributionen näher betrachtet werden. Dazu betrachtet man Funktionen $f, f^{(\boldsymbol{k})} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{I\!R}^n)$ für die gilt:

$$\int\limits_{\mathrm{I\!R}^n} f^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = (-1)^{|\boldsymbol{k}|}\int\limits_{\mathrm{I\!R}^n} f(\boldsymbol{x})D^{\boldsymbol{k}}\phi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathrm{I\!R}^n). \tag{5.2.14}$$

Man bezeichnet dann $f^{(\boldsymbol{k})}$ als schwache Ableitung von f.[1] Diese Identität ist durch die partielle Integration von differenzierbaren Funktionen $f \in C^{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^n)$ motiviert. Mit $T_f, T_{f^{(\boldsymbol{k})}} \in \mathcal{D}'_{\text{reg}}$ als die durch $f, f^{(\boldsymbol{k})}$ erzeugten regulären Distributionen kann man (5.2.14) auch schreiben als

$$\left\langle T_{f^{(\boldsymbol{k})}}, \phi \right\rangle = (-1)^{|\boldsymbol{k}|} \left\langle T_f, D^{\boldsymbol{k}} \phi \right\rangle .$$

Aus (5.2.13) folgt dann

$$D^{\boldsymbol{k}} T_f = T_{f^{(\boldsymbol{k})}} \quad \text{und} \quad D^{\boldsymbol{k}} f = f^{(\boldsymbol{k})}. \tag{5.2.15}$$

Sei nun $\boldsymbol{u}$ eine klassische Lösung von (3.1.1). Dann sind $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_{,t}$ und $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{u})$ insbesondere Elemente von $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$. Es existieren also wegen (5.2.4) reguläre Distributionen $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{u}_{,t}}, \boldsymbol{T}_{(\boldsymbol{F}_i \circ \boldsymbol{u}),x_i} \in (\mathcal{D}'_{\text{reg}})^m$. Aus der Differentialgleichung (3.1.1) folgt dann mit (5.2.9) und (5.2.7)

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{u}_{,t}} + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{T}_{(\boldsymbol{F}_i \circ \boldsymbol{u}),x_i} \overset{(5.2.9)}{=} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{u}_{,t} + \sum_{i=1}^{d} (\boldsymbol{F}_i \circ \boldsymbol{u}),x_i} = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{u}}. \tag{5.2.16}$$

Dies ist eine äquivalente Schreibweise von (3.1.1), da die Integration gemäß (5.2.4) für alle $\phi \in \mathcal{D}$ durchgeführt wird. Die Gleichung (5.2.16) behält aber ihre Gültigkeit im Gegensatz zu (3.1.1), falls die Distributionen erzeugenden Funktionen in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ liegen. Sie kann aber verallgemeinert werden, indem man zur Definition der Ableitung einer Distribution übergeht. Mit (5.2.15) gilt insbesondere

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{u}_{,t}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{F}_i \circ \boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{T}_{(\boldsymbol{F}_i \circ \boldsymbol{u}),x_i}. \tag{5.2.17}$$

Man beachte, daß die rechten Seiten hierin nur wohldefiniert sind, falls die Ableitungen von $\boldsymbol{u}$ in L^1_{loc} liegen. Die linken Seiten sind aber mit (5.2.13) per Definition wohldefiniert, unabhängig davon, ob die Ableitung einer Distribution regulär ist. Wie man sich am Beispiel der Heavy-Side-Funktion

$$h(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \tag{5.2.18}$$

leicht veranschaulichen kann, ist die distributive Ableitung, die per Definition (5.2.13) exitiert, nicht notwendigerweise eine reguläre Distribution, d.h. es muß keine schwache Ableitung im Sinne von (5.2.14) existieren:

$$\langle T'_h, \phi \rangle \overset{(5.2.13)}{=} -\langle T_h, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(t)\,\mathrm{d}t = \phi(0) \overset{(5.2.5)}{=} \langle \delta, \phi \rangle , \tag{5.2.19}$$

d.h. $T'_h = \delta$ und somit eine singuläre Distribution.
Somit kann (5.2.16) auch in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{u}}) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{F}_i \circ \boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{u}} \tag{5.2.20}$$

---

[1] f muß keine Funktion aus einem Sobolev-Raum sein, da $f \in H^{m,p}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$

1. $f^{(\boldsymbol{k})} \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall 0 \le |\boldsymbol{k}| \le m$
2. (5.2.14) ist für $f^{(\boldsymbol{k})}$ erfüllt.

geschrieben werden. Diese Darstellung behält ihre Gültigkeit falls $\boldsymbol{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}$ ist und $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{u}}$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{F}_i \circ \boldsymbol{u}})$ keine regulären Distributionen sein sollten. Man bezeichnet $\boldsymbol{u}$ dann als eine Lösung von (3.1.1) im distributiven Sinne. Die Gleichung (5.2.20) ist somit das Pendant zu (3.1.1) in distributivem Sinne.
Die schwache Formulierung (3.2.8) läßt sich ebenfalls im Rahmen der Distributionentheorie formulieren. Dazu wird im folgenden angenommen, daß gilt:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathrm{I\!R}_+ \times \mathrm{I\!R}^d, \mathrm{I\!R}^m), \quad \boldsymbol{u}(0,\cdot) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathrm{I\!R}^d), \\ &\boldsymbol{u}_{,t}, \boldsymbol{u}_{,x_i} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{I\!R}_+ \times \mathrm{I\!R}^d, \mathrm{I\!R}^m), \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

wobei $\boldsymbol{u}_{,t}$ und $\boldsymbol{u}_{,x_i}$ schwache Ableitungen von $\boldsymbol{u}$ im Sinne von (5.2.14) sein sollen. Mit (5.2.4) kann dann (5.2.16) auch geschrieben werden in der Form

$$\left\langle \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{u}_{,t}}, \phi \right\rangle + \sum_{i=1}^{d} \left\langle \boldsymbol{T}_{(\boldsymbol{F}_i \circ \boldsymbol{u})_{,x_i}}, \phi \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{u}}, \phi \right\rangle, \quad \forall \phi \in C^\infty_0(\mathrm{I\!R} \times \mathrm{I\!R}^d). \tag{5.2.22}$$

Die partiellen Ableitungen können nun mittels (5.2.14) auf die Testfunktion ϕ übertragen werden. Wird dabei nicht über $\mathrm{I\!R} \times \mathrm{I\!R}^d$ sondern über $\mathrm{I\!R}_+ \times \mathrm{I\!R}^d$ integriert, so müssen die Randbedingungen (3.1.3) berücksichtigt werden, und man erhält

$$\langle \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{u}}, \phi_{,t} \rangle + \sum_{i=1}^{d} \langle \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{F}_i \circ \boldsymbol{u}}, \phi_{,x_i} \rangle + \langle \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{u}}, \phi \rangle + \left\langle \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{u}(0,\cdot)}, \phi(0,\cdot) \right\rangle = \boldsymbol{0} \tag{5.2.23}$$

für $\phi \in C^\infty_0(\mathrm{I\!R} \times \mathrm{I\!R}^d)$. Dies ist gerade die schwache Formulierung (3.2.8). Sie ist auch dann noch gültig, falls zu $\boldsymbol{u}$ keine schwachen Ableitungen existieren. Dies gilt aber nicht für die Darstellung (5.2.20).

5.3 Elemente der kinetischen Gastheorie

Im Gegensatz zur Kontinuumsmechanik werden im Rahmen der kinetischen Gastheorie einzelne Teilchen (Atome, Moleküle, Elektronen) mit einer inneren Struktur betrachtet. Dieser Ansatz ermöglicht die Berücksichtigung von Wechselwirkungen aufgrund von Teilcheninteraktionen wie beispielsweise die Anregung innerer Freiheitsgrade oder die Dissoziation beziehungsweise Ionisation von Teilchen. Die innere Struktur ermöglicht die Speicherung von (innerer) Energie verteilt auf sogenannte innere Freiheitsgrade

- Translation,
- Rotation (nur Moleküle),
- Vibration (nur Moleküle),
- elektronische Anregung.

Zur Dissoziation und Ionisation wird ebenfalls Energie umgewandelt. Diese haben aber zur Folge, daß die Struktur eines Teilchens zerstört wird. Mit Hilfe der kinetischen Theorie kann dieser Transferprozeß auf mikroskopischer Ebene — also Betrachtung von einzelnen Teilchen — kontinuierlich beschrieben werden. In der Quantenmechanik geschieht dies diskret über die Betrachtung von sogenannten Quantenzuständen (vgl. [VK]). Durch Mittelungsprozesse — wie sie später noch beschrieben werden — gelangt man zur Energie auf dem makroskopischen Level, wie sie im Rahmen der Kontinuumsmechanik und der Thermodynamik eingeführt wurde.
Im folgenden sollen nur Teilchensysteme betrachtet werden, die sich aus einer einzigen Teilchensorte zusammensetzen, d.h. alle Teilchen haben die gleiche chemische Struktur und den gleichen Zustand der inneren Freiheitsgrade. Dies entspricht chemischem und thermischem Gleichgewicht. Eine Verallgemeinerung auf verschiedene Teilchensorten, und somit die Beschreibung von chemischem und thermischem Nichtgleichgewicht, kann man z.B. in [HCB], [VK] nachlesen.
Es wird nun angenommen, daß die relative Position der einzelnen Teilchen keine Rolle spielt. Somit kann das Teilchensystem als eine Punktwolke im Phasenraum, der durch den Ortsvektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und den Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, C_3)^T$ aufgespannt wird, betrachtet werden. Diese kann durch eine kontinuierliche (Einteilchen-)Verteilungsfunktion $f = f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{C})$ approximiert werden, d.h. f gibt die mittlere Zahl $\mathrm{d}N$ der Teilchen in einem infinitesimalen Volumenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{C} := \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}C_1\,\mathrm{d}C_2\,\mathrm{d}C_3$ des Phasenraums an, kurz:

$$f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{C}) := \lim_{\Delta\boldsymbol{x}\,\Delta\boldsymbol{C}\to 0} \frac{\Delta N}{\Delta\boldsymbol{x}\,\Delta\boldsymbol{C}}. \tag{5.3.1}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{d}N = f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{C})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{C} \quad \text{bzw.} \quad N = \int f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{C})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{C}. \tag{5.3.2}$$

Normiert man f bezüglich der Teilchenzahl, so kann man f interpretieren als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen im Phasenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{C}$ liegt.

Man ist nun daran interessiert, die Veränderung von f entlang einer Teilchenbahn $\boldsymbol{z}^*(t) = (t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{C}(t))^T$ zu beschreiben. Letztere ist definiert durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{z}^*(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{C}(t) \\ \boldsymbol{X}(t)/m \end{pmatrix} \tag{5.3.3}$$

(vgl. (2.1.5)), wobei $\boldsymbol{X}$ die äußere Kraft ist, die auf ein Teilchen einwirkt und m die Masse des Teilchens. Der Quotient aus Kraft und Masse entspricht der Beschleunigung. Die (zeitliche) Änderung von f entlang der Trajektorie $\boldsymbol{z}^*$ ist somit gegeben durch

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} := \frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{z}^*(t))}{\mathrm{d}t} = f_{,t} + \boldsymbol{C}\,\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}}\, f + \frac{\boldsymbol{X}}{m}\,\mathbf{grad}_{\boldsymbol{C}}\, f \tag{5.3.4}$$

(vgl. (2.1.6)). Diese beruht auf dem Transport der Teilchen und den Kräften, die von außen auf diese einwirken. Die Änderungsrate hängt aber zusätzlich von den Kollisionen zwischen den einzelnen Teilchen ab, die durch den Term $J(f)$ beschrieben werden. Die Bilanz dieser Änderungsrate ist durch die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{C}\,\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}}\, f + \frac{1}{m}\boldsymbol{X}\,\mathbf{grad}_{\boldsymbol{C}}\, f = J(f) \tag{5.3.5}$$

gegeben. Diese wird in der Literatur als Boltzmann-Gleichung bezeichnet.
Die Herleitung des sogenannten Kollisionsterms J ist sehr aufwendig und hängt von dem zugrundeliegenden Modell ab. Für den Gleichgewichtsfall führen Vincenti und Kruger (siehe [VK], Kap. II) die Geschwindigkeitsklasse $\boldsymbol{C}_i$ ein, d.h. in dieser Klasse liegen alle Teilchen mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{C}_i$ vor. Durch Kollisionen zwischen Elementen der unterschiedlichen Klassen können diese durch Änderung der Geschwindigkeit in andere Klassen gelangen. Dieser Prozeß kann für Moleküle, die als Billiardkugeln modelliert werden, durch eine ideale Reflexion beschrieben werden. Über alle möglichen Klassen muß summiert werden. Da die Anzahl der Teilchen als hinreichend groß vorausgesetzt ist, geht die Summation in ein Integral über. Im Nichtgleichgewichtsfall (vgl. [HCB]) werden keine Geschwindigkeitsklassen eingeführt, sondern unterschiedliche Teilchensorten, in denen Teilchen der gleichen chemischen Spezies und dem gleichen Zustand der inneren Freiheitsgrade zusammengefaßt sind. Für jede Teilchensorte i wird dann eine eigene Verteilungsfunktion f_i eingeführt, die durch eine eigene Boltzmann-Gleichung beschrieben ist. Diese sind über die Kollisionsterme $J_i = \sum_{j\neq i} J_i(f_i, f_j)$ gekoppelt. $J_i(f_i, f_j)$ gibt dabei die Rate an, mit der Teilchen der Sorte j aus Teilchen der Sorte i durch Kollision hervorgehen.
Die Lösung von (5.3.5) ist nur für den Gleichgewichtsfall explizit bekannt. Aus der Gleichgewichtsannahme folgt, daß sich die Verteilungsfunktion f entlang der Trajektorie nicht ändert, also

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = J. \tag{5.3.6}$$

Dies führt auf eine algebraische Gleichung, die explizit gelöst werden kann:

$$f^*(\boldsymbol{C}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m}{2kT}\boldsymbol{C}^2\right], \tag{5.3.7}$$

wobei k die Boltzmann-Konstante ist und T die Temperatur (vgl. [VK], S. 35 ff.). Diese Verteilung wird als Maxwell-Verteilung bezeichnet, da sie erstmalig von Maxwell 1860 publiziert wurde.

Für den Nichtgleichgewichtsfall existiert bis heute keine explizite Darstellung. Es existieren jedoch Approximationen, die auf einer asymptotischen Entwicklung der Verteilungsfunktion f bezüglich der Kollisionsfrequenz $1/\zeta$

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} f^{[j]} \zeta^j \tag{5.3.8}$$

beruhen. Im Gleichgewicht ist die Anzahl der Kollisionen sehr groß, d.h. $1/\zeta \gg 0$ beziehungsweise $\zeta \ll 1$, und somit gilt für $\zeta \to 0$:

$$f^{[0]} = f^* \tag{5.3.9}$$

(vgl. [HCB], [VK]).
Man beachte, daß die Verteilungsfunktion ein allgemeines statistisches Modell ist, das auf beliebige Strömungsprozesse, wie sie zum Beispiel in Fluiden oder aber bei Vorgängen im Straßenverkehr auftreten, anwendbar ist.
Im folgenden soll nun beschrieben werden, wie aus der Boltzmann-Gleichung (5.3.5) die makroskopischen Strömungsgleichungen abgeleitet werden können. Dazu wird eine beliebige Teilcheneigenschaft ψ mit der Verteilungsfunktion f multipliziert und über den Geschwindigkeitsraum integriert:

$$\overline{\psi} := \int \psi f \, \mathrm{d}C_1 \, \mathrm{d}C_2 \, \mathrm{d}C_3. \tag{5.3.10}$$

Die Größe $\overline{\psi}$ wird als Moment der Verteilungsfunktion bezeichnet. Sie beschreibt den kontinuumsmechanisch beobachtbaren Mittelwert der Teilcheneigenschaft ψ. Einige wichtige Momente der Verteilungsfunktion und damit gebildete Größen seien im folgenden angegeben:

- Teilchendichte:
$$n = \int f \, \mathrm{d}C_1 \, \mathrm{d}C_2 \, \mathrm{d}C_3 \tag{5.3.11}$$

- Gesamtdichte:
$$\rho = mn \tag{5.3.12}$$

- Schwerpunktsgeschwindigkeit:
$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{n} \int \boldsymbol{C} f \, \mathrm{d}C_1 \, \mathrm{d}C_2 \, \mathrm{d}C_3 \tag{5.3.13}$$

- Relativgeschwindigkeit eines Teilchens (thermische Geschwindigkeit):
$$\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{V} \tag{5.3.14}$$

- Innere Translationsenergie:
$$e^{\mathrm{tr}} = \frac{1}{n} \int \frac{1}{2} (\boldsymbol{C}')^2 f \, \mathrm{d}C_1 \, \mathrm{d}C_2 \, \mathrm{d}C_3 = \frac{1}{2} \overline{(\boldsymbol{C}')^2}. \tag{5.3.15}$$

Die Änderung der Teilcheneigenschaft ψ wird durch das sogenannte Moment der Evolutionsgleichung beschrieben:

$$\int \psi \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}C_1\,\mathrm{d}C_2\,\mathrm{d}C_3 = \int \psi J\,\mathrm{d}C_1\,\mathrm{d}C_2\,\mathrm{d}C_3. \tag{5.3.16}$$

Nimmt man nun an, daß die Teilcheneigenschaften ψ unabhängig von Ort und Zeit sind, so erhält man aus (5.3.16) mit (5.3.10):

$$\frac{\partial(n\overline{\psi})}{\partial t} + \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(n\overline{\psi \boldsymbol{C}}) = \int \psi J\,\mathrm{d}C_1\,\mathrm{d}C_2\,\mathrm{d}C_3, \tag{5.3.17}$$

wobei externe Kräfte vernachlässigt werden. Der Ausdruck $n\overline{\psi \boldsymbol{C}}$ gibt den Mittelwert des Flusses der Teilcheneigenschaft ψ an. Dieser kann in einen sichtbaren Anteil und einen molekularen Anteil aufgespalten werden:

$$n\overline{\psi \boldsymbol{C}} = n\boldsymbol{V}\overline{\psi} + n\psi\overline{\boldsymbol{C}'}. \tag{5.3.18}$$

Es sollen nun einige spezielle Momente der Evolutionsgleichung angegeben werden. Für $\psi \equiv 1$ ergibt sich die Gleichung für die Teilchenzahl

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\boldsymbol{V} = \int J\,\mathrm{d}C_1\,\mathrm{d}C_2\,\mathrm{d}C_3. \tag{5.3.19}$$

Da hier nur Teilchen einer Sorte betrachtet werden, die aufgrund von Kollisionen auch ihre Struktur nicht ändern dürfen, bleibt deren Anzahl konstant und somit verschwindet das Integral. Multipliziert man diese Gleichung mit der Masse m, so erhält man mit (5.3.12) die Erhaltungsgleichung für die Dichte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\boldsymbol{V} = 0. \tag{5.3.20}$$

Zur Herleitung der Impulsgleichung wird $\psi = m\boldsymbol{C}$ gesetzt:

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T) + \operatorname{div}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0} \tag{5.3.21}$$

mit

$$\boldsymbol{P} := \int \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T m f\,\mathrm{d}C_1\,\mathrm{d}C_2\,\mathrm{d}C_3 = \rho\overline{\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}')^T}. \tag{5.3.22}$$

Das resultierende Integral der Kollisionsterme muß wiederum verschwinden, da der Impuls eine Erhaltungsgröße ist. Der Spannungstensor $\boldsymbol{P}$ wird im allgemeinen aufgespalten in den hydrostatischen Druck p und einen Differenzterm $\boldsymbol{\tau}_v$, der im wesentlichen die Schubspannung enthält. Liegt die Geschwindigkeitsverteilung im Gleichgewicht vor, so verschwindet $\boldsymbol{\tau}_v$ ([VK], S. 344).
Zur Ableitung einer Bilanzgleichung für die gesamte innere Energie betrachtet man $\psi = \frac{1}{2}m\boldsymbol{C}^2 + \epsilon^{\mathrm{int}}$, wobei ϵ^{int} die gesamte teilcheninterne Energie ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \operatorname{div}(\rho E\boldsymbol{V}) + \operatorname{div}\boldsymbol{q} + \operatorname{div}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}) = 0. \tag{5.3.23}$$

Die totale spezifische Energie ergibt sich hier zu

$$\begin{aligned} \rho E &= \int \frac{1}{2} m \left((\boldsymbol{C}')^2 + 2\boldsymbol{C}'\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^2 \right) f \, \mathrm{d}C_1 \, \mathrm{d}C_2 \, \mathrm{d}C_3 \\ &= \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{V}^2 + \rho \left[e^{\mathrm{tr}} + e^{\mathrm{int}} \right]. \end{aligned} \tag{5.3.24}$$

Sie setzt sich demzufolge aus den inneren Energien $\rho \left[e^{\mathrm{tr}} + e^{\mathrm{int}} \right]$ und der sichtbaren kinetischen Energie $\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{V}^2$ zusammen.
Der Vektor $\boldsymbol{q}$ wird als Wärmeleitungsvektor bezeichnet:

$$\boldsymbol{q} = n \overline{\left(\frac{1}{2} m (\boldsymbol{C}')^2 + \epsilon^{\mathrm{int}} \right) \boldsymbol{C}'} = n \overline{\frac{1}{2} m (\boldsymbol{C}')^2 \boldsymbol{C}'}. \tag{5.3.25}$$

Wie schon in der Impulsgleichung verschwindet der molekulare Transport bei einer Gleichgewichtsverteilung. Man sieht nun, daß die Gleichungen (5.3.20)–(5.3.25) mit den kontinuumsmechanischen Gleichungen (2.3.1) korrespondieren.

5.4 Hilfsmittel

Im folgenden sollen einige Sätze und Definitionen aufgeführt werden, die nicht unmittelbar mit dem hier behandelten Thema zu tun haben. Sie gehen aber in einigen Beweisen als grundlegende Techniken ein.

Definition 5.1 *Sobolevsche Mittelungsfunktion (vgl. [So1])*

Unter der Sobolevschen Mittelungsfunktion f^h, $h > 0$, einer Funktion $f : \mathrm{I\!R}^n \to \mathrm{I\!R}$, $n \in \mathrm{I\!N}$, versteht man die Faltung

$$f^h(\mathbf{x}) = \int_{\mathrm{I\!R}^n} f(\mathbf{x} - h\mathbf{y})\, \omega(h, \mathbf{y})\, dy_1 \dots dy_n$$

mit dem Kern

$$\omega(h, \mathbf{x}) = \begin{cases} c\, \exp\left(-\frac{1}{1-(r/h)^2}\right) & , \quad r := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} < h \\ 0 & , \quad r \geq h \end{cases}$$

wobei die Konstante c so gewählt ist, daß gilt:

$$\int_{\mathrm{I\!R}^n} \omega(h, \mathbf{x})\, dx_1 \dots dx_n = 1.$$

Definition 5.2 *Schwache Ableitung* **l***–ter Ordnung*

Sei $\varphi \in L^1(G, \mathrm{I\!R}), G := [0, T] \times \mathrm{I\!R},\ T > 0$. Existiert eine Funktion $\chi \in L^1(G, \mathrm{I\!R})$, so daß

$$\int_G \left(\frac{\partial^{|\mathbf{l}|}\phi}{\partial^{l_1} x \partial^{l_2} t} \varphi \right)^2 dxdt = (-1)^{|\mathbf{l}|} \int_G \phi\, \chi\, dxdt$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^{\mathbf{l}}(G, \mathrm{I\!R})$, dann heißt χ schwache Ableitung **l**–ter Ordnung der Funktion φ.

Satz 5.1 *Existenzsatz von Sobolev (vgl. [So1], S. 43)*

Vor.: (a) $G := [0, T] \times \mathrm{I\!R},\ T > 0$;

(b) $\varphi \in L^1(G, \mathrm{I\!R}),\ \varphi_k : G \to \mathrm{I\!R},\ k \in \mathrm{I\!N}$;

(c) φ_k konvergiere schwach gegen φ, d. h.:

$$\lim_{k\to\infty} \int_G \varphi_k\, \phi dxdt = \int_G \varphi\, \phi dxdt \quad \forall \phi \in C_0^0(G, \mathrm{I\!R});$$

(d) φ_k besitze gleichmäßig beschränkte Ableitungen **l**–ter Ordnung in $L^2(G, \mathrm{I\!R})$ für $\mathbf{l} = (l_1, l_2) \in \mathrm{I\!N}_0^2$, d. h.:

$$\int_G \left(\frac{\partial^{|\mathbf{l}|}\varphi_k}{\partial^{l_1} x \partial^{l_2} t} \right)^2 dxdt < M < \infty \qquad \forall k\ .$$

Beh.: φ besitzt die schwache Ableitung $\mathbf{l}$–ter Ordnung $\mathbf{l} = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}_0^2$ mit

$$\frac{\partial^{|\mathbf{l}|}\varphi_k}{\partial^{l_1}x\partial^{l_2}t} \in L^2(G, \mathbb{R}).$$

Satz 5.2 *Wärmeleitungsgleichung (vgl. [So2], S. 145 ff)*

Vor.: (a) $u_{,t}(t, \boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{d} u_{,x_i,x_i}(t, \boldsymbol{x}) = f(t, \boldsymbol{x}),\ t > 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ d \in \mathbb{N};$

(b) $u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d;$

(c) u_0 und f liegen in bestimmten Sobolev–Räumen.

Beh.: Es existiert eine zweimal stetig differenzierbare Lösung u der obigen Wärmeleitungsgleichung die für $t \to 0^+$ stetig auf die Anfangsdaten fortgesetzt werden kann und folgende Darstellung hat:

$$\begin{aligned} &u(t, \boldsymbol{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} G(t, \boldsymbol{x}, 0, \boldsymbol{y})\, u_0(\boldsymbol{y})\, dy_1 \ldots dy_d + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t, \boldsymbol{x}, \tau, \boldsymbol{y})\, f(\tau, \boldsymbol{y})\, dy_1 \ldots dy_d d\tau \end{aligned}$$

mit dem Kern

$$G(t, \boldsymbol{x}, \tau, \boldsymbol{y}) = (4\pi(t-\tau))^{-d/2} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Literatur

[Alt] H.W. Alt
„Lineare Funktionalanalysis"
Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage

[B] J. Ballmann
„Introduction to Gasdynamics"
Hypersonic Short Course, 1991, Aachen

[Ba] H. D. Baehr
„Thermodynamik"
Springer – Verlag, 6. Auflage, 1988

[Br] T. Bröcker
„Analysis in mehreren Veränderlichen"
Teubner Studienbücher Mathematik, B. G. Teubner Stuttgart, 1980

[CH] R. Courant, D. Hilbert
„Methoden der mathematischen Physik, I, II"
Springer, Berlin, 1937

[CM] A. J. Chorin, J. E. Marsden
„A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics"
Springer – Verlag, 1979

[CrMa] M. Crandall, A. Majda
„Monotone difference approximations for scalar conservation laws"
Math. Comp. **34**(1980), S. 83–110

[D] R. J. DiPerna
„Convergence of Approximate Solutions to Conservation Laws"
Arch. Rational Mech. Anal., **82** (1983), No. 1, S. 27-70

[FM] A. Fisher, D. P. Marsden
„The Einstein Evolution Equations as a First Order Quasi – Linear Symmetric Hyperbolic System"
Comm. Math. Phys. **28** (1972)

[G] S. K. Godunov
„A Finite Difference Method for the Numerical Computation and Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics"
Mat. Sb., **47** (1959), S. 271-295

[H83] A. Harten
„High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws"
JCP, **49** (1983), S. 375 ff.

[H84] A. Harten
„On a class of High–Resolution Total–Variation Stable Finite Difference Schemes"
SIAM J. Num. Anal., **21** (1984)

[HCB] J.O. Hirschfelder, Ch.F. Curtiss, R.B. Bird
„Molecular Theory of Gases and Liquids“
Wiley 1965

[HHL] A. Harten, J. M. Hyman, P. D. Lax
„On finite–difference approximations and entropy conditions for shocks“
Communications on Pure and Applied Math., **29** (1976), S. 297-322,

[HLL] A. Harten, P.D. Lax, B. van Leer
„On upstream differencing and Godunov – type schemes for hyperbolic conservation laws“
SIAM Review, **25** (1983), S. 35-61

[J] L. Jantscher
„Distributionen“
De Gruyter, Berlin, 1971

[Kr] S.N. Kruzkov
„First order quasilinear equations in several independent variables“
Math. USSR Sb., **10**(1970), S. 217–243

[Ku] N.N. Kusnetzov
„Accuracy of some approximate methods for computing the weak solution of first-order quasi-linear equations“
USSR Comput. Math. and Math. Phys., **16**, no. **6**(1976), S. 105–119

[L] R. J. LeVeque
„Numerical Methods for Conservation Laws“
Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, 1990

[LaFr] M. Lagally, W. Franz
„Vorlesung über Vektorrechnung“
Akad. Verlagsgesellschaft, Geest le Portig KG, Leipzig, 1989

[La1] P. D. Lax
„Asymptotic Solutions of Oscillatory Initial Value Problems“
Duke Math. J., **24** (1957), S. 627-646

[La2] P. D. Lax
„A Concept of Entropy“
Proc. Wisconsin Conference (1971), ed. E. Zarantonello

[LF] P. D. Lax, K. O. Friedrichs
„Systems of Conservation Equations with Convex Extensions“
Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 68, No. 8, S. 1686-1688, August 1971

[LW] P. D. Lax, B. Wendroff
„Systems of conservation laws“
Comm. Pure Appl. Math., **13** (1960)

[MR] I. Müller, T. Ruggeri
„Extended Thermodynamics“
Springer Tracts in Natural Philosophy, **37** (1983), Springer – Verlag

[M] F. Murat
„Compacité par compensation“
Ann. scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. (IV), **5** (1978)

[N] I. P. Natanson
„Theorie der Funktionen einer Veränderlichen“
Verlag Harri Deutsch, 1975

[NS] T. Nishida, J. Smoller
„A Class of Convergent Finite Difference Schemes for Certain Nonlinear Parabolic Systems“
Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), S. 785-808

[O] O. A. Oleinik
„Discontinuous solutions of nonlinear differential equations“
Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **26** (1957), S. 95-172

[PT] R. Peyret, Th.D. Taylor
„Computational Methods for Fluid Flow“
Springer – Verlag, 1983

[S] J. Smoller
„Shock Waves and Reaction – Diffusion Equations“
Springer – Verlag, 1992

[Sa] R. Sanders
„On convergence of monotone finite difference schemes with variable spatial differencing laws“ Math. Comp., **40** (1983), S. 91–106

[Sch] M. Schulte
„An adptive algorithm for solving hyperbolic conservation laws in one and two spatial dimensions“
Dissertation, Freie Universität Berlin, 1992

[So] G.A. Sod
„Numerical Methods in Fluid Dynamics“
Cambridge University Press, 1985

[So1] S. I. Sobolev
„Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik“
Akademie – Verlag Berlin, 1964

[So2] S. I. Sobolev
„Partial Differential Equations of Mathematical Physics“
Pergamon Press, 1964

[Sw] L. Schwartz
„Théorie des distributions I, II“
Hermann, Paris, 1950/51

[T] L. Tartar
„Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations“
in: Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot–Watt Symposium, Vol. 4, R. J. Knops (ed.), Pitman Press, 1979, S. 136-212

[Tr] H. Triebel
„Höhere Analysis“
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972

[VK] W.G. Vincenti, Ch.H. Kruger
„Introduction to Physical Gas Dynamics“
Wiley, 1965

[Y] H. C. Yee
„A class of High–Resolution Explicit and Implicit Shock–Capturing Methods“
VKI – Lecture Series 04 - 1989