

Heisenbergsche Unschärferelation und gefensterter Fourier-Transformation

Sabrina Pfeiffer

25. November 2008

1 Heisenbergsche Unschärferelation

- Definitionen
- Die Heisenbergsche Unschärferelation
- Kompakte Träger

2 Gefensterte Fourier-Transformation

- Zeit-Frequenz-Atome
- Heisenberg-Boxen
- Gefensterte Fourier-Transformation
- Vollständigkeit und Stabilität
- Reproduzierender Kern

- 1 Heisenbergsche Unschärferelation
 - Definitionen
 - Die Heisenbergsche Unschärferelation
 - Kompakte Träger
- 2 Gefensterte Fourier-Transformation
 - Zeit-Frequenz-Atome
 - Heisenberg-Boxen
 - Gefensterte Fourier-Transformation
 - Vollständigkeit und Stabilität
 - Reproduzierender Kern

Beispiel

Der Dirac-Impuls $\delta(t - u)$ besitzt einen Träger, der auf einen Punkt im Zeitbereich beschränkt ist. Seine Fourier-Transformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\widehat{\delta(t - u)} &= \exp(-i\omega u) \hat{\delta}(\omega) \\ &= \exp(-i\omega u) \int_{\mathbb{R}} \delta(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta(t) \exp(-i\omega t) dt = 1 \\ &= \exp(-i\omega u).\end{aligned}$$

Die Energie der Fourier-Transformation des Dirac-Impulses, gegeben durch $\exp(-i\omega u)$, ist jedoch gleichmäßig über alle Frequenzen verteilt, also nicht beschränkt.

Definition (1/2)

Es sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ ein Signal. Das zeitliche Zentrum t ist dann gegeben durch

$$u = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt,$$

während das Zentrum bezüglich der Frequenz ξ eines Signals durch

$$\xi = \frac{1}{2\pi \|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

gegeben ist.

Definition (2/2)

Die Streuung um diese Zentren sind gegeben durch die Varianzen

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (t - u)^2 |f(t)|^2 dt$$

und

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (\omega - \xi)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Satz: Heisenbergsche Unschärferelation

Die Varianzen bezüglich Zeit und Frequenz einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ erfüllen die Ungleichung

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Gleichheit gilt, wenn es

$$f(t) = a \exp[i\xi t - b(t - u)^2].$$

gibt, mit $a \in \mathbb{C}$, $t, u, \xi \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}_+$.

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (1/6)

Beweis:

Sei $\mathcal{A}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $u = \xi = 0$.

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \stackrel{u=\xi=0}{=} \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \frac{1}{2\pi \|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 dt$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (1/6)

Beweis:

Sei $\mathcal{A}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $u = \xi = 0$.

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &\stackrel{u=\xi=0}{=} \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \frac{1}{2\pi \|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi \|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega\end{aligned}$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (1/6)

Beweis:

Sei $\mathcal{A}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $u = \xi = 0$.

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &\stackrel{u=\xi=0}{=} \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \frac{1}{2\pi \|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi \|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &\stackrel{|i|=1}{=} \frac{1}{2\pi \|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |i\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega\end{aligned}$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (1/6)

Beweis:

Sei $\mathfrak{A}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $u = \xi = 0$.

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &\stackrel{u=\xi=0}{=} \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \frac{1}{2\pi \|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi \|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &\stackrel{|i|=1}{=} \frac{1}{2\pi \|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |i\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &\stackrel{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{\|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt\end{aligned}$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (2/6)

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{\|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (2/6)

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &= \frac{1}{\|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarzsche Ungl.}}{\geq} \frac{1}{\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} |tf(t)\overline{f'(t)}| dt \right]^2 \end{aligned}$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (2/6)

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{\|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt$$

$$\begin{array}{l} \text{Cauchy-Schwarzsche Ungl.} \\ \geq \end{array} \frac{1}{\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} |tf(t)\overline{f'(t)}| dt \right]^2$$

$$\begin{array}{l} |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| \geq -\operatorname{Re}(z) \\ \geq \end{array} \frac{1}{\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} -\operatorname{Re}(tf(t)\overline{f'(t)}) dt \right]^2$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (2/6)

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &= \frac{1}{\|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \\ \stackrel{\text{Cauchy-Schwarzsche Ungl.}}{\geq} & \frac{1}{\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} |tf(t)\overline{f'(t)}| dt \right]^2 \\ |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| \geq -\operatorname{Re}(z) & \stackrel{\geq}{=} \frac{1}{\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} -\operatorname{Re}(tf(t)\overline{f'(t)}) dt \right]^2 \\ &= \frac{1}{\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} -\frac{t}{2} [f(t)\overline{f'(t)} + \overline{f(t)f'(t)}] dt \right]^2\end{aligned}$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (2/6)

$$\begin{aligned}
 \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &= \frac{1}{\|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \\
 &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarzsche Ungl.}}{\geq} \frac{1}{\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} |tf(t)\overline{f'(t)}| dt \right]^2 \\
 &\stackrel{|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| \geq -\operatorname{Re}(z)}{\geq} \frac{1}{\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} -\operatorname{Re}(tf(t)\overline{f'(t)}) dt \right]^2 \\
 &= \frac{1}{\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} -\frac{t}{2} [f(t)\overline{f'(t)} + \overline{f(t)f'(t)}] dt \right]^2 \\
 &= \frac{1}{4\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} -t(|f(t)|^2)' dt \right]^2
 \end{aligned}$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (3/6)

Durch partielle Intergration erhält man

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4 \|f\|^4} \left[-t |f(t)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right]^2.$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (3/6)

Durch partielle Intergration erhält man

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4\|f\|^4} \left[-t|f(t)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right]^2.$$

Da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, nimmt der erste Term den Wert Null an. Somit gilt:

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right]^2 = \frac{1}{4}.$$

Damit ist die Heisenbergsche Unschärferelation für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ bewiesen.

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (4/6)

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, kann man jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ in der L^2 -Norm durch eine Folge von Funktion $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ approximieren.

Für jedes f gilt

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (4/6)

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, kann man jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ in der L^2 -Norm durch eine Folge von Funktion $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ approximieren.

Für jedes f gilt

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Es bleibt zu zeigen für welche $f \in L^2(\mathbb{R})$ die untere Schranke der Ungleichung angenommen wird.

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (4/6)

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, kann man jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ in der L^2 -Norm durch eine Folge von Funktion $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ approximieren.

Für jedes f gilt

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Es bleibt zu zeigen für welche $f \in L^2(\mathbb{R})$ die untere Schranke der Ungleichung angenommen wird.

In der ersten Ungleichung

$$\frac{1}{\|f\|^4} \int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \geq \frac{1}{\|f\|^4} \left[\int_{\mathbb{R}} |tf(t)\overline{f'(t)}| dt \right]^2$$

gilt nach Cauchy-Schwarz Gleichheit, falls $tf(t)$ und $f'(t)$ linear abhängig sind.

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (5/6)

Dies führt zu der Differentialgleichung

$$f'(t) = -2btf(t), \quad \text{mit } b \in \mathbb{C},$$

mit der Lösungsschar ($a \in \mathbb{C}$)

$$f(t) = a \exp(-bt^2).$$

Da $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ liegen muss, gilt $\operatorname{Re}(b) > 0$.

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (5/6)

Dies führt zu der Differentialgleichung

$$f'(t) = -2btf(t), \quad \text{mit } b \in \mathbb{C},$$

mit der Lösungsschar ($a \in \mathbb{C}$)

$$f(t) = a \exp(-bt^2).$$

Da $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ liegen muss, gilt $\operatorname{Re}(b) > 0$. Zur zweiten Ungleichung:
Gesucht sind die Bedingungen an f , damit

$$|tf(t)\overline{f'(t)}| = -\frac{t}{2} [f(t)\overline{f'(t)} + f'(t)\overline{f(t)}]$$

gilt.

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (5/6)

Dies führt zu der Differentialgleichung

$$f'(t) = -2btf(t), \quad \text{mit } b \in \mathbb{C},$$

mit der Lösungsschar ($a \in \mathbb{C}$)

$$f(t) = a \exp(-bt^2).$$

Da $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ liegen muss, gilt $\operatorname{Re}(b) > 0$. Zur zweiten Ungleichung:
Gesucht sind die Bedingungen an f , damit

$$|tf(t)\overline{f'(t)}| = -\frac{t}{2} [f(t)\overline{f'(t)} + f'(t)\overline{f(t)}]$$

gilt. Dazu werden $tf(t)$ und $f'(t)$ eingesetzt. Es ergibt sich:

$$|tf(t)\overline{f'(t)}| = \underbrace{t^2|a|^2 \exp(-bt^2)}_{=: I} 2|b|$$

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (6/6)

und

$$-\frac{t}{2} \left(f'(t) \overline{f(t)} + \overline{f'(t)} f(t) \right) = \underbrace{t^2 |a|^2 |\exp(-bt^2)|^2}_{=1} 2 \operatorname{Re}(b).$$

$$\Rightarrow 2|b| = 2 \operatorname{Re}(b).$$

Dies ist nur für $b \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation (6/6)

und

$$-\frac{t}{2} \left(f'(t) \overline{f(t)} + \overline{f'(t)} f(t) \right) = \underbrace{t^2 |a|^2 |\exp(-bt^2)|^2}_{=1} 2 \operatorname{Re}(b).$$

$$\Rightarrow 2|b| = 2 \operatorname{Re}(b).$$

Dies ist nur für $b \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Falls die Zentren von f und \hat{f} nicht verschwinden, muss noch eine Verschiebung von f um u und ξ durchgeführt werden.

Damit gilt die Gleichheit der Heisenbergschen Ungleichung für

$$f(t) \stackrel{\text{Modulation}}{=} a \exp[i\xi t - b(t - u)^2].$$

Satz über Funktionen mit kompakten Trägern

Falls eine Funktion $f(t) \neq 0$ einen kompakten Träger besitzt, dann kann ihre Fourier-Transformation $\hat{f}(\omega)$ auf einem nichttrivialen Intervall nicht Null sein. Umgekehrt gilt ebenso, falls $\hat{f}(\omega)$ einen kompakten Träger besitzt, dann kann $f(t)$ auf einem nichttrivialen Intervall nicht Null sein.

Satz über Funktionen mit kompakten Trägern

Falls eine Funktion $f(t) \neq 0$ einen kompakten Träger besitzt, dann kann ihre Fourier-Transformation $\hat{f}(\omega)$ auf einem nichttrivialen Intervall nicht Null sein. Umgekehrt gilt ebenso, falls $\hat{f}(\omega)$ einen kompakten Träger besitzt, dann kann $f(t)$ auf einem nichttrivialen Intervall nicht Null sein.

Beweis:

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Es wird nur die erste Behauptung gezeigt, da die erste unter Verwendung der Fourier-Transformation sofort folgt.

Satz über Funktionen mit kompakten Trägern

Falls eine Funktion $f(t) \neq 0$ einen kompakten Träger besitzt, dann kann ihre Fourier-Transformation $\hat{f}(\omega)$ auf einem nichttrivialen Intervall nicht Null sein. Umgekehrt gilt ebenso, falls $\hat{f}(\omega)$ einen kompakten Träger besitzt, dann kann $f(t)$ auf einem nichttrivialen Intervall nicht Null sein.

Beweis:

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Es wird nur die erste Behauptung gezeigt, da die erste unter Verwendung der Fourier-Transformation sofort folgt.

\hat{f} besitze einen kompakten Träger der in $[-b, b]$ enthalten sei. Damit gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Beweis zum Satz über Funktionen mit kompakten Trägern

Falls $f(t) = 0$ für alle $t \in [c, d]$, erhält man durch n -faches Differenzieren nach t unter dem Integral an der Stelle $t_0 = (c + d)/2$

$$0 = f^{(n)}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t_0) (i\omega)^n d\omega.$$

Beweis zum Satz über Funktionen mit kompakten Trägern

Falls $f(t) = 0$ für alle $t \in [c, d]$, erhält man durch n -faches Differenzieren nach t unter dem Integral an der Stelle $t_0 = (c + d)/2$

$$0 = f^{(n)}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t_0) (i\omega)^n d\omega.$$

Weiterhin gilt aber auch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

Beweis zum Satz über Funktionen mit kompakten Trägern

Falls $f(t) = 0$ für alle $t \in [c, d]$, erhält man durch n -faches Differenzieren nach t unter dem Integral an der Stelle $t_0 = (c + d)/2$

$$0 = f^{(n)}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t_0) (i\omega)^n d\omega.$$

Weiterhin gilt aber auch

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) \exp[i\omega(t - t_0)] \exp(i\omega t_0) d\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega i)^n [(t - t_0)]^n}{n!} \exp(i\omega t_0) d\omega$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega i)^n [(t - t_0)]^n}{n!} \exp(i\omega t_0) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \underbrace{\int_{-b}^b \hat{f}(\omega) (i\omega)^n \exp(i\omega t_0) d\omega}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $f(t) \neq 0$ ist.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega i)^n [(t - t_0)]^n}{n!} \exp(i\omega t_0) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \underbrace{\int_{-b}^b \hat{f}(\omega) (i\omega)^n \exp(i\omega t_0) d\omega}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $f(t) \neq 0$ ist.

Wie im Beweis zur Heisenbergschen Unschärferelation wurde die Aussage auch hier zuerst für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gezeigt. Wie aber bereits gesehen folgt daraus bereits die Gültigkeit der Aussage für $f \in L^2(\mathbb{R})$.

- 1 Heisenbergsche Unschärferelation
 - Definitionen
 - Die Heisenbergsche Unschärferelation
 - Kompakte Träger
- 2 Gefensterte Fourier-Transformation
 - Zeit-Frequenz-Atome
 - Heisenberg-Boxen
 - Gefensterte Fourier-Transformation
 - Vollständigkeit und Stabilität
 - Reproduzierender Kern

- Zeit-Frequenz-Atome sind Funktionen, die bezüglich Zeit und Frequenz gut lokalisiert sind.

Zeit-Frequenz-Atome

- Zeit-Frequenz-Atome sind Funktionen, die bezüglich Zeit und Frequenz gut lokalisiert sind.
- Sei $\{\Phi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset L^2(\mathbb{R})$ eine Familie von Zeit-Frequenz-Atomen. Jedes Atom sei normiert mit $\|\Phi_\gamma\| = 1$.

- Zeit-Frequenz-Atome sind Funktionen, die bezüglich Zeit und Frequenz gut lokalisiert sind.
- Sei $\{\Phi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset L^2(\mathbb{R})$ eine Familie von Zeit-Frequenz-Atomen. Jedes Atom sei normiert mit $\|\Phi_\gamma\| = 1$.

Definition: Lineare Zeit-Frequenz-Transformation

Eine lineare Zeit-Frequenz-Transformation für Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ wird definiert durch

$$Tf(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\Phi_\gamma(t)} dt = \langle f, \Phi_\gamma \rangle.$$

Mit der Parseval-Formel gilt

$$Tf(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\Phi_\gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\Phi}_\gamma(\omega)} d\omega.$$

Heisenberg-Boxen

Der durch $Tf(\gamma)$ erreichte Ausschnitt an Informationen kann visuell durch sogenannte Heisenberg-Boxen veranschaulicht werden. Dazu wird die Definition für die gewählten Zeit-Frequenz-Atome angepasst.

Heisenberg-Boxen

Der durch $Tf(\gamma)$ erreichte Ausschnitt an Informationen kann visuell durch sogenannte Heisenberg-Boxen veranschaulicht werden. Dazu wird die Definition für die gewählten Zeit-Frequenz-Atome angepasst.

Definition (1/2)

Wegen der Normierung $\|\Phi_\gamma\| = 1$ kann $|\Phi_\gamma|^2$ als Wahrscheinlichkeits-Verteilung interpretiert werden, die zentriert ist bei

$$u_\gamma = \int_{\mathbb{R}} t |\Phi_\gamma(t)|^2 dt.$$

hat. Die Größe des Streubereichs um u_γ bezüglich der Zeit wird durch folgende Varianz bemessen

$$\sigma_t^2(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} (t - u_\gamma)^2 |\Phi_\gamma(t)|^2 dt.$$

Definition (2/2)

Mit der Plancherel-Formel folgt außerdem

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\Phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \|\Phi_\gamma\|^2,$$

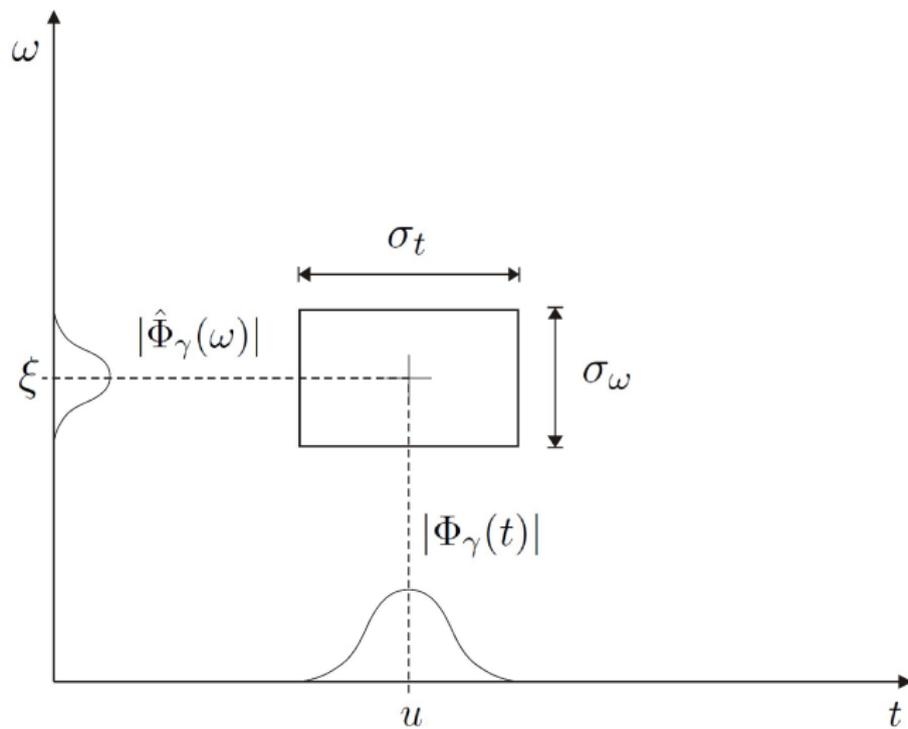
woraus dann die Definition des Zentrums bezüglich der Frequenz von Φ_γ folgt

$$\xi_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{\Phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega.$$

Analog ist auch hier die Streubreite bezüglich der Frequenz um ξ_γ gegeben durch

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int (\omega - \xi_\gamma)^2 |\hat{\Phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega.$$

Heisenberg-Boxen



Gefensterte Fourier-Transformation

Sei $g(t) = g(-t)$ ein reelles und symmetrisches Zeit-Frequenz-Atom. Diese, auch Fenster genannte Funktion, wird um u verschoben und bezüglich der Frequenz ξ moduliert. Die entstehenden Funktionen sind normiert und haben die Form

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u) \exp(i\xi t).$$

Gefensterte Fourier-Transformation

Sei $g(t) = g(-t)$ ein reelles und symmetrisches Zeit-Frequenz-Atom. Diese, auch Fenster genannte Funktion, wird um u verschoben und bezüglich der Frequenz ξ moduliert. Die entstehenden Funktionen sind normiert und haben die Form

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u) \exp(i\xi t).$$

Definition: Gefensterte Fourier-Transformation

Die gefensterte Fourier-Transformation für Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t - u) \exp(-i\xi t) dt.$$

Gefensterte Fourier-Transformation

Sei $g(t) = g(-t)$ ein reelles und symmetrisches Zeit-Frequenz-Atom. Diese, auch Fenster genannte Funktion, wird um u verschoben und bezüglich der Frequenz ξ moduliert. Die entstehenden Funktionen sind normiert und haben die Form

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u) \exp(i\xi t).$$

Definition: Gefensterte Fourier-Transformation

Die gefensterte Fourier-Transformation für Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t - u) \exp(-i\xi t) dt.$$

Die obige Transformation ist auch als Short-Time-Fourier-Transformation bekannt.

Gefensterte Fourier-Transformation

Da es sich bei den gewählten Fensterfunktionen $g_{u,\xi}(t) = g(t - u) \exp(i\xi t)$ um symmetrische Funktionen handelt, liegt ihr Mittelpunkt bei u , wobei die Zeitausdehnung von $g_{u,\xi}(t)$ nicht von u und ξ abhängt, daher gilt

$$\sigma_t^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - u)^2 |g_{u,\xi}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt.$$

Gefensterte Fourier-Transformation

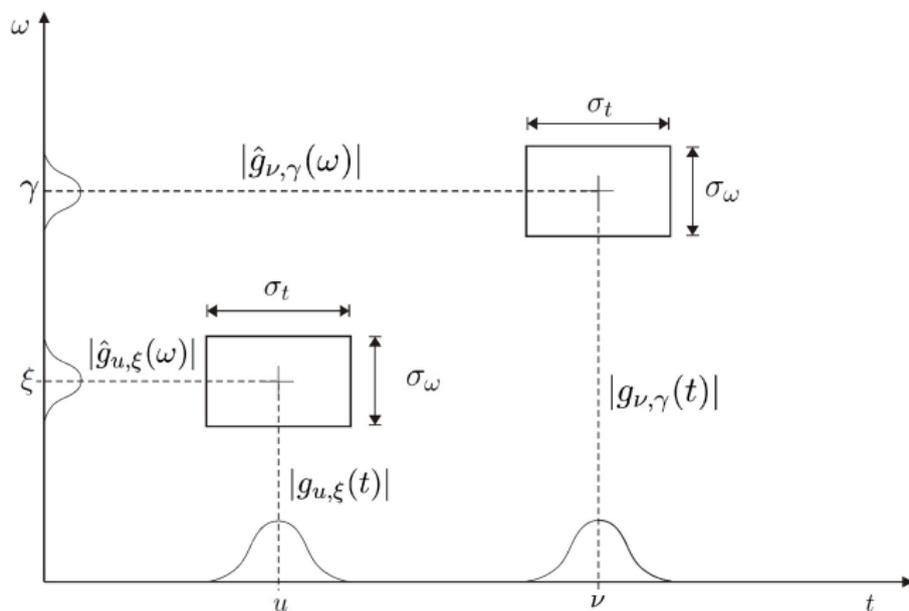
Da es sich bei den gewählten Fensterfunktionen $g_{u,\xi}(t) = g(t - u) \exp(i\xi t)$ um symmetrische Funktionen handelt, liegt ihr Mittelpunkt bei u , wobei die Zeitausdehnung von $g_{u,\xi}(t)$ nicht von u und ξ abhängt, daher gilt

$$\sigma_t^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - u)^2 |g_{u,\xi}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt.$$

Analog gilt diese Translationsinvarianz in (u, ξ) auch für die Fourier-Transformierte \hat{g} von g , denn auch sie ist symmetrisch und reell. Man erhält

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\omega - \xi)^2 |\hat{g}_{u,\xi}(\omega)| d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{g}(\omega)| d\omega.$$

Heisenberg-Boxen



Wenn die Zeit-Frequenz-Indizes (u, ξ) über \mathbb{R}^2 variieren, überdecken die Heisenberg-Boxen der Fensterfunktionen die ganze Zeit-Frequenz-Ebene.

Man kann davon ausgehen, dass man das Signal $f(t)$ vollständig aus seiner gefensterten Fourier-Transformation $Sf(u, \xi)$ zurückgewinnen kann. Dies zeigt der folgende Satz ebenso wie den Erhalt der Gesamtenergie.

Man kann davon ausgehen, dass man das Signal $f(t)$ vollständig aus seiner gefensterten Fourier-Transformation $Sf(u, \xi)$ zurückgewinnen kann. Dies zeigt der folgende Satz ebenso wie den Erhalt der Gesamtenergie.

Satz: Rekonstruktionsformel der gefensterten FT

Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) g(t - u) \exp(i\xi t) d\xi du \quad (1)$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |Sf(u, \xi)|^2 d\xi du. \quad (2)$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (1/6)

Beweis Angenommen, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zu Anfang wird die Fourier-Transformation von $f_\xi(u) = Sf(u, \xi)$ berechnet, wozu jedoch zunächst einige Umformungen erforderlich sind:

$$f_\xi(u) := Sf(u, \xi)$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (1/6)

Beweis Angenommen, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zu Anfang wird die Fourier-Transformation von $f_\xi(u) = Sf(u, \xi)$ berechnet, wozu jedoch zunächst einige Umformungen erforderlich sind:

$$f_\xi(u) := Sf(u, \xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u) \exp(-i\xi t) dt$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (1/6)

Beweis Angenommen, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zu Anfang wird die Fourier-Transformation von $f_\xi(u) = Sf(u, \xi)$ berechnet, wozu jedoch zunächst einige Umformungen erforderlich sind:

$$f_\xi(u) := Sf(u, \xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u) \exp(-i\xi t) dt$$

$$\stackrel{\cdot 1}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u) \exp(-i\xi t) \exp(-i\xi u) \exp(i\xi u) dt$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (1/6)

Beweis Angenommen, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zu Anfang wird die Fourier-Transformation von $f_\xi(u) = Sf(u, \xi)$ berechnet, wozu jedoch zunächst einige Umformungen erforderlich sind:

$$f_\xi(u) := Sf(u, \xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u) \exp(-i\xi t) dt$$

$$\stackrel{\cdot 1}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u) \exp(-i\xi t) \exp(-i\xi u) \exp(i\xi u) dt$$

$$= \exp(-i\xi u) \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u) \exp(i\xi(u-t)) dt$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (1/6)

Beweis Angenommen, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zu Anfang wird die Fourier-Transformation von $f_\xi(u) = Sf(u, \xi)$ berechnet, wozu jedoch zunächst einige Umformungen erforderlich sind:

$$f_\xi(u) := Sf(u, \xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u) \exp(-i\xi t) dt$$

$$\stackrel{\cdot 1}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u) \exp(-i\xi t) \exp(-i\xi u) \exp(i\xi u) dt$$

$$= \exp(-i\xi u) \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u) \exp(i\xi(u-t)) dt$$

$$\stackrel{g \text{ symm.}}{=} \exp(-i\xi u) \int_{\mathbb{R}} f(t)g(u-t) \exp(i\xi(u-t)) dt$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (1/6)

Beweis Angenommen, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zu Anfang wird die Fourier-Transformation von $f_\xi(u) = Sf(u, \xi)$ berechnet, wozu jedoch zunächst einige Umformungen erforderlich sind:

$$f_\xi(u) := Sf(u, \xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u) \exp(-i\xi t) dt$$

$$\stackrel{\cdot 1}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u) \exp(-i\xi t) \exp(-i\xi u) \exp(i\xi u) dt$$

$$= \exp(-i\xi u) \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-u) \exp(i\xi(u-t)) dt$$

$$\stackrel{g \text{ symm.}}{=} \exp(-i\xi u) \int_{\mathbb{R}} f(t)g(u-t) \exp(i\xi(u-t)) dt$$

$$= \exp(-i\xi u) [f \star g_\xi](u).$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (2/6)

Mit dieser Gleichheit kann nun die Fourier-Transformation von $f_\xi(u)$ berechnet werden und es ergibt sich:

$$\hat{f}_\xi(\omega) = \widehat{Sf(\cdot, \xi)}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \exp(-iu\omega) du$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (2/6)

Mit dieser Gleichheit kann nun die Fourier-Transformation von $f_\xi(u)$ berechnet werden und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{f}_\xi(\omega) = \widehat{Sf(\cdot, \xi)}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \exp(-iu\omega) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-iu(\omega + \xi)) [f(u) \star g_\xi(u)] du\end{aligned}$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (2/6)

Mit dieser Gleichheit kann nun die Fourier-Transformation von $f_\xi(u)$ berechnet werden und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{f}_\xi(\omega) &= \widehat{Sf(\cdot, \xi)}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \exp(-iu\omega) du \\ & &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-iu(\omega + \xi)) [f(u) \star g_\xi(u)] du \\ & \stackrel{\text{Modulation}}{=} &= \widehat{[f \star g_\xi]}(\omega + \xi)\end{aligned}$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (2/6)

Mit dieser Gleichheit kann nun die Fourier-Transformation von $f_\xi(u)$ berechnet werden und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{f}_\xi(\omega) &= \widehat{Sf(\cdot, \xi)}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \exp(-iu\omega) du \\ & &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-iu(\omega + \xi)) [f(u) \star g_\xi(u)] du \\ \stackrel{\text{Modulation}}{=} & \widehat{[f \star g_\xi]}(\omega + \xi) \\ \stackrel{\text{Faltung}}{=} & \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}_\xi(\omega + \xi)\end{aligned}$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (2/6)

Mit dieser Gleichheit kann nun die Fourier-Transformation von $f_\xi(u)$ berechnet werden und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{f}_\xi(\omega) &= \widehat{Sf(\cdot, \xi)}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \exp(-iu\omega) du \\ & &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-iu(\omega + \xi)) [f(u) \star g_\xi(u)] du \\ \stackrel{\text{Modulation}}{=} & \widehat{[f \star g_\xi]}(\omega + \xi) \\ \stackrel{\text{Faltung}}{=} & \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}_\xi(\omega + \xi) \\ & = \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega).\end{aligned}$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (2/6)

Mit dieser Gleichheit kann nun die Fourier-Transformation von $f_\xi(u)$ berechnet werden und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{f}_\xi(\omega) &= \widehat{Sf(\cdot, \xi)}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \exp(-iu\omega) du \\ & &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-iu(\omega + \xi)) [f(u) \star g_\xi(u)] du \\ & \stackrel{\text{Modulation}}{=} & \widehat{[f \star g_\xi]}(\omega + \xi) \\ & \stackrel{\text{Faltung}}{=} & \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}_\xi(\omega + \xi) \\ & &= \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega).\end{aligned}$$

Nun wird noch die Fourier-Transformation von $g(u - t)$ benötigt, welche gegeben ist durch

$$\widehat{g(u - t)} = \hat{g}(\omega) \exp(-it\omega).$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (3/6)

Wendet man nun die Plancherel-Gleichung bezüglich u auf die rechte Seite der Gleichung (1) an und setzt dann die vorbereiteten Umformungen ein, erhält man:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(i\xi t) \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \overline{g(t-u)} du \right) d\xi$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (3/6)

Wendet man nun die Plancherel-Gleichung bezüglich u auf die rechte Seite der Gleichung (1) an und setzt dann die vorbereiteten Umformungen ein, erhält man:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(i\xi t) \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \overline{g(t-u)} du \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(i\xi t) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega) \exp(-it\omega)} d\omega \right) d\xi \end{aligned}$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (3/6)

Wendet man nun die Plancherel-Gleichung bezüglich u auf die rechte Seite der Gleichung (1) an und setzt dann die vorbereiteten Umformungen ein, erhält man:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(i\xi t) \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \overline{g(t-u)} du \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(i\xi t) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega) \exp(-it\omega)} d\omega \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(i\xi t) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) |\hat{g}(\omega)|^2 \exp(it\omega) d\omega \right) d\xi \end{aligned}$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (3/6)

Wendet man nun die Plancherel-Gleichung bezüglich u auf die rechte Seite der Gleichung (1) an und setzt dann die vorbereiteten Umformungen ein, erhält man:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(i\xi t) \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) \overline{g(t-u)} du \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(i\xi t) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega) \exp(-it\omega)} d\omega \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(i\xi t) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) |\hat{g}(\omega)|^2 \exp(it\omega) d\omega \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) |\hat{g}(\omega)|^2 \exp[it(\xi + \omega)] d\omega \right) d\xi \end{aligned}$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (4/6)

Da $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, kann man den Satz von Fubini anwenden und die Integrations-Reihenfolge vertauschen und erhält

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) |\hat{g}(\omega)|^2 \exp[it(\xi + \omega)] d\omega \right) d\xi$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (4/6)

Da $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, kann man den Satz von Fubini anwenden und die Integrations-Reihenfolge vertauschen und erhält

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) |\hat{g}(\omega)|^2 \exp[it(\xi + \omega)] d\omega \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \exp[it(\xi + \omega)] d\xi \right) d\omega \end{aligned}$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (4/6)

Da $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, kann man den Satz von Fubini anwenden und die Integrations-Reihenfolge vertauschen und erhält

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) |\hat{g}(\omega)|^2 \exp[it(\xi + \omega)] d\omega \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \exp[it(\xi + \omega)] d\xi \right) d\omega \end{aligned}$$

wobei

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \exp[it(\xi + \omega)] d\xi = f(t)$$

aufgrund der Inversen Fourier-Transformation gilt.

Beweis der Rekonstruktionsformel (5/6)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \exp[it(\xi + \omega)] d\xi \right)}_{=f(t)} d\omega$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (5/6)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \exp[it(\xi + \omega)] d\xi \right)}_{=f(t)} d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 f(t) d\omega$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (5/6)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \exp[it(\xi + \omega)] d\xi}_{=f(t)} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 f(t) d\omega \\ &= f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (5/6)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega + \xi) \exp[it(\xi + \omega)] d\xi}_{=f(t)} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 f(t) d\omega \\ &= f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, wird wie im Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation, die Dichte von $f(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ aufgenutzt, und es folgt die gewünschte Behauptung für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$

Beweis der Rekonstruktionsformel (6/6)

Nun zum zweiten Teil des Satzes und damit zum Beweis von (2). Da die Fourier-Transformation von $Sf(u, \xi)$ bezüglich u wie bereits gezeigt $\hat{f}(\omega + \xi)\hat{g}(\omega)$ entspricht, erhält man durch Anwendung der Plancherel-Formel auf die rechte Seite der Gleichung (2)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |Sf(u, \xi)|^2 du d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega + \xi)\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right) d\xi.$$

Beweis der Rekonstruktionsformel (6/6)

Nun zum zweiten Teil des Satzes und damit zum Beweis von (2). Da die Fourier-Transformation von $Sf(u, \xi)$ bezüglich u wie bereits gezeigt $\hat{f}(\omega + \xi)\hat{g}(\omega)$ entspricht, erhält man durch Anwendung der Plancherel-Formel auf die rechte Seite der Gleichung (2)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |Sf(u, \xi)|^2 du d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega + \xi)\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right) d\xi.$$

Mit dem Satz von Fubini und der Formel von Plancherel kann man zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega + \xi)|^2 d\xi &= \|f\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Die gefensterete Fourier-Transformation stellt ein 1-dimensionales Signal $f(t)$ durch ein 2-dimensionales Integral dar.

Die gefensterterte Fourier-Transformation stellt ein 1-dimensionales Signal $f(t)$ durch ein 2-dimensionales Integral dar.

Die Energierhaltung zeigt, dass $Sf(u, \xi) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ gilt. Da aber $Sf(u, \xi)$ redundant ist, ist nicht jedes $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ die gefensterterte Fourier-Transformation eines Signals $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Die gefensterterte Fourier-Transformation stellt ein 1-dimensionales Signal $f(t)$ durch ein 2-dimensionales Integral dar.

Die Energierhaltung zeigt, dass $Sf(u, \xi) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ gilt. Da aber $Sf(u, \xi)$ redundant ist, ist nicht jedes $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ die gefensterterte Fourier-Transformation eines Signals $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Der nächste Satz gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\Phi(u, \xi)$ an, sodass sie wirklich eine gefensterterte Fourier-Transformation beschreibt.

Satz vom reproduzierenden Kern

Sei $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Es existiert ein $f \in L^2(\mathbb{R})$ so, dass $\Phi(u, \xi) = Sf(u, \xi)$ genau dann wenn es ein

$$\Phi(u_0, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, \xi) K(u_0, u, \xi_0, \xi) du d\xi$$

gibt mit

$$\begin{aligned} K(u_0, u, \xi_0, \xi) &= \langle g_{u, \xi}, g_{u_0, \xi_0} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t-u) \exp(i\xi t) \overline{g(t-u_0) \exp(i\xi_0 t)} dt. \end{aligned}$$

Beweis des Satzes vom reproduzierenden Kern (1/4)

Beweis: Angenommen es existiert eine Funktion f so, dass $\Phi(u, \xi) = Sf(u, \xi)$ gilt.

Beweis des Satzes vom reproduzierenden Kern (1/4)

Beweis: Angenommen es existiert eine Funktion f so, dass $\Phi(u, \xi) = Sf(u, \xi)$ gilt. Ersetzt man nun in der gefensterter Fourier-Transformation die Funktion f durch das Integral aus Satz 3, so erhält man

$$Sf(u_0, \xi_0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t) dt$$

Beweis des Satzes vom reproduzierenden Kern (1/4)

Beweis: Angenommen es existiert eine Funktion f so, dass $\Phi(u, \xi) = Sf(u, \xi)$ gilt. Ersetzt man nun in der gefensterter Fourier-Transformation die Funktion f durch das Integral aus Satz 3, so erhält man

$$Sf(u_0, \xi_0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi)g(t - u) \exp(i\xi t) dud\xi \right) \overline{g(t - u_0) \exp(i\xi_0 t)} dt.$$

Durch Vertauschung der Integrale bezüglich u und ξ mit dem von t erhält man

$$\Phi(u_0, \xi_0) = Sf(u_0, \xi_0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) g(t - u) \exp(i\xi t) du d\xi \right) \overline{g(t - u_0) \exp(i\xi_0 t)} dt$$

Beweis des Satzes vom reproduzierenden Kern (2/4)

$$\Phi(u_0, \xi_0) = Sf(u_0, \xi_0)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) g(t-u) \exp(i\xi t) du d\xi \right) \overline{g(t-u_0) \exp(i\xi_0 t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S(u, \xi) \left(\int_{\mathbb{R}} g(t-u) \exp(i\xi t) \overline{g(t-u_0) \exp(i\xi_0 t)} dt \right) du d\xi \end{aligned}$$

$$\Phi(u_0, \xi_0) = Sf(u_0, \xi_0)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) g(t-u) \exp(i\xi t) du d\xi \right) \overline{g(t-u_0) \exp(i\xi_0 t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S(u, \xi) \left(\int_{\mathbb{R}} g(t-u) \exp(i\xi t) \overline{g(t-u_0) \exp(i\xi_0 t)} dt \right) du d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, \xi) K(u_0, u, \xi_0, \xi) du d\xi \end{aligned}$$

Dies zeigt die behauptete Darstellung von $Sf(u, \xi) = \Phi(u, \xi)$.

Beweis des Satzes vom reproduzierenden Kern (3/4)

Um zu beweisen, dass Φ im Bild von $Sf(u, \xi)$ ist, schreiben wir $f(t)$ wieder als Integral wie in Satz 3.(4) und zeigen, dass dieses $\Phi(u, \xi) = Sf(u, \xi)$ impliziert.

Beweis des Satzes vom reproduzierenden Kern (3/4)

Um zu beweisen, dass Φ im Bild von $Sf(u, \xi)$ ist, schreiben wir $f(t)$ wieder als Integral wie in Satz 3.(4) und zeigen, dass dieses $\Phi(u, \xi) = Sf(u, \xi)$ impliziert.

Sei

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, \xi) g(t - u) \exp(i\xi t) d\xi du.$$

Beweis des Satzes vom reproduzierenden Kern (3/4)

Um zu beweisen, dass Φ im Bild von $Sf(u, \xi)$ ist, schreiben wir $f(t)$ wieder als Integral wie in Satz 3.(4) und zeigen, dass dieses $\Phi(u, \xi) = Sf(u, \xi)$ impliziert.

Sei

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, \xi) g(t - u) \exp(i\xi t) d\xi du.$$

Nun wird die gefensterterte Fourier-Transformation auf f angewendet.

$$Sf(u_0, \xi_0) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t) dt$$

Beweis des Satzes vom reproduzierenden Kern (4/4)

$$Sf(u_0, \xi_0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, \xi) g(t - u) \exp(i\xi t) d\xi du g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t) dt$$

Beweis des Satzes vom reproduzierenden Kern (4/4)

$$Sf(u_0, \xi_0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, \xi) g(t - u) \exp(i\xi t) d\xi du g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, \xi) \left[\int_{\mathbb{R}} \underbrace{g(t - u) \exp(i\xi t) \overline{g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t)}}_{\langle g_{\xi, u}, g_{\xi_0, u_0} \rangle} dt \right] dud\xi$$

Beweis des Satzes vom reproduzierenden Kern (4/4)

$$Sf(u_0, \xi_0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, \xi) g(t - u) \exp(i\xi t) d\xi du g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, \xi) \left[\int_{\mathbb{R}} \underbrace{g(t - u) \exp(i\xi t) \overline{g(t - u_0) \exp(-i\xi_0 t)}}_{\langle g_{\xi, u}, g_{\xi_0, u_0} \rangle} dt \right] dud\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(u, \xi) K(u_0, u, \xi_0, \xi) dud\xi$$

$$\stackrel{(5)}{=} \Phi(u_0, \xi_0)$$

- Heisenbergsche Unschärferelation:

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}.$$

- Es existiert kein Signal mit einem kompakten Träger bezüglich der Zeit, deren Fourier-Transformierte ebenfalls einen kompakten Träger bezüglich der Frequenz besitzt.
- Die gefensterterte Fourier-Transformation ist gegeben durch

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u, \xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t - u) \exp(-i\xi t) dt.$$

mit der Rekonstruktionsformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Sf(u, \xi) g(t - u) \exp(i\xi t) d\xi du \quad (3)$$