Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
Höhere Mathematik IV (für Elektrotechniker und
Technische Informatiker) - Numerik - SS 2007
Dr. S. Börm , Dr. M. Larin

Banach'scher Fixpunktsatz

Gegeben seien eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion: $f : D \to \mathbb{R}^n$, eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, und es sei

1) D ist abgeschlossen und konvex;

2) f ist selbstabbildend, d.h. $f(D) \subset D$;

3) f ist kontrahierend, d.h. es ex. ein $L \in (0,1)$, so daß

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in D;$$

Dann gilt:

a) f besitzt auf D genau einen Fixpunkt $x_* = f(x_*)$;

b) für jedes $x_0 \in D$ konvergiert die durch die

Fixpunktiteration $\quad x_{k+1} = f(x_k)$

definierte Folge $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ gegen x_*;

c) für jedes $n \in N$ gelten die Abschätzungen

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_k - x_{k-1}\| \quad \text{(a-posteriori)}$$

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\| \quad \text{(a-priori)}$$

Banach'scher Fixpunktsatz

Hilfssatz. Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann wegen Mittelwertsatz gilt:

$$\sup_{(x,y)\in D} \|f'(x,y)\| \leq L < 1$$

$$\Rightarrow f(x,y) \text{ ist kontrahierend.}$$

Hier ist $\|f'(x)\|$ die der Vektor-Norm zugeordnete Matrix-Norm der Jacobi-Matrix $f'(x,y)$.

Trick. Ein Fixpunkt von f ist gleichzeitig ein Fixpunkt der inversen Funktion f^{-1}, d.h.

$$x_* = f(x_*) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x_*) = x_*.$$

Wenn f auf D z.B. keine Selbstabbildung ist, kann man die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes für die inverse Funktion überprüfen.

Lineare Ausgleichsrechnung

Aufgabe 1

Die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ sollen so gewählt werden, dass die Messwerte

i	1	2	3
x_i	1	2	3
f_i	20	-14	2

im Sinne kleinster Fehlerquadrate durch die theoretische Modellfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha(-10x^2 + 48x - 48) \\ &+ \beta(-10x^2 + 45x - 30) \end{aligned}$$

optimal approximiert werden.

- Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem.
- Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens-Rotationen. Wie groß ist das Residuum?

Lineare Ausgleichsrechnung

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- Lösen Sie das Ausgleichsproblem mittels Householder-Spiegelungen.
- Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens-Rotationen.
- Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Normalgleichungen.
- Berechnen Sie die Norm des Residuums.

Lineare Ausgleichsrechnung

Aufgabe 3

Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und $\tilde{b} = b + \Delta b = \begin{pmatrix} 0.0101 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Lösen Sie die Ausgleichsprobleme.

b) Berechnen Sie $\kappa_2(A)$ und $\cos\Theta$.

c) Zeigen Sie, daß in diesem Beispiel

$$\frac{\|x^* - \tilde{x}\|_2}{\|x^*\|_2} \approx \frac{\kappa_2(A)}{\cos\Theta} \frac{\|b - \tilde{b}\|_2}{\|b\|_2} \gg \kappa_2(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|_2}{\|b\|_2}$$

gilt.

a) Die Matrix A befindet sich bereits in unterer Dreiecksgestalt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher lassen sich die Lösungen

$$x^* = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}$$

von $\| Ax^* - b \|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \| Ax - b \|_2$

und

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0.0101 \\ -0.0101 \end{pmatrix}$$

von $\| A\tilde{x} - \tilde{b} \|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \| Ax - \tilde{b} \|_2$

direkt ablesen.

b) Das charakteristische Polynom von

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist $\det(\lambda I - A^T A) = \lambda^2 - 3\lambda + 1.$
Da es genau die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

hat, ist

$$\kappa_2(A^T A) = \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$$

und

$$\kappa_2(A) = \sqrt{\kappa_2(A^T A)} \doteq 2.61803.$$

Die Matrix A ist gut konditioniert.
Weiter ist

$$\cos\theta = \frac{\|Ax^*\|_2}{\|b\|_2} \doteq \frac{0.01}{1.00005} = 0.0099995.$$

c) Es ist

$$\frac{\| x^* - \tilde{x} \|_2}{\| x^* \|_2} \doteq \frac{0.000141421}{0.0141421} = 10^{-2},$$

aber

$$\frac{\|b - \tilde{b}\|_2}{\|b\|_2} \doteq \frac{0.0001}{1.00005} \approx 10^{-4},$$

d.h., daß die relative Störung in b um etwa den Faktor 100 verstärkt wird, obwohl A gut konditioniert ist. Entscheidend für die Fehlerverstärkung ist der Quotient

$$\frac{\kappa_2(A)}{\cos\theta} = \frac{2.61803}{0.0099995} \doteq 261.816,$$

der deutlich größer als die Kondition von A ist.

Banach'scher Fixpunktsatz

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$.

- Zeigen Sie, daß f im Intervall $[2, 3]$ und im Intervall $[6, 7]$ jeweils einen Fixpunkt besitzt.
- Welche Iterationsvorschrift ist zur Berechnung des zweiten Fixpunktes geeignet?
- Wieviele Schritte, ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$, sind laut a-priori-Abschätzung höchstens nötig, um den ersten Fixpunkt mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$ zu approximieren?

Banach'scher Fixpunktsatz

Aufgabe 5

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + \frac{3}{4}) \\ y = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

in $D = \{(x, y) : \ |x|, |y| \leq \frac{1}{2}\}$.

Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, daß dieses Gleichungssystem auf D genau eine Lösung besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie für den Kontraktivitätsbeweis die 2-Norm.

1) Eine Lösung des Gleichungssystems ist ein Fixpunkt der Funktion $F(x,y)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{wobei}$$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x^2 - y^2 + \frac{3}{4} \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes:

1) D ist **abgeschlossen** und **konvex**.

2) F ist **selbstabbildend**, da für $|x|, |y| \le \frac{1}{2}$ gilt

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}) \le \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + \frac{3}{4}) \le \frac{1}{2}(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}) = \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot(-1) \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) \le \frac{1}{2}(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1) = -\frac{1}{4},$$

$$\Rightarrow F(D) \subset D.$$

3) **Kontraktivität** von F.
Wegen Mittelwertsatz

$$L := \sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\| < 1.$$

Wir haben

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Anwendung der l_∞- oder l_1-Norm von F' hilft aber nicht:

$$\sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\|_\infty = 1,$$

$$\sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\|_1 = 1.$$

Wir schätzen die l_2-Norm ab:

$$\|F'(x,y)\|_2^2 := \lambda_{\max}(F'^{*}\,F').$$

Es gilt

$$F'^{*}\,F' = \begin{pmatrix} 2x^2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{pmatrix},$$

und

$$\det(F'^{*}\,F' - \lambda I) = (2x^2 - \lambda)(2y^2 - \lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} = 2\max\left(x^2, y^2\right) \le \tfrac{1}{2},$$

d.h.

$$\max_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\|_2 = \frac{1}{2} =: L < 1$$

4) Nach dem B. Fixpunktsatz folgt, daß F auf D genau einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 6

- ☐ Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig.
  Dann hat f einen Fixpunkt in $[0,1]$.
- ☐ Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $F : D \to \mathbb{R}^n$. Gilt $F(D) \not\subseteq D$, so besitzt F keinen Fixpunkt in D.
- ☐ Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $F : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x_0 \in D$. Existiert ein $r > 0$ mit $\left|F'(x)\right| > 1$ für alle $x \in B_r(x_0) \subset D$, so ist x_0 kein Fixpunkt von F.
- ☐ Es seien I ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to I$ eine stetige Selbstabbildung, die genau einen Fixpunkt $x^* \in I$ hat. Dann existiert eine ϵ-Umgebung U_ϵ von x^*, so daß für jedes $x_0 \in U_\epsilon$ die Banach'sche Iterationsfolge $x_{k+1} = f(x_k)$ gegen x^* konvergiert.