

Seminar zur Numerischen Analysis
im Wintersemester 2008/2009

Signalverarbeitung und Wavelets

Abtasten analoger Signale und diskrete zeitinvariante Filter

Annabel Prause

31.10.2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Einleitung	2
1.2	Signalverarbeitung, digitale und analoge Signale	2
2	Abtasten analoger Signale	3
2.1	Das Whittaker-Abtast-Theorem	3
2.2	Aliasing	6
2.3	Generelle Abtast-Theoreme	12
3	Diskrete zeitinvariante Filter	15
3.1	Impulsantwort und Übertragungsfunktion	15
4	Anhang	19

1 Einführung

Diese Ausarbeitung beruht auf Kapitel 3, Abschnitte 1 und 2 aus dem Buch, *A wavelet tour of signal processing* [11] von Stéphane Mallat.

1.1 Einleitung

Der Schwerpunkt dieser Ausarbeitung wird auf der für die digitale Signalverarbeitung sehr wichtige Abtasttheorie beruhen. Diese Theorie fasst mehrere Verfahren, sowie die dazugehörigen notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen zusammen, ein Signal aus einer Folge von gemessenen Werten, den sogenannten Abtastungen, exakt, also ohne Informationsverlust, zu rekonstruieren. Daran anschließend wird gezeigt, was passiert, wenn einige dieser notwendigen Bedingungen verletzt werden. Dies führt zum sogenannten Aliasing (Begriffserklärung siehe unten). Zum Abschluss wird dann noch eine kurze Einführung in diskrete zeitinvariante Filter gegeben, die eine wichtige Grundlage für Algorithmen der Signalverarbeitung darstellen. Wichtige Begriffe und Formeln sind im Anhang nochmals kurz zusammengefasst.

1.2 Signalverarbeitung, digitale und analoge Signale

Die Signalverarbeitung ist ein Teilgebiet der Systemtheorie und kennzeichnet sich vor allem dadurch, dass sie sehr anwendungsorientiert ist. Der Schwerpunkt liegt, wie der Name schon vermuten lässt, auf möglichen Bearbeitungsweisen von Signalen sowie deren Charakteristiken. Signale, beispielsweise Radiowellen oder Laserstrahlen, dienen dem Informationsaustausch zwischen einem Sender und einem Empfänger. Somit gehören sowohl die Informationsgewinnung und -übertragung als auch deren exakte Rekonstruktion zu den Schwerpunkten der Fragestellungen in der Signalverarbeitung. [7]

Verallgemeinert versteht man unter einem Signal, z.B. in der Nachrichten- oder Messtechnik eine veränderliche, messbare elektrische Spannung, die man als Zeitfunktion interpretiert. Weiter verallgemeinert lassen sich auch andere beliebige physikalische Größen, die sich zeitlich oder räumlich verändern und sich in eine messbare elektrische Spannung als Zeitfunktion umformen lassen, zur Informationsübermittlung nutzen (vergleiche auch [8]). Beispiele hierfür können somit neben den o.g. Laserstrahlen Geräusche, Vibrationen oder auch Helligkeitsschwankungen sein. Ganz allgemein gesprochen ist ein Signal also eine Darstellung von Informationen und lässt sich beispielsweise durch den Werteverlauf einer physikalischen Größe über der Zeit kennzeichnen. Modelliert kann man sich dies als kontinuierliche Abbildung vorstellen, die jedem Zeitpunkt einen reellen Wert zuweist. Diese Abbildungen kann man natürlich auch auf höherdimensionalen Räumen definieren, was nötig wird, wenn man auch noch räumliche oder andere Aspekte mit einbeziehen möchte. Dies ist zum Beispiel bei der digitalen Bildverarbeitung der Fall. Die Funktion bzw. das Signal wäre hier die Abbildung, die jedem Bildpunkt (x, y) seine zugehörige Farbe zuweist. Dies ist (theoretisch) mit keinem merklich höheren Aufwand verbunden, da dieselben Prinzipien wie auch im eindimensionalen anwendbar sind. Sämtliche Theorien lassen sich bequem erweitern und übertragen.

Bei Signalen gibt es mehrere verschiedene, mögliche Klassifikationen. Eine der häufigsten und gebräuchlichsten stellt zunächst eine grobe Unterteilung in analoge und digitale Signale dar.

Ein Analogsignal kennzeichnet sich dadurch, dass es sowohl in der Zeit, als auch in der Amplitude kontinuierlich ist. Es ist somit sehr häufig in der Realität anzutreffen. Üblicherweise werden die Informationen durch wechselnde elektrische Spannung und Frequenz übermittelt. Der Vorteil des Analogsignals besteht darin, dass auch sehr kleine Abweichungen gemessen werden können. Weniger gut hingegen ist, dass Fehler solcher Art nicht wieder rückgängig zu machen sind. Dies stellt einen gravierenden Nachteil dar, da in der Praxis kein System störungsfrei ist. [3]

Eine Alternative hierfür bietet (erwartungsgemäß) das Digitalsignal an, das sowohl zeit- also auch wertdiskret ist. Dies geschieht dadurch, dass man zunächst alle Informationen codiert und anschließend die so erhaltene Ziffernfolge übermittelt. Das eben erwähnte Problem von Fehlern bei der Übertragung kann nun bis zu einem gewissen Grade vermieden werden, da die Codierungstheorie die Möglichkeit bietet, falsch übermittelte Bits entweder auszusortieren oder zu korrigieren. Erst

wenn diese Störungen zu stark sind, bricht dieses Verfahren zusammen, es ist noch nicht mal mehr eine ungefähre Wiedergabe möglich. [5]

Ausgelöst durch die digitale Revolution der 50er Jahre, hat die Nutzung digitaler Signale sehr stark zugenommen. So haben mittlerweile digitale Algorithmen die meisten traditionellen analogen Techniken ersetzt. Beispiele hierfür sind das Fernsehen, die Sprachverarbeitung, Tonaufnahmen und alle Arten der Informationsweiterverarbeitung. Auch wenn analoge Berechnungen oftmals schneller sind als vergleichbare digitale Algorithmen, werden diese vor allem immer dann durch letztere ersetzt, wenn die Rechenzeit für Anwendungen nicht allzu hoch ist, da digitale Algorithmen genauer und flexibler sind.

2 Abtasten analoger Signale

Egal ob es sich um Tonaufzeichnungen oder Bilder handelt, erhält man die meisten Signale als Diskretisierung analoger Signale. Die einfachste Möglichkeit ein analoges Signal zu diskretisieren, und somit die einfachste Möglichkeit ein analoges Ausgangssignal in ein Digitalsignal umzuwandeln, ist, das analoge Signal in festen Zeitintervallen T zu messen. Die zugehörige Frequenz $1/T$ wird auch als Samplingfrequenz oder Abtastrate bezeichnet. Man erhält Aussagen über diskrete Messpunkte, während ein genaueres Verhalten innerhalb dieser Intervalle nicht erfasst werden kann. Die so erhaltenen Werte $f(nT)$ können nun als Interpolationswerte genutzt werden, um $f(t)$ zu rekonstruieren. Bedingungen zur exakten Rekonstruktion liefert das im nächsten Abschnitt vorgestellte Abtasttheorem von Shannon und Whittaker.

2.1 Das Whittaker-Abtast-Theorem

Ein diskretes Signal kann als Summe von Dirac-Pulsen dargestellt werden. Dazu legt man zuerst ein Zeitintervall T mit $T \in \mathbb{R}$ fest. Anschließend wird jedem abgetasteten Wert $f(nT)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ein Dirac-Puls $f(nT)\delta(t - nT)$ mit Zentrum $t = nT$ zugeordnet. Ein gleichmäßiges Abtasten von f entspricht demnach der gewichteten Dirac-Summe

$$f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT). \quad (1)$$

Eine Visualisierung davon vermittelt Abbildung 1.

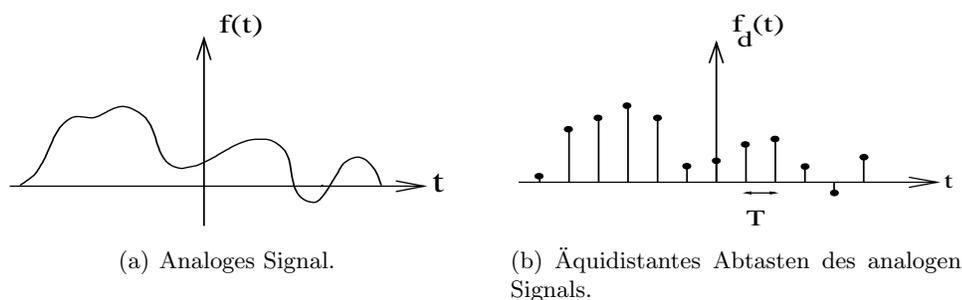


Abbildung 1: Veranschaulichung der Dirac-Summe.

Die Fourier-Transformation von $\delta(t - nT)$ ist nach Definition des Dirac-Pulses

$$\widehat{\delta}_{nT}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \exp(-i\omega t) dt = \exp(-inT\omega),$$

sodass man als Fourier-Transformation von f_d die Fourier-Reihe

$$\widehat{f}_d(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT) \exp(-i\omega t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \exp(-inT\omega)$$

erhält.

Um nun verstehen zu können, wie $f(t)$ aus den verschiedenen Abtastwerten $f(nT)$ und somit f aus f_d zurückgewonnen werden kann, werden die dazugehörigen Fourier-Transformationen \hat{f} und \hat{f}_d in Beziehung zueinander gesetzt. Details liefert der folgende Satz.

Satz 1. Die Fourier-Transformation der Funktion f_d , die man erhält, wenn man die Funktion f im Zeitraster T abtastet, ist

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right). \quad (2)$$

Auch hier soll eine Abbildung zunächst den Sachverhalt verdeutlichen, bevor obiges Resultat bewiesen wird (siehe Abbildung 2).

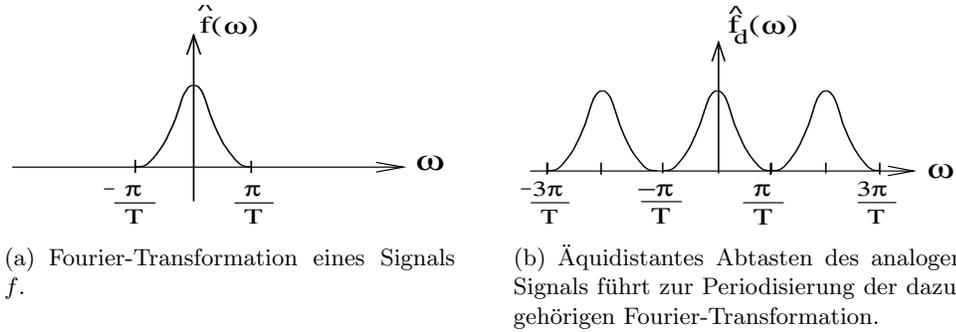


Abbildung 2: Veranschaulichung der Fourier-Transformation der Dirac-Summe.

Beweis. Da $\delta(t - nT)$ außerhalb von $t = nT$ gleich Null ist, gilt

$$f(nT)\delta(t - nT) = f(t)\delta(t - nT).$$

Somit lässt sich (1) als Multiplikation mit einem Dirac-Kamm, einer Summe aus translatierten Dirac-Pulsen, umschreiben:

$$f_d(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) =: f(t)c(t).$$

Berechnet man davon nun die Fourier-Transformation, erhält man unter Ausnutzung der multiplikativen Eigenschaft (b)

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} \star \hat{c})(\omega). \quad (3)$$

Die Poisson-Formel (12) beweist nun, dass

$$\begin{aligned} \hat{c}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-inT\omega) \stackrel{(12)}{=} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

gilt.

Da außerdem $(\hat{f} \star \delta)(\omega - \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s)\delta(\omega - \xi - s) ds = \hat{f}(\omega - \xi)$, ergibt sich nun die gewünschte Gleichung (2), indem man (4) in (3) einsetzt:

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} \star \hat{c})(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f} \star \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right).$$

□

Satz 1 beweist nun also, dass das Abtasten von f an verschiedenen Punkten T äquivalent dazu ist, die Fourier-Transformation mit $2\pi/T$ zu periodisieren, indem alle ihre Translationen um $\hat{f}(\omega - 2\pi k/T)$ aufsummiert werden. Aus dieser Tatsache folgt das sogenannte Abtast-Theorem, das erstmals 1935 von Whittaker bewiesen und 1949 von Shannon für Anwendungen in der Kommunikationstheorie wiederentdeckt wurde.

Bevor dieses Theorem jedoch vorgestellt und bewiesen wird, sei zunächst noch ein Hilfssatz aufgeführt, in dem die Fourier-Transformation einer für das Abtasttheorem wichtigen Funktion berechnet wird.

Hilfssatz 1. Die Fourier-Transformation von

$$h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

ist $\hat{h}_T = T \mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}$ (charakteristische Funktion).

Beweis.

$$\begin{aligned} \hat{h}_T(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_T(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \exp(-i\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \exp(-i\omega t) dt + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \exp(-i\omega t) dt. \end{aligned}$$

Nun substituiert man im ersten Integral $s = -t$ und erhält $-\int_{+\infty}^0 \frac{\sin(\pi s/T)}{\pi s/T} \exp(i\omega s) ds$, also insgesamt (nach erneuter Umbenennung von s in t und unter Berücksichtigung von $\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$):

$$\hat{h}_T(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \cos(\omega t) dt.$$

Unter Benutzung des Additionstheorems $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ mit $\alpha = (\frac{\pi}{T} + \omega)t$ und $\beta = (\frac{\pi}{T} - \omega)t$ lässt sich das Integral zu

$$\hat{h}_T(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi t/T} (\sin((\frac{\pi}{T} + \omega)t) + \sin((\frac{\pi}{T} - \omega)t)) dt$$

vereinfachen. Nun gilt weiterhin (vergleiche [9]), dass

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\mu x)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } \mu > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } \mu < 0. \end{cases}$$

Für das Integral folgt nun somit insgesamt:

$$\hat{h}_T(\omega) = \begin{cases} T/2 + T/2 = T, & \text{falls } |\omega| \leq \frac{\pi}{T}, \\ T/2 - T/2 = 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies beweist die obige Behauptung. □

Satz 2. (SHANNON, WHITTAKER) Falls der Träger von \hat{f} im Intervall $(-\pi/T, \pi/T)$ enthalten ist, dann gilt

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) h_T(t - nT) \quad (5)$$

mit

$$h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}.$$

Bevor nun der Satz bewiesen wird, sei zunächst noch eine etwas andere Interpretation des Satzes gegeben, wie sie in der Literatur häufig zu finden ist. Mit den Bezeichnungen $f_s = 1/T$ für die Abtastfrequenz und f_{max} bzw. ω_{max} für die maximal auftretende (Kreis-)Frequenz im Signal, ergibt sich aus der Voraussetzung des Satzes, dass $|\omega_{max}| < \pi/T$ gelten muss. Nutzt man nun aus, dass $\omega_{max} = 2\pi f_{max}$ gilt, erhält man $|2\pi f_{max}| < \pi f_s$ und somit $2|f_{max}| < f_s$. Dies bedeutet also, dass die Abtastfrequenz mindestens zweimal so groß wie die maximale Frequenz des Signals gewählt werden muss, um ein Signal aus seinen Abtastungen exakt zu rekonstruieren. Die halbe Abtastfrequenz wird auch als Nyquist-Frequenz bezeichnet. Genau genommen muss anstelle von f_{max} die Bandbreite stehen, die durch den Bereich zwischen niedrigster und höchster im Signal vorkommenden Frequenz definiert ist. Nur in Basisbandsignalen ist die Bandbreite mit f_{max} identisch; Basisbandsignale sind Signale mit niederfrequenten Anteilen in der Nähe von 0 Hz.

Beweis. Falls $n \neq 0$ ist, sind die Träger von $\hat{f}(\omega - 2n\pi/T)$ und $\hat{f}(\omega)$ disjunkt, da $\hat{f}(\omega) = 0$ für $|\omega| \geq \pi/T$ (siehe Abbildung 2). Die bereits bewiesene Gleichung (2), die Äquivalenz zwischen Abtasten eines Signals und $2\pi/T$ -Periodisierung ihrer Fourier Transformation, besagt nun, dass

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = \frac{\hat{f}(\omega)}{T}, \text{ falls } |\omega| < \frac{\pi}{T}, \quad (6)$$

denn wenn \hat{f} auf das Intervall $(-\pi/T, \pi/T)$ eingeschränkt wird, liefert die Summe aufgrund der Überlappungsfreiheit der Träger nur einen Beitrag für $k = 0$.

Die Fourier-Transformation von h_T ist laut Hilfssatz $\hat{h}_T = T\mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}$. Da laut Voraussetzung der Träger von \hat{f} im Intervall $(-\pi/T, \pi/T)$ enthalten ist, folgt aus (6) direkt $\hat{f}(\omega) = \hat{h}_T(\omega)\hat{f}_d(\omega)$. Hieraus ergibt sich

$$f(t) \stackrel{\text{Faltungssatz}}{=} (h_T \star f_d)(t) = h_T \star \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)h_T(t - nT),$$

da $(h_T \star \delta)(t - nT) = h_T(t - nT)$ und somit folgt die Behauptung. \square

Das Abtast-Theorem setzt voraus, dass der Träger von \hat{f} im Intervall $(-\pi/T, \pi/T)$ enthalten ist. Dies garantiert, dass f zwischen zwei aufeinanderfolgenden abgetasteten Werten keine allzu starken Variationen aufweist, da die Frequenz durch ein kleines Intervall begrenzt ist und somit durch eine glatte Interpolation exakt wiederhergestellt werden kann.

In einem später folgenden Abschnitt wird zudem gezeigt, dass man auch andere Glattheitsbedingungen verlangen kann, um f aus den einzelnen Abtastungen zu rekonstruieren. Zur Veranschaulichung dienen die folgenden Bilder (Abbildung 3); sie zeigen die einzelnen Schritte des Abtastens und Wiederherstellens eines Signals aus den abgetasteten Werten, sowohl in Abhängigkeit der Zeit, als auch der Frequenz.

2.2 Aliasing

Aufgrund von Rechenzeit oder Speichereinschränkungen des Computers kann das Abtast-Intervall T nicht beliebig klein gewählt werden. Daher ist der Träger von \hat{f} im Allgemeinen nicht im Intervall $(-\pi/T, \pi/T)$ enthalten und die Interpolationsformel (5) nicht anwendbar, um f zu rekonstruieren. Im Folgenden werden deshalb der daraus entstehende Fehler und eine Prozedur, um diesen zu verringern, analysiert.

Satz 1 beweist nun die folgende Gleichung

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right).$$

Nun wird angenommen, dass der Träger von \hat{f} auch außerhalb von $(-\pi/T, \pi/T)$ liegt und der Träger von $\hat{f}(\omega - \frac{2k\pi}{T})$ das Intervall $(-\pi/T, \pi/T)$ für einige $k \neq 0$ schneidet, wie auch Abbildung 4 zeigt.

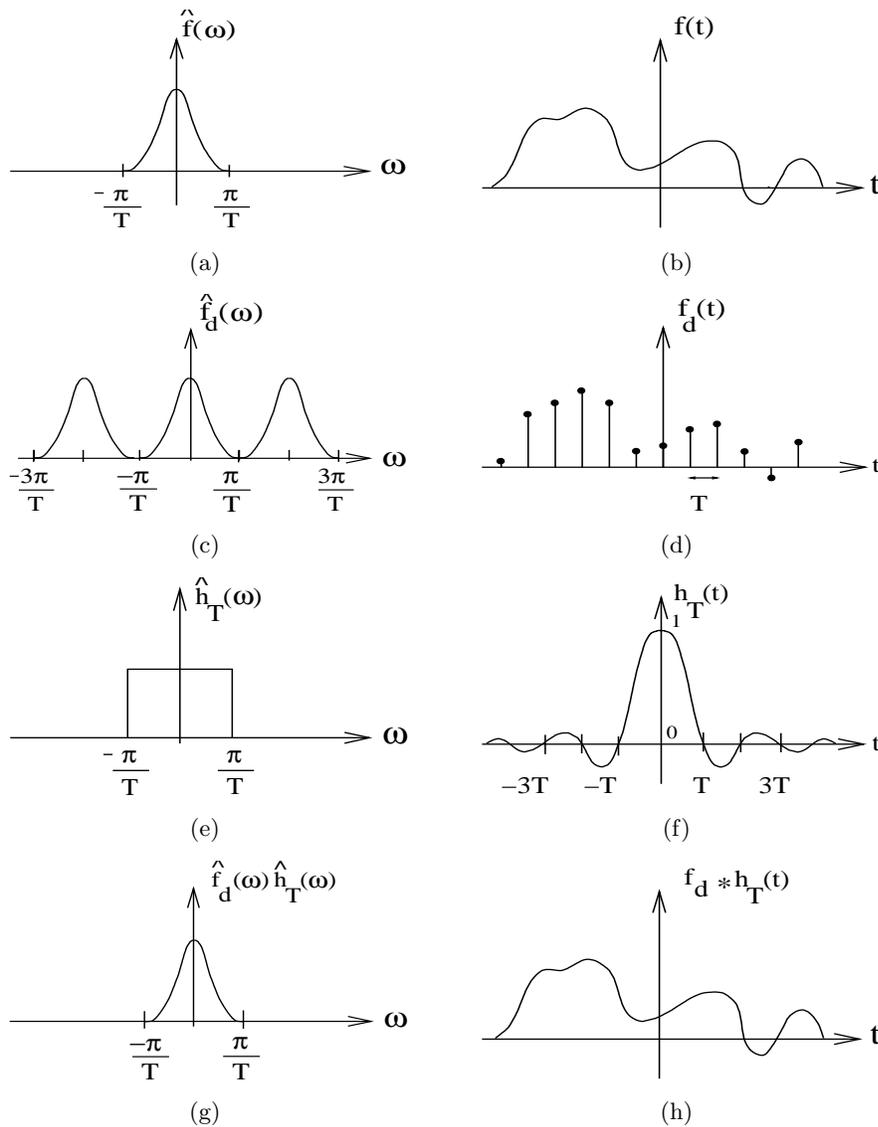
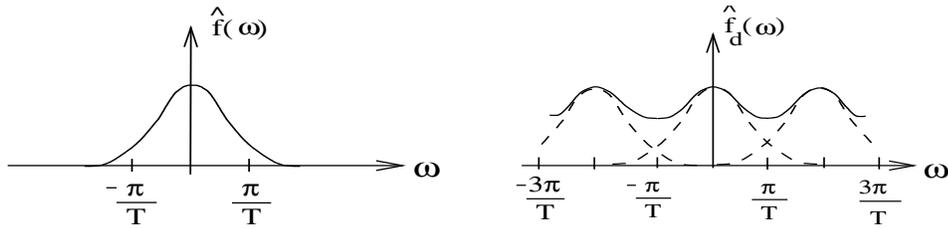


Abbildung 3: (a),(b): Signal f und seine Fourier-Transformation \hat{f} mit Frequenzbeschränkung. (c),(d): Ein äquidistantes Abtasten von f macht seine Fourier-Transformation periodisch. (e),(f): Idealer Tiefpass-Filter. (g),(h): Das Filtern von (c),(d) mit (e),(f) stellt f exakt wieder her.

Das Überlappen hochfrequenter Komponenten über einem niedrigfrequenten Intervall wird auch als Aliasing bezeichnet und entsteht immer dann, wenn die Voraussetzung des Abtasttheorems verletzt wird, das heißt, wenn im Signal Frequenzanteile vorkommen, die höher als die Nyquist-Frequenz sind. Wird dieses Abtasttheorem verletzt, entstehen Analysefehler. Signalfrequenzen, die größer oder gleich sind als die Nyquist-Frequenz, werden als niedrigere Frequenzen interpretiert. Die höheren Frequenzen geben sich sozusagen als eine andere (niedrigere) aus, was diesem Effekt den Namen Aliasing eingebracht hat. Es schleichen sich also Alias-Frequenzen ein, die man nicht von dem echten Signal unterscheiden kann. Ein Synonym für diesen Alias-Effekt ist die spektrale Überlappung und auch in Abbildung 4 dargestellt.

In Gegenwart dieses Aliasings, ist das interpolierte Signal

$$(h_T \star f_d)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)h_T(t - nT)$$



(a) Fourier-Transformation eines Signals f mit einem Träger, der größer ist, als vom Abtasttheorem gefordert.

(b) Äquidistantes Abtasten des analogen Signals führt zur Periodisierung der dazugehörigen Fourier-Transformation. Da sich die Träger von $\hat{f}(\omega - 2k\pi/T)$ für einige k überschneiden, führt dies für einige Frequenzen zur Addition der dazugehörigen Werte.

Abbildung 4: Signal mit größerem Frequenzbereich.

und hat die Fourier-Transformation

$$\hat{h}_T(\omega)\hat{f}_d(\omega) = T\hat{f}_d(\omega)\mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\omega) = \mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega - \frac{2k\pi}{T}), \quad (7)$$

welche über dem Intervall $(-\pi/T, \pi/T)$ komplett verschieden von $\hat{f}(\omega)$ sein kann. Selbst das Signal $(h_T \star f_d)(t)$ muss noch nicht einmal eine gute Approximation von f sein, wie Abbildung 5 zeigt.

Zum besseren Verständnis des Aliasing dienen nun die folgenden drei Beispiele:

Beispiel 1. Wenn man ein Audiosignal in guter Qualität digitalisieren will, sollten sämtliche Frequenzen bis zur Hörgrenze von etwa $f_{max} = 16$ kHz erhalten bleiben. Dazu benötigt man nach dem Abtasttheorem eine Abtastfrequenz von mindestens $f_s = 2f_{max} = 32$ kHz. Nun ist es allerdings so, dass im ursprünglichen Signal noch Anteile oberhalb der Hörgrenze vorhanden sein können. Dort stören sie nicht, nach der Abtastung aber sehr wohl, da bei einer Abtastfrequenz von 32 kHz beispielsweise aus einem Signalanteil mit 25 kHz einer mit 7 kHz würde (Aliasing). Also baut man einen Filter (z.B. Tiefpass) ein, welcher Signale ab der halben Abtastfrequenz ausreichend unterdrückt. Da man diesen nicht beliebig steilflankig bauen kann, würde es Teile des Nutzsignals bereits dämpfen (siehe Abbildung 6). Deswegen legt man die Abtastfrequenz noch ein Stück höher. Für das Audiosignal kommen dann z.B. 44,1 kHz in Frage. [1]

Eine formale Behandlung dieses Beispiels findet sich weiter unten in Beispiel 3.

Beispiel 2. Ein kontinuierliches Ausgangssignal (rote Linie) (siehe Abbildung 7) wird mit einer ungeeigneten Abtastfrequenz, die kleiner als vom Abtasttheorem gefordert ist, diskretisiert. Aus den erhaltenen Messwerten (Kreise) entsteht durch Interpolation ein verfälschtes Signal mit viel zu großer Periode (grüne Linie). [2]

Beispiel 3. Betrachtet wird die hochfrequente Oszillation

$$f(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)}{2}$$

mit $\omega_0 \in \mathbb{R}$.

Die Fourier-Transformation davon ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (\exp(i(\omega_0 - \omega)t) + \exp(-i(\omega_0 + \omega)t)) dt \\ &= \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)), \end{aligned}$$

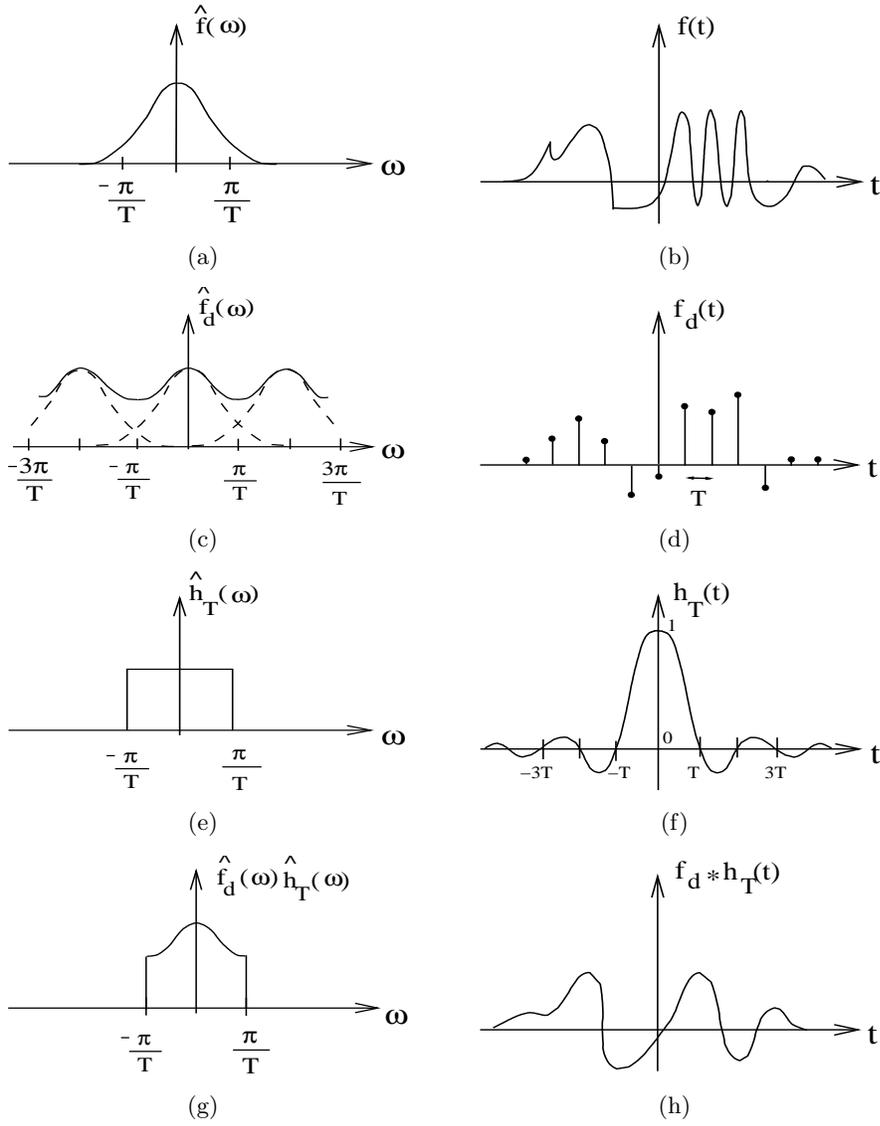


Abbildung 5: (a),(b): Signal f und seine Fourier-Transformation \hat{f} . (c),(d): Aliasing, das durch das Überlappen von $\hat{f}(\omega - 2k\pi/T)$ für verschiedene k zustande kommt, eingezeichnet als gestrichelte Linien. (e),(f): Idealer Tiefpass-Filter. (g),(h): Das Filtern von (c),(d) mit (e),(f) stellt ein niedrigfrequentes Signal her, das sich von f jedoch unterscheidet.

wobei die letzte Gleichheit aus Lemma 4 (siehe Anhang) folgt.

Falls nun $\pi/T < \omega_0 < 2\pi/T$, also $\text{supp}(\hat{f}(\omega)) \not\subset (-\pi/T, \pi/T)$, erhält man mit (7)

$$\begin{aligned}
\hat{h}_T(\omega)\hat{f}_d(\omega) &= \mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega - 2k\pi/T) \\
&= \pi \mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(\omega - \omega_0 - \frac{2k\pi}{T}\right) + \delta\left(\omega + \omega_0 - \frac{2k\pi}{T}\right) \right) \\
&= \pi \left(\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} + \omega_0\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{T} - \omega_0\right) \right),
\end{aligned}$$

da der erste Summand der Summe nur für $\omega = \omega_0 + \frac{2k\pi}{T}$ einen Wert annimmt und außerdem aufgrund der charakteristischen Funktion $\omega \in [-\pi/T, \pi/T]$ gelten muss. Damit folgt für k , dass es aus dem Intervall $[-\frac{1}{2} - \frac{\omega_0 T}{2\pi}, \frac{1}{2} - \frac{\omega_0 T}{2\pi}]$ sein muss und unter Berücksichtigung der Grenzen von ω_0 $k \in (-3/2, 0)$ gelten muss. Aufgrund der Ganzzahligkeit von k nimmt der erste Summand also nur

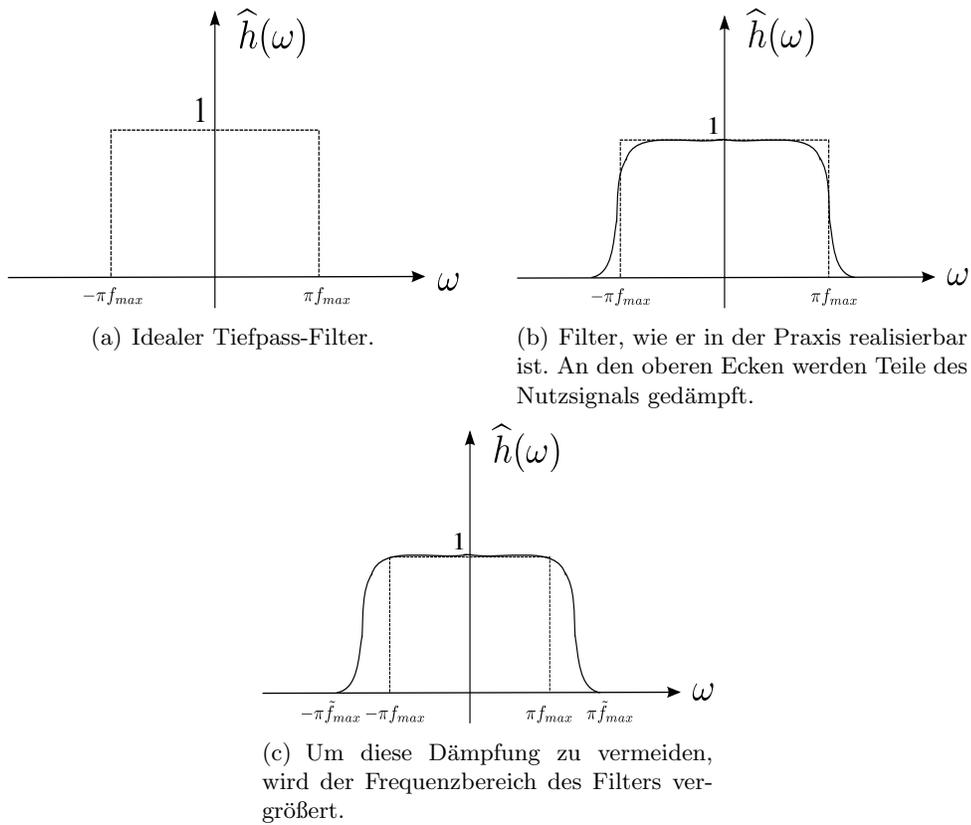


Abbildung 6: Filter.

für $k = -1$ einen Wert ungleich null an; analog erhält man für den zweiten Summanden, dass $k = 1$ gelten muss.

Daraus folgt (inverse Fourier-Transformation)

$$\begin{aligned}
 (f_d \star h_T)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \left(\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} + \omega_0\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{T} - \omega_0\right) \right) \exp(i\omega t) \, d\omega \\
 &= \frac{1}{2} \left(\exp\left(i\left(\frac{2\pi}{T} - \omega_0\right)t\right) + \exp\left(-i\left(\frac{2\pi}{T} - \omega_0\right)t\right) \right) \\
 &= \cos\left(\left(\frac{2\pi}{T} - \omega_0\right)t\right).
 \end{aligned}$$

Folglich ist das Aliasing dafür verantwortlich, dass die hohe Frequenz ω_0 zu der niedrigeren Fre-

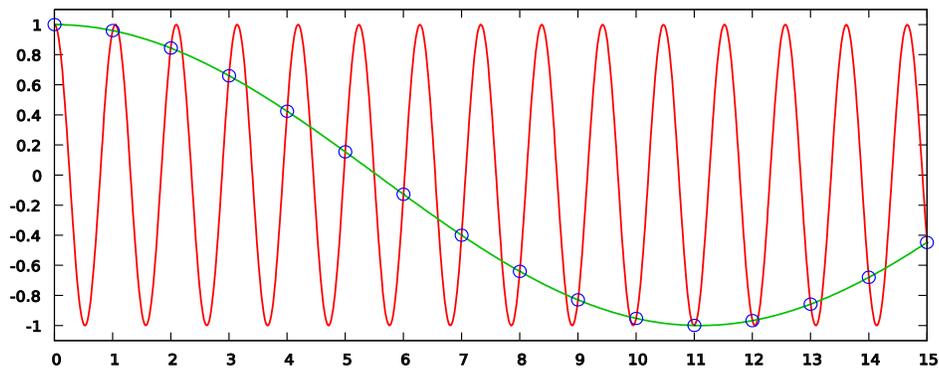


Abbildung 7: Der Alias-Effekt.

quenz $2\pi/T - \omega_0 \in [-\pi/T, \pi/T]$ verringert wird, vergleiche hier Beispiel 1 und Abbildung 8. Das gleiche Falten der Frequenzen kann man auch in einem Film beobachten, indem ein sich schnell bewegendes Objekt mit zu wenigen Bildern pro Sekunde abgetastet wird. Ein Rad, welches sich in der Wirklichkeit schnell dreht, scheint sich im Film viel langsamer bzw. rückwärts zu drehen.

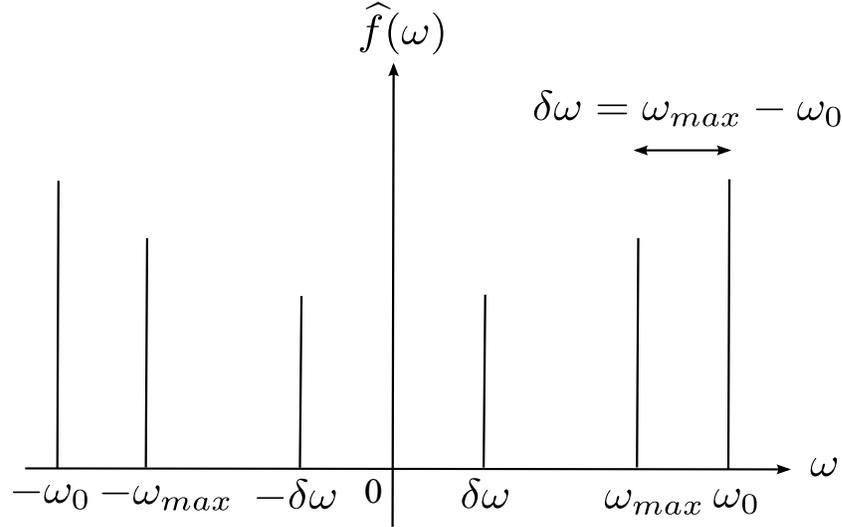


Abbildung 8: Die hohe Frequenz ω_0 wird zu der niedrigeren Frequenz $\omega_{max} - \omega_0 \in [-\omega_{max}, \omega_{max}]$ verringert.

Behebung von Aliasing Um nun das Abtasttheorem von Shannon und Whittaker doch anwenden zu können, wird f durch dasjenige Signal \tilde{f} approximiert, welches am nächsten an f liegt und dessen Fourier-Transformation zudem einen Träger hat, der im Intervall $(-\pi/T, \pi/T)$ liegt. Die Plancherel-Formel (14) beweist unter dem Ziel der Bestapproximation, dass

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - \tilde{f}(t)|^2 dt \stackrel{(14)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega) - \hat{\tilde{f}}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| > \pi/T} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/T} |\hat{f}(\omega) - \hat{\tilde{f}}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Dieser Abstand wird minimal, wenn das zweite Integral null wird, da das erste Integral ein fester Wert ist, das heißt, wenn gilt

$$\hat{\tilde{f}} = \hat{f} \mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\omega) = \frac{1}{T} \hat{h}_T(\omega) \hat{f}(\omega). \quad (8)$$

Die zweite Gleichheit ergibt sich aus $\hat{h}_T = T \mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}$ für $h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$, wie schon im Beweis des Satzes von Shannon und Whittaker gezeigt wurde. Gleichung (8) entspricht somit $\tilde{f} = \frac{1}{T} f \star h_T$. Das Filtern von f mit h_T vermeidet das Aliasing dadurch, dass alle Frequenzen größer als π/T unterdrückt werden (Anti-Aliasing-Filter). Frequenzen, die mit dem abgetasteten Signal nicht mehr dargestellt werden können, sollten nämlich auch vorher nicht vorhanden sein. Da der Träger von \tilde{f} im Intervall $(-\pi/T, \pi/T)$ liegt, ist nun das Abtast-Theorem anwendbar, das heißt $\tilde{f}(t)$ lässt sich aus den abgetasteten Werten $\tilde{f}(nT)$ rekonstruieren. Diese Vorgehensweise findet zum Beispiel Anwendung bei einem Analog-Digitalen-Wandler, der sich aus einem (Tiefpass-)Filter zusammensetzt, der den gesamten Frequenzbereich auf das Intervall $(-\pi/T, \pi/T)$ beschränkt, gefolgt von einem einheitlichen Abtasten des Intervalls mit Schrittweite T , denn die Filterung muss vor der Digitalisierung geschehen, da eine nachträgliche Korrektur von Alias-Effekten nicht mehr möglich ist. Dies liegt daran, dass der Fehler schon beim Abtasten entsteht und folglich auch dort behoben werden muss.

Überabtastung Das Gegenteil vom eben diskutierten Aliasing stellt die Überabtastung dar. Dabei wird ein Signal mit einer wesentlich höheren Abtastfrequenz, als vom Shannon-Whittaker-Abtasttheorem gefordert, abgetastet. Notwendig für eine fehler- und verlustfreie Rekonstruktion des Signals wäre laut dem Abtasttheorem nur eine Abtastrate, die etwas über dem Doppelten der höchsten vorkommenden Signalfrequenz liegt. Dieses Theorem setzt jedoch ideale Antialias- und Rekonstruktionsfilter voraus, wie sie in der Praxis nur sehr schwer zu realisieren sind. Dazu bräuhete man nämlich Filter mit einer sehr hohen Flankensteilheit und einer sehr hohen Dämpfung, wie sie vor allem mit analoger Technik nicht sinnvoll möglich sind. Als Beispiel hierfür müsste bei einem CD-Player das Filter zwischen 20 kHz und 22,05 kHz um ca. 100 dB fallen (siehe auch Beispiel 1). Einen Ausweg dafür bietet nun die Überabtastung, bei der die Filterung vom analogen in den digitalen Bereich verschoben wird. Der Hauptteil der Filterung erfolgt dann mit einem Digitalfilter, sodass am Ausgang nur noch ein einfaches analoges Filter notwendig ist. Nachteile entstehen dadurch keine, da dieses Verfahren beim Auslesen und nicht beim Schreiben von Daten Anwendung findet, sodass weder größere Datenmengen verarbeitet werden müssen, noch der Speicherplatzverbrauch steigt. [4]

2.3 Generelle Abtast-Theoreme

Das Abtast-Theorem gibt eine hinreichende Bedingung, um ein Signal aus den Abtastungen exakt zu rekonstruieren. Für andere Interpolationsschemen können jedoch auch andere hinreichende Bedingungen ermittelt werden. Um diese neue Sichtweise zu erklären, wird das Whittaker-Abtast-Theorem in etwas anderer, abstrakterer Weise interpretiert, nämlich als Zerlegung eines Signals in einer orthogonalen Basis. Dazu dient der folgende Satz.

Satz 3. Falls $h_T(t) = \sin(\pi t/T)/(\pi t/T)$, dann ist $\{h_T(t - nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ eine orthogonale Basis des Raumes U_T derjenigen Funktionen, deren Fourier-Transformation einen Träger haben, der im Intervall $[-\pi/T, \pi/T]$ liegt. Falls $f \in U_T$, dann gilt

$$f(nT) = \frac{1}{T} \langle f(t), h_T(t - nT) \rangle. \quad (9)$$

Beweis. Da $\hat{h}_T = T \mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}$ gilt, beweist die Parseval-Formel (13) unter Ausnutzung der Eigenschaften (c) und (e), dass für $n \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \langle h_T(t - nT), h_T(t - pT) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_T(t - nT) \overline{h_T(t - pT)} dt \\ &\stackrel{(13)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}_T(\omega - nT) \overline{\hat{h}_T(\omega - pT)} d\omega \\ &\stackrel{(c),(e)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-inT\omega) \hat{h}_T(\omega) \overline{\hat{h}_T(pT - \omega)} d\omega \\ &\stackrel{(c)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-inT\omega) \hat{h}_T(\omega) \exp(ipT\omega) \hat{h}_T(-\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T^2 \mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\omega) \exp(-i(n-p)T\omega) d\omega \\ &= \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \exp(-i(n-p)T\omega) d\omega \stackrel{\text{Lemma 1}}{=} T\delta[n-p] \end{aligned}$$

gilt. Dies beweist, dass $\{h_T(t - nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ein Orthogonalsystem ist. Desweiteren ist $h_T(t - nT) \in U_T$, da die folgende Identität gilt

$$\hat{h}_T(t - nT) = \exp(-inT\omega) \hat{h}_T(\omega) = \exp(-inT\omega) T \mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}$$

gilt und diese Fourier-Transformation klarerweise einen Träger im Intervall $[-\pi/T, \pi/T]$ hat. Gleichung (5) aus dem Satz von Shannon und Whittaker beweist nun, dass jedes beliebige $f \in U_T$ als

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)h_T(t - nT)$$

geschrieben werden kann, das heißt als Linearkombination der $\{h_T(t - nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Da dieses System zusätzlich auch noch linear unabhängig ist, bildet es somit eine orthogonale Basis von U_T (siehe auch Lemma 2).

Auch (9) wird mit Hilfe der Parseval-Formel (13) und den Eigenschaften (c) und (e) der Fourier-Transformation bewiesen, denn es gilt

$$\begin{aligned} \langle f(t), h_T(t - nT) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{h_T(t - nT)} dt \stackrel{(13)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{h_T}(\omega - nT)} d\omega \\ &\stackrel{(e)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) \widehat{h_T}(-\omega + nT) d\omega \stackrel{(c)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) \widehat{h_T}(\omega) \exp(inT\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Da der Träger von \widehat{f} laut Voraussetzung im Intervall $[-\pi/T, \pi/T]$ liegt und $\widehat{h_T} = T\mathbf{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}$ ist, folgt unter Ausnutzung der inversen Fourier-Transformation

$$\langle f(t), h_T(t - nT) \rangle = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \widehat{f}(\omega) \exp(inT\omega) d\omega = Tf(nT)$$

und somit die Behauptung. □

Satz 3 zeigt, dass die Interpolationsformel (5) auch als Zerlegung von $f \in U_T$ in einer orthogonalen Basis von U_T interpretiert werden kann:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)h_T(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f(u), h_T(u - nT) \rangle h_T(t - nT),$$

wobei u die Variable des Skalarproduktes ist. Falls $f \notin U_T$, das heißt, wenn der Träger von \widehat{f} nicht im Intervall $[-\pi/T, \pi/T]$ enthalten ist, berechnet man zur Behebung des Aliasing diejenige Funktion $\tilde{f} \in U_T$, die den Abstand $\|\tilde{f} - f\|$ minimiert, also die Bestapproximation von f in U_T .

Der Projektionssatz aus der Einführung beweist, dass \tilde{f} gerade die orthogonale Projektion $P_{U_T}f$ von f in U_T ist, wie auch durch Abbildung 9 veranschaulicht wird.

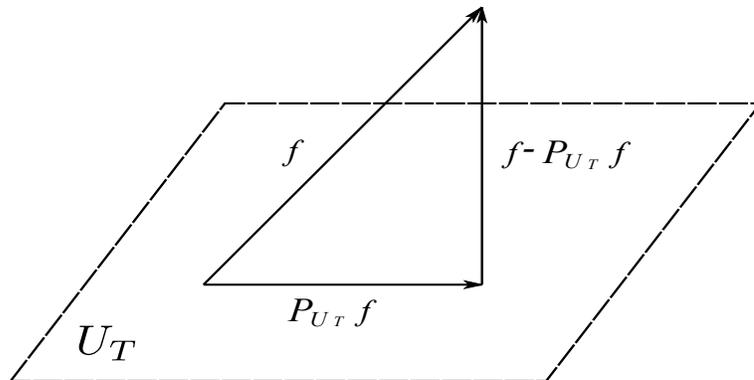


Abbildung 9: $P_{U_T}f$ ist die beste Approximation von f in U_T . Dies bedeutet somit, dass $f - P_{U_T}f$ der kürzeste Vektor von f zu U_T ist, der orthogonal zu U_T ist. [12]

Das Shannon-Whittaker-Abtast-Theorem kann also verallgemeinert werden, indem man andere Räume U_T definiert, sodass jedes beliebige $f \in U_T$ durch eine Interpolation an seinen abgetasteten Werten $\{f(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ wieder ermittelt werden kann. Ein Signal $f \notin U_T$ wird durch seine orthogonale Projektion $\tilde{f} = P_{U_T} f$ auf U_T approximiert, welche durch ein einheitliches Abtasten an den Werten $\{\tilde{f}(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ charakterisiert ist.

Block-Abtaster Als Variante des eben eingeführten allgemeinen Konzepts werden nun die Block-Abtaster vorgestellt. Ein Block-Abtaster approximiert ein Signal mit stückweise konstanten Funktionen. Der Approximationsraum U_T wird hierbei als Menge aller Funktionen, die für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ auf dem Intervall $[nT, (n+1)T)$ konstant sind, gewählt. Sei $h_T = \mathbf{1}_{[0, T)}$. Die Familie $\{h_T(t - nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ist eine orthogonale Basis für den Raum U_T , denn wegen $h_T(t - nT) = \mathbf{1}_{[nT, (n+1)T)}(t)$ gilt mit $n \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{Z}$

$$\langle h_T(t - nT), h_T(t - pT) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h_T(t - nT) \overline{h_T(t - pT)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[nT, (n+1)T)}(t) \mathbf{1}_{[pT, (p+1)T)}(t) dt.$$

Dieses Integral nimmt nur dann einen Wert ungleich Null an, wenn $n = p$ ist. Jedes beliebige $f \in U_T$ kann nun als

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) h_T(t - nT)$$

geschrieben werden. Falls $f \notin U_T$, dann gilt nach der Linearen Algebra

$$P_{U_T} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n,$$

falls $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine orthogonale Basis von U_T ist, das heißt die orthogonale Projektion einer beliebige Funktion f auf U_T kann mit einer Zerlegung in eine orthogonale Basis von U_T berechnet werden. Da in unserem Fall

$$\begin{aligned} \|h_T(t - nT)\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h_T(t - nT)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{1}_{[0, T)}(t - nT)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[nT, (n+1)T)}(t) dt = \int_{nT}^{(n+1)T} dt = T \end{aligned}$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} P_{U_T} f &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\langle f(u), h_T(u - nT) \rangle}{\|h_T(t - nT)\|^2} h_T(t - nT) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f(u), h_T(u - nT) \rangle h_T(t - nT). \end{aligned}$$

Sei $\bar{h}_T(t) = h_T(-t)$. Dann gilt, wiederum unter Ausnutzung von $\overline{h_T(t - nT)} = \mathbf{1}_{[nT, (n+1)T)}(t)$

$$\begin{aligned} \langle f(u), h_T(u - nT) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{h_T(t - nT)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathbf{1}_{[nT, (n+1)T)}(t) dt \\ &= \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{h}_T(nT - t) dt = (f \star \bar{h}_T)(nT - t). \end{aligned}$$

Approximationsräume Der Raum U_T sollte so gewählt werden, dass die orthogonale Projektion $P_{U_T} f$ eine möglichst genaue Approximation an f für eine gegebene Klasse von Signalen liefert. Die Whittaker-Interpolation approximiert ein Signal, indem sie die entsprechende Fourier-Transformation auf ein niedrigfrequentes Intervall beschränkt. Dies ist besonders dann sehr effektiv, wenn man glatte Signale hat, deren Fourier-Transformationen hauptsächlich niedrige Frequenzen enthalten. Sie ist außerdem sehr gut für Tonaufzeichnungen geeignet, die sich gut durch niedrigfrequente Oberschwingungen approximieren lassen, wie auch in Beispiel 1 angedeutet wurde.

3 Diskrete zeitinvariante Filter

3.1 Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Klassische diskrete Signalverarbeitungsalgorithmen basieren meistens auf zeitinvarianten linearen Operatoren, wobei sich die Zeitinvarianz auf Translationen auf dem abgetasteten Raster beschränkt. Um die Notation zu vereinfachen, wird ein genormtes Abtastintervall mit $T = 1$ gewählt und $f[n]$ bezeichne die abgetasteten Werte.

Definition 1. Ein linearer diskreter Operator L heißt **zeitinvariant**, falls eine Eingabe $f[n]$, die um $p \in \mathbb{Z}$ zeitversetzt ist, $f_p[n] = f[n - p]$, eine Ausgabe produziert, die auch um p zeitversetzt ist, das heißt es gilt

$$Lf_p[n] = Lf[n - p].$$

Impulsantwort Das diskrete Dirac $\delta[n]$ ist definiert als

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, \\ 0, & \text{falls } n \neq 0. \end{cases}$$

Ein beliebiges Signal $f[n]$ kann somit in eine Summe von verschobenen Diracs zerlegt werden:

$$f[n] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f[p]\delta[n - p].$$

Sei $L\delta[n] = h[n]$ die diskrete Impulsantwort, also die theoretische Reaktion eines linearen, zeitinvarianten Systems auf einen δ -Impuls. Aufgrund der Linearität und der Zeitinvarianz gilt dann

$$Lf[n] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f[p]L\delta[n - p] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f[p]h[n - p] = (f \star h)[n]. \quad (10)$$

Damit ist der Filter, der im Folgenden den linearen zeitinvarianten Operator darstellt, schon vollständig festgelegt. Einen diskreten linearen zeitinvarianten Filter berechnet man somit durch eine diskrete Faltung und umgekehrt kann auch die Faltung durch Anwendung eines Filters auf ein Signal berechnet werden. Wenn $h[n]$ einen endlichen Träger hat, kann die Summe in (10) mit einer endlichen Anzahl von Operationen berechnet werden. Diese nennt man dann Endliche-Impuls-Antwort-Filter.

Kausalität und Stabilität

Definition 2. Einen diskreten Filter L nennt man **kausal**, wenn $Lf[n]$ nur von den Werten $f[p]$ für $p \leq n$ abhängt.

Alle physikalisch realisierbaren Systeme sind demnach kausal. Die Faltungsformel (10) impliziert, dass $h[n] = 0$, falls $n < 0$, da $h[n - p] = 0$ für $p > n$ sein muss.

Zur Veranschaulichung der eben eingeführten Begriffe, dienen die Abbildungen 10 bis 13.

Definition 3. Einen diskreten Filter L nennt man **stabil**, wenn ein beschränktes Eingangssignal $f[n]$ auch ein beschränktes Ausgangssignal $Lf[n]$ produziert.

Da

$$|Lf[n]| \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \|f\|_{l^\infty} \|h\|_{l^1},$$

ist es hinreichend, dass $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$, das heißt, dass $h \in l^1(\mathbb{Z})$ ist. Außerdem kann man beweisen, dass diese hinreichende Bedingung auch notwendig ist (siehe Lemma 3). Die Impulsantwort h ist somit stabil, wenn $h \in l^1(\mathbb{Z})$, denn es gilt

$$|L\delta[n]| = \left| \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta[p]h[n - p] \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\delta[n]| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \|h\|_{l^1}.$$

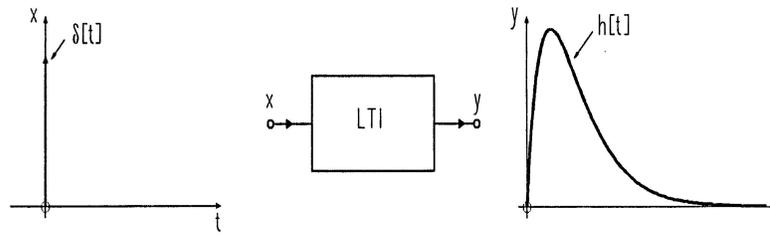


Abbildung 10: δ -Impuls und Impulsantwort h (hier kontinuierlich dargestellt). [8]

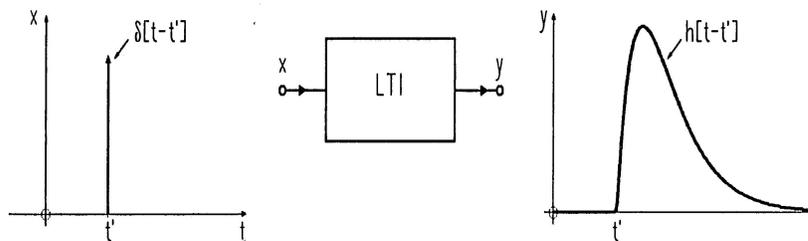


Abbildung 11: Gleiche zeitliche Verschiebung t' am Eingang und Ausgang. [8]

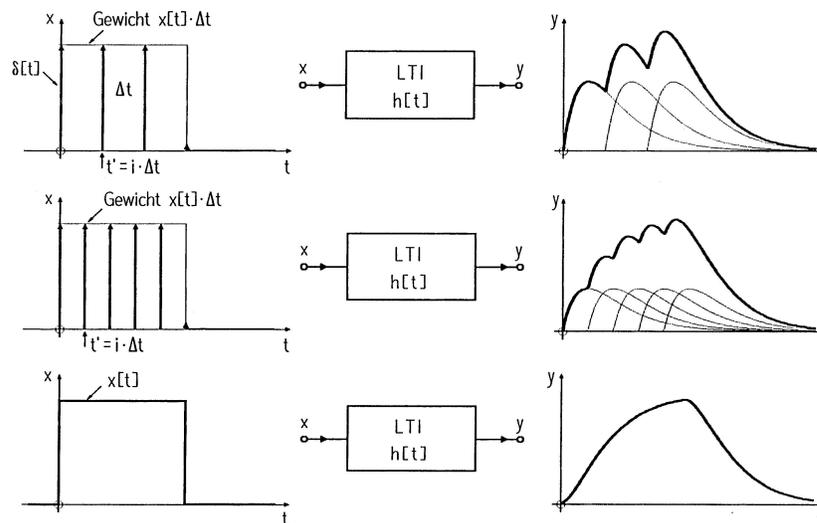


Abbildung 12: Überlagerung verschobener, gewichteter δ -Impulse vor Anwendung des linearen, zeitinvarianten Filters führt zur Addition ebenso verschobener und gewichteter Impulsantworten am Ausgang. [8]

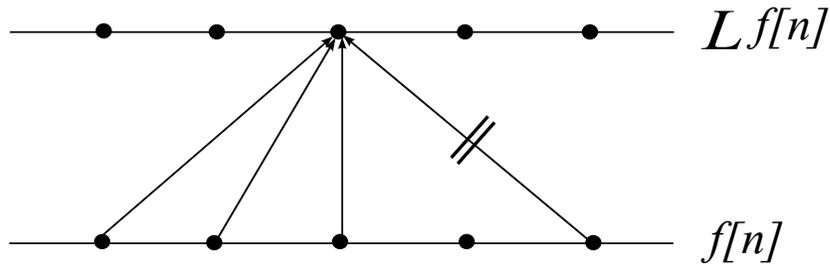


Abbildung 13: Kausalität: $Lf[n]$ darf nur von den Werten $f[n]$ abhängen, die zum Zeitpunkt n schon bekannt sind.

Übertragungsfunktion Bei der Anwendung eines Filters verändert sich im Allgemeinen der Funktionsverlauf des Signals. Es stellt sich nun die Frage, ob es ein spezielles Signal gibt, welches sich nach Anwendung eines Filters nicht verzerrt.

Die Antwort darauf gibt die Fourier-Transformation, die eine wichtige Rolle spielt, wenn man diskrete zeitinvariante Operatoren genauer analysieren will, da die diskreten sinusförmige Wellen $e_{\omega}[n] = \exp(i\omega n)$, $n \in \mathbb{Z}$, gerade deren Eigenvektoren sind, denn

$$\begin{aligned} L \exp(i\omega n) &= L e_{\omega}[n] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega p) h[n-p] \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega(n-p)) h[p] = \exp(i\omega n) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h[p] \exp(-i\omega p). \end{aligned}$$

Dies ist eine Eigenwertgleichung, an der man die Eigenwerte direkt ablesen kann. Sie sind die Fourier-Reihe

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h[p] \exp(-i\omega p).$$

Diese wird auch Übertragungsfunktion des Filters genannt.

Zum Abschluss folgt nun noch ein Beispiel, um vorangegangene Begriffe und Definitionen zu verdeutlichen.

Beispiel 4. Die uniforme diskrete Mittelwertbildung

$$Lf[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{p=n-N}^{n+N} f[p]$$

ist ein zeitinvarianter diskreter Filter mit Impulsantwort

$$h[n] = \frac{1}{2N+1} \mathbf{1}_{[-N, N]}.$$

Die Übertragungsfunktion ist

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} \exp(-in\omega) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin((N+1/2)\omega)}{\sin(\omega/2)}.$$

Beweis. Zunächst zur Zeitinvarianz: Angenommen, die Eingabe ist zeitversetzt, das heißt $f_k[n] = f[n-k]$. Dann gilt für die Ausgabe

$$\begin{aligned} Lf_k[n] &= \frac{1}{2N+1} \sum_{p=n-N}^{n+N} f_k[p] = \frac{1}{2N+1} \sum_{p=n-N}^{n+N} f[p-k] \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{p=n-k-N}^{n-k+N} f[p] = Lf[n-k]. \end{aligned}$$

Desweiteren erhält man für die Filterfunktion

$$h[n] = L\delta[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{p=n-N}^{n+N} \delta[p] = \frac{1}{2N+1} \mathbf{1}_{[-N,N]}(n).$$

Nun wird noch die Übertragungsfunktion berechnet. Es gilt

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2N+1} \mathbf{1}_{[-N,N]} \exp(-in\omega) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} \exp(-in\omega).$$

Diese Summe berechnet sich wie folgt (vergleiche [6]):

Die geometrische Reihe liefert, dass

$$\sum_{n=0}^k ar^n = a \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

gilt. Insbesondere erhält man mit der Substitution $l = n + N$ die folgende Identität

$$\sum_{n=-N}^{+N} r^n = r^{-N} \sum_{l=0}^{+2N} r^l = r^{-N} \frac{1-r^{2N+1}}{1-r}.$$

Multipliziert man nun sowohl den Zähler, als auch den Nenner mit $r^{-1/2}$ erhält man

$$\frac{r^{-N-1/2}}{r^{-1/2}} \frac{1-r^{2N+1}}{1-r} = \frac{r^{-N-1/2} - r^{N+1/2}}{r^{-1/2} - r^{1/2}}.$$

Für den Fall $r = \exp(-i\omega)$ ergibt sich somit unter Ausnutzung der komplexen Darstellung von \sin die gewünschte Gleichheit

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{+N} \exp(-in\omega) &= \frac{\exp((N+1/2)i\omega) - \exp(-(N+1/2)i\omega)}{\exp(i\omega/2) - \exp(-i\omega/2)} \\ &= \frac{2i \sin(\omega(N+\frac{1}{2}))}{2i \sin(\frac{\omega}{2})} = \frac{\sin(\omega(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{\omega}{2})}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also für die Übertragungsfunktion

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin(\omega(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{\omega}{2})}.$$

□

4 Anhang

Im Anhang sind einige wichtige Formeln und Begriffe zusammengestellt, die im Laufe des Vortrags benötigt werden. Diese werden jedoch nur zum Teil bewiesen.

Skalarprodukte und Normen im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ Das Skalarprodukt im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ für zwei Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $g \in L^2(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

wobei $\overline{g(t)}$ die komplex konjugierte Funktion von $g(t)$ bezeichnet. Die dadurch induzierte Norm im $L^2(\mathbb{R})$ ist

$$(\|f\|^2)^{1/2} = (\langle f, f \rangle)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Speziell definiert man für zwei Funktionen $f \in L^2([-\pi, \pi])$ und $g \in L^2([-\pi, \pi])$, deren Träger auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ beschränkt ist, das Skalarprodukt als

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Lemma 1. Die Familie von Funktionen $\{\exp(-ikt)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ bildet ein Orthonormalsystem von $L^2([-\pi, \pi])$, das heißt es gilt

$$\langle \exp(-ikt), \exp(-ilt) \rangle = \delta[k - l]. \quad (11)$$

Beweis. Unter Berücksichtigung von $\exp^*(-ilt) = \exp(ilt)$ und der Eulerschen Formel $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ gilt für $k \neq l$ die Identität

$$\begin{aligned} \langle \exp(-ikt), \exp(-ilt) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(-ikt) \exp^*(-ilt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(i(l-k)t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(l-k)} \exp(i(l-k)t) \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0. \end{aligned}$$

Für $k = l$ nimmt das Skalarprodukt den Wert eins an, sodass die Behauptung folgt. \square

Korollar 1. (POISSON-FORMEL) Im Sinne von Distributionen gilt die Gleichung

$$\widehat{c}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-inT\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right), \quad (12)$$

wobei

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT).$$

Beweis. Die Fourier-Transformation \widehat{c} ist $2\pi/T$ -periodisch. Um die Poisson-Formel zu beweisen, reicht es deshalb zu zeigen, dass die Einschränkung von \widehat{c} auf $[-\pi/T, \pi/T]$ gleich $2\pi/T \delta$ ist. Dabei wird die Formel im Sinne der Distributionsgleichheit bewiesen, indem man zeigt, dass für eine beliebige Testfunktion $\widehat{\Phi}(\omega)$ mit einem Träger in $[-\pi/T, \pi/T]$ die folgende Identität gilt

$$\langle \widehat{c}, \widehat{\Phi} \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-N}^{+N} \exp(-inT\omega) \widehat{\Phi}(\omega) d\omega = \frac{2\pi}{T} \widehat{\Phi}(0).$$

Nutzt man aus, dass wie in Beispiel 4 bewiesen,

$$\sum_{n=-N}^{+N} \exp(-inT\omega) = \frac{\sin(\omega(N + \frac{1}{2})T)}{\sin(\frac{T\omega}{2})}$$

gilt, erhält man

$$\langle \widehat{c}, \widehat{\Phi} \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi/T}^{+\pi/T} \frac{\sin(\omega(N + \frac{1}{2})T)}{\pi\omega} \frac{T\omega/2}{\sin(\frac{T\omega}{2})} \widehat{\Phi}(\omega) d\omega.$$

Definiere

$$\widehat{\Psi}(\omega) = \begin{cases} \widehat{\Phi}(\omega) \frac{T\omega/2}{\sin(\frac{T\omega}{2})}, & \text{falls } |\omega| \leq \pi/T, \\ 0, & \text{falls } |\omega| > \pi/T \end{cases}$$

und es sei $\Psi(t)$ die inverse Fourier-Transformation von $\widehat{\Psi}(\omega)$. Die Fourier-Transformation von $f(t) = \mathbf{1}_{[-a,a]}(t)$ ist $2\omega^{-1} \sin(a\omega)$, denn für $w \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[-a,a]}(t) \exp(-i\omega t) dt = \int_{-a}^{+a} \cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\omega} (\sin(\omega t) + \cos(-\omega t)) \Big|_{-a}^{+a} = \frac{1}{\omega} (\sin(a\omega) + \cos(-a\omega) - \sin(-a\omega) - \cos(a\omega)) \\ &= \frac{2 \sin(a\omega)}{\omega}. \end{aligned}$$

Mit der Parseval-Formel folgt dann

$$\begin{aligned} \langle \widehat{c}, \widehat{\Phi} \rangle &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega(N + \frac{1}{2})T)}{\pi\omega} \widehat{\Psi}(\omega) d\omega \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-(N+1/2)T}^{+(N+1/2)T} \Psi(t) dt. \end{aligned}$$

Wenn N nun gegen $+\infty$ läuft, konvergiert das Integral gegen $\widehat{\Psi}(0) = \widehat{\Phi}(0)$ und es folgt die Behauptung. \square

Die nun folgenden Identitäten beweisen, dass Skalarprodukte und Normen im $L^2(\mathbb{R})$ bei der Fourier-Transformation bis auf einen Faktor von 2π erhalten bleiben. Die erste Gleichung wird dabei auch *Parseval-Gleichung* genannt, die zweite Gleichung auch *Plancherel-Gleichung*.

Korollar 2. Für $f, h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{h(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{h}(\omega)} d\omega. \quad (13)$$

Im Falle der Gleichheit $h = f$ folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (14)$$

Beweis. Definiere $g = f \star \bar{h}$ mit $\bar{h}(t) = \overline{h(-t)}$. Dann gilt mit dem Faltungssatz und unter Berücksichtigung, dass die Fourier-Transformation von $\overline{f(t)}$ gerade $\widehat{f}(-\omega)$ ist, die Beziehung $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{h}(\omega)}$. Wendet man nun die inverse Fourier-Transformation auf $g(0)$ an, ergibt sich die Behauptung, denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{h(t)} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{h}(0-t) dt = (f \star \bar{h})(0) \\ &= g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{h}(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

\square

Eigenschaften der Fourier-Transformation Die folgende Tabelle fasst einige wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation zusammen, die in der Ausarbeitung benötigt werden.

	Eigenschaft	Funktion	Fourier – Transformation
(a)	Faltung	$f(t)$ $(f_1 \star f_2)(t)$	$\widehat{f}(\omega)$ $\widehat{f}_1(\omega)\widehat{f}_2(\omega)$
(b)	Multiplikation	$f_1(t)f_2(t)$	$1/(2\pi)(\widehat{f}_1 \star \widehat{f}_2)(\omega)$
(c)	Translation	$f(t - u)$	$\exp(-iu\omega)\widehat{f}(\omega)$
(d)	Komplex Konjugierte	$\overline{f(t)}$	$\overline{\widehat{f}(-\omega)}$
(e)	Hermitesche Symmetrie	$f(t) \in \mathbb{R}$	$\widehat{f}(-\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}$

Lemma 2. Sei $S = \{e_i\}$ für $i = 1, \dots, n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ein Orthogonalsystem des Raumes U_T und jedes $u \in U_T$ lasse sich als

$$u = \sum_{i \in I} u_i e_i$$

schreiben. Dann ist das System S linear unabhängig, also eine Basis für U_T .

Beweis. Laut Voraussetzung bildet S ein Erzeugendensystem von U_T . Insbesondere kann also Null geschrieben werden als

$$0 = \sum_{i \in I} u_i e_i \text{ für } u_i \in \mathbb{R} \text{ geeignet.}$$

Aufgrund der Orthogonalität gilt, dass $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ ist. Nutzt man nun die Linearität des Skalarproduktes aus, so erhält man für ein beliebiges $j \in I$ die Identität

$$0 = \langle 0, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i \in I} u_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i \in I} u_i \langle e_i, e_j \rangle = u_j \langle e_j, e_j \rangle.$$

Da $\langle e_j, e_j \rangle \neq 0$ ist, folgt $u_j = 0$. Da $j \in I$ beliebig gewählt war, folgt somit $u_j = 0$ für alle $j \in I$. Die Null kann somit nur auf triviale Weise linear kombiniert werden, woraus die lineare Unabhängigkeit von S folgt. \square

Lemma 3. Die notwendige Bedingung dafür, dass ein diskreter Filter L stabil ist, ist $h \in l^1(\mathbb{Z})$.

Beweis. Angenommen, $h \notin l^1(\mathbb{Z})$, dann definiere ein beschränktes Signal f , sodass $\|Lf\|_{l^\infty} = \|f \star h\|_{l^\infty} = \infty$. Wenn $h \notin l^1(\mathbb{Z})$, bedeutet dies, dass $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h[n]|$ bestimmt divergent ist, das heißt zu beliebigem $Z > 0$ existiert eine Indexmenge $I \subset \mathbb{Z}$, $|I| < \infty$, mit $\sum_{i \in I} |h[i]| > Z$. Definiere nun $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$ als

$$f_Z[n] = \begin{cases} \text{sign}(h[i]), & \text{falls } -n \in I, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit folgt nun

$$Lf[0] = (h \star f_Z)[0] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h[i] f_Z[-i] = \sum_{i \in I} |h[i]| > Z,$$

im Widerspruch zu $\|Lf\|_{l^\infty} < \infty \forall f \in l^\infty$, also im Widerspruch zur für die Stabilität notwendigen Beschränktheit des Ausgangssignals. \square

Dirac-Delta-Distribution Dirac-Pulse sind immer dann geeignet, wenn man von Funktionen, die auf der reellen Achse definiert sind, zu diskreten Folgen übergehen will. Dies geschieht dadurch, dass sich der Träger eines Dirac-Pulses auf $t = 0$ beschränkt, sodass ein Dirac-Puls einer stetigen Funktion ϕ gerade ihren Wert an der Stelle $t = 0$ zuordnet. Die Notation dafür sieht wie folgt aus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\phi(t) dt = \phi(0).$$

Für die Fourier-Transformation von δ erhält man somit

$$\widehat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \exp(-i\omega t) dt = \exp(0) = 1,$$

das heißt, sie ordnet jeder beliebigen Schwingung $\exp(-i\omega t)$ ihren Wert für $t = 0$ zu. Ein Dirac-Puls ist jedoch keine Funktion, da es für $t \neq 0$ stets 0 ist, obwohl das 'Integral' den Wert 1 hat. Die Integralschreibweise hat hierbei eher symbolischen Charakter [11], da es die gleichen Eigenschaften wie ein gewöhnliches Integral hat, wie zum Beispiel die Möglichkeiten zu substituieren oder partiell zu integrieren. Auch Translationen sind möglich. So hat das um τ verschobene Dirac $\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$ ein Zentrum, welches sich bei τ konzentriert, das heißt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t - u) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(u - t) dt = \phi(u).$$

Dies bedeutet also insbesondere, dass $(\phi \star \delta)(u) = \phi(u)$ bzw. $(\phi \star \delta_\tau)(u) = \phi(u - \tau)$ gilt. Die Summe

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

wird auch als Dirac-Kamm bezeichnet und vor allem für das Abtasten analoger Signale benutzt.

Lemma 4. *Die Delta-Distribution kann dargestellt werden als*

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dx.$$

Diese Konvergenz im schwachen Sinne kann man kurz, im Sinne der temperierten Distributionen, als $\widehat{\delta} = 1$ schreiben.

Beweis. Siehe [10]. □

Literatur

- [1] Artikel zum Thema Aliasing. <http://www.mikrocontroller.net/topic/86375>.
- [2] Wikipediaartikel zum Thema Alias-Effekt. <http://de.wikipedia.org/wiki/Alias-Effekt>.
- [3] Wikipediaartikel zum Thema Analogsignal. <http://de.wikipedia.org/wiki/Analogsignal>.
- [4] Wikipediaartikel zum Thema Überabtastung. <http://de.wikipedia.org/wiki/Oversampling>.
- [5] Wikipediaartikel zum Thema Digitalsignal. <http://de.wikipedia.org/wiki/Digitalsignal>.
- [6] Wikipediaartikel zum Thema Dirichlet-Kern. <http://de.wikipedia.org/wiki/Dirichlet-Kern>.
- [7] Wikipediaartikel zum Thema Signalverarbeitung. <http://de.wikipedia.org/wiki/Signalverarbeitung>.
- [8] Wolfgang Bachmann. *Signalanalyse, Grundlagen und mathematische Verfahren*. Vieweg, Wiesbaden, 1992.

- [9] Ingo Fischer, Wolfgang und Lieb. *Funktionentheorie: Komplexe Analysis in einer Veränderlichen*. Vieweg, Wiesbaden, 2005.
- [10] Claude Gasquet and Patrick Witomski. *Fourier Analysis and Applications. Filtering, Numerical Computation, Wavelets*, volume 30 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, Heidelberg, 1998.
- [11] Stéphane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, New York, second edition, 1999.
- [12] Martin J. Mohlenkamp and Maria Cristina Pereyra. *Wavelets, Their Friends, and What They Can Do for You*. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society Publishing House, Zürich, 2008.