Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Mehrgitterverfahren — WS 2013/2014

Prof. Dr. Arnold Reusken — Dipl.-Math. Patrick Esser

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für $t \in \mathbb{R}$ definiere

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für $t \in (0.5, 1)$ die Matrix $\mathbf{A}(t)$ positiv definit ist. Sei jetzt $t \in (0.5, 1)$. Wir betrachten ein Gleichungssystem $\mathbf{A}(t)\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren zur Lösung dieses Gleichungssystems nicht für jeden Startwert konvergiert, wohl aber das Gauß-Seidel-Verfahren.

Aufgabe 2

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & \emptyset \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \emptyset & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und $\mathbf{G}_J$ die Iterationsmatrix der Jacobi-Methode angewandt auf $\mathbf{A}$.

a) Zeigen Sie, daß $\rho(\mathbf{G}_J) = 0$ gilt.

b) Für $\mathbf{e}^0 := (1, \dots, 1)^T$, sei $\mathbf{e}^{k+1} = \mathbf{G}_J \mathbf{e}^k$ für $k \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\|\mathbf{e}^{k+1}\|_\infty = \|\mathbf{e}^k\|_\infty = 1 \text{ für } 0 \leq k \leq n-2,$$

$$\|\mathbf{e}^k\|_\infty = 0 \text{ für } k \geq n.$$

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine s.p.d. Matrix. Bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt, so wird durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mathbf{A} := \langle \cdot, \mathbf{A} \cdot \rangle$ ein weiteres Skalarprodukt definiert. Zeigen Sie: Zu $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\mathbf{G}^* := \mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{A}$ die bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mathbf{A}$ adjungierte Matrix (d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle \mathbf{G}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\mathbf{A} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{G}^*\mathbf{y} \rangle_\mathbf{A}$, und es gilt $\mathbf{G}^{**} = \mathbf{G}$).

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine s.p.d. Matrix und $\mathbf{D} := \operatorname{diag}(\mathbf{A})$. Zeigen Sie:

a) Es existiert ein $c_0 > 0$, so dass $2c_0\mathbf{D} - \mathbf{A}$ s.p.d. ist.

b) Für $\mathbf{G} = \mathbf{I} - \frac{1}{c_0}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$ gilt $\rho(\mathbf{G}) < 1$.

Aufgabe 5

Gegeben seien $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$, wobei $\mathbf{A}$ strikt diagonaldominant ist, d. h.

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Das Jacobi-Verfahren ist dann konvergent, denn für die zugehörige Iterationsmatrix $\mathbf{G}_J = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ gilt:

$$\rho(\mathbf{G}_J) \leq \|\mathbf{G}_J\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j\neq i} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < 1.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass das Gauß-Seidel-Verfahren mit der Iterationsmatrix $\mathbf{G}_{GS} = \mathbf{I} - (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{A} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$ ebenfalls konvergent ist, wobei sogar gilt:

$$\|\mathbf{G}_{GS}\|_\infty \leq \|\mathbf{G}_J\|_\infty < 1.$$

a) Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{z} := \mathbf{G}_{GS}\mathbf{x}$. Zeigen Sie per Induktion nach i:

$$|z_i| \leq \sum_{j\neq i} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \|\mathbf{x}\|_\infty$$

Hinweis: $z_i = x_i - \dfrac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{j<i} a_{i,j}z_j + \sum_{j\geq i} a_{i,j}x_j\right) = -\dfrac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{j<i} a_{i,j}z_j + \sum_{j>i} a_{i,j}x_j\right).$

b) Beweisen Sie damit: $\|\mathbf{G}_{GS}\|_\infty \leq \|\mathbf{G}_J\|_\infty$.