Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Mehrgitterverfahren — WS 2013/2014

Prof. Dr. Arnold Reusken — Dipl.-Math. Patrick Esser

2. Übungsblatt

Alle auf diesem Übungsblatt auftretenden Ungleichungen zwischen Matrizen oder Vektoren sind komponentenweise zu verstehen.

Aufgabe 1

Definition: Ein Matrix-Splitting $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ heißt regulär, falls $\mathbf{M}$ regulär ist und außerdem gilt $\mathbf{M}^{-1} \geq 0$ und $\mathbf{M} \geq \mathbf{A}$.

Ohne Beweis kann das folgende Lemma 1 verwendet werden: Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbf{A} \geq 0$, dann ist $\rho(\mathbf{A})$ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ und außerdem existiert ein Vektor $\mathbf{v}$ mit $0 \neq \mathbf{v} \geq 0$, so dass $\mathbf{A}\mathbf{v} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{v}$.

Beweisen Sie folgende Aussage:
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. Außerdem gelte $\mathbf{A}^{-1} \geq 0$ und $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ sei ein reguläres Matrixsplitting (vgl. Definition oben), dann gilt:

$$\rho(\mathbf{C}) = \rho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \frac{\rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})}{1 + \rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})} < 1$$

Gehen Sie hierbei wie folgt vor:

1. Leiten Sie die Identitäten $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{C} \quad (*)$ und $\mathbf{C} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} \quad (**)$ her.
2. Überprüfen Sie die Bedingungen des Lemmas für die Matrix $\mathbf{C}$, leiten Sie die Identität $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{v} = \frac{\rho(\mathbf{C})}{1-\rho(\mathbf{C})}\mathbf{v}$ her und schließen Sie auf $\rho(\mathbf{C}) < 1$.
3. Beweisen Sie mit Hilfe der Identität aus 2. die Abschätzung $\rho(\mathbf{C}) \leq \frac{\rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})}{1+\rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})}$.
4. Verfolgen Sie ein analoges Vorgehen mit Gleichung $(**)$, um die Abschätzung in die andere Richtung $\frac{\rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})}{1+\rho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N})} \leq \rho(\mathbf{C})$ zu beweisen.

Aufgabe 2

<u>Definition:</u> Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *M-Matrix*, falls $\mathbf{A}$ nicht singulär ist und die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

$$\mathbf{A}^{-1} \geq 0 \text{ (komponentenweise)}, \quad a_{ij} \leq 0 \quad \forall\, i \neq j$$

Zeigen Sie: Die Diagonaleinträge einer M-Matrix sind strikt positiv.

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{A}$ eine M-Matrix. Angenommen die Matrix $\mathbf{B}$ hat die Eigenschaften $b_{ij} \leq 0$ für alle $i \neq j$ und $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$, dann ist $\mathbf{B}$ ebenfalls eine M-Matrix. Außerdem gilt $0 \leq \mathbf{B}^{-1} \leq \mathbf{A}^{-1}$.

Gehen Sie bei dem Beweis wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass das Matrixsplitting $\mathbf{A} = \mathbf{D}_A - \mathbf{N}$ mit $\mathbf{D}_A = \operatorname{diag}(\mathbf{A})$ regulär ist.

b) Wenden Sie dann die Aussagen aus Aufgabe 1 an, um zu zeigen, dass für $\mathbf{C}_A = \mathbf{I} - \mathbf{D}_A^{-1}\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}_B = \mathbf{I} - \mathbf{D}_B^{-1}\mathbf{B}$ folgende Aussagen gelten:

$$0 \leq \mathbf{C}_B \leq \mathbf{C}_A \text{ und } \rho(\mathbf{C}_B) \leq \rho(\mathbf{C}_A) < 1$$

c) Beweisen Sie die folgenden Identitäten: $\mathbf{A}^{-1} = (\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}_A^k)\mathbf{D}_A^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1} = (\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}_B^k)\mathbf{D}_B^{-1}$. Schließen Sie aus letzterer darauf, dass $\mathbf{B}$ eine M-Matrix ist. Zeigen Sie als letztes noch die Ungleichung $\mathbf{B}^{-1} \leq \mathbf{A}^{-1}$, indem Sie $\mathbf{D}_B^{-1} \leq \mathbf{D}_A^{-1}$ beweisen und die vorher bewiesenen Identitäten zur Hilfe nehmen.

Aufgabe 4

Die im CG-Verfahren auftretenden Suchrichtungen und Schrittweiten können wie folgt bestimmt werden (die Notation richtet sich nach dem Skript, vergleiche (7.18)):

$$\mathbf{p}^k = \mathbf{r}^k - \frac{\langle \mathbf{r}^k, \mathbf{A}\mathbf{p}^{k-1}\rangle}{\langle \mathbf{p}^{k-1}, \mathbf{A}\mathbf{p}^{k-1}\rangle}\mathbf{p}^{k-1}\,,\ \alpha_{\text{opt}}(\mathbf{x}^k, \mathbf{p}^k) = -\frac{\langle \mathbf{p}^k, \mathbf{r}^k\rangle}{\langle \mathbf{p}^k, \mathbf{A}\mathbf{p}^k\rangle}$$

Beweisen Sie, dass die folgende Darstellung äquivalent zu obiger ist:

$$\mathbf{p}^k = \mathbf{r}^k + \frac{\langle \mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k\rangle}{\langle \mathbf{r}^{k-1}, \mathbf{r}^{k-1}\rangle}\mathbf{p}^{k-1}\,,\ \alpha_{\text{opt}}(\mathbf{x}^k, \mathbf{p}^k) = -\frac{\langle \mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k\rangle}{\langle \mathbf{p}^k, \mathbf{A}\mathbf{p}^k\rangle}$$

Aufgabe 5

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ regulär. Setze zunächst $\mathbf{q}^1 := \frac{\mathbf{r}^0}{\|\mathbf{r}^0\|}$. Für $j \geq 1$ iteriert man danach wie folgt (Arnoldi):

$$\tilde{\mathbf{q}}^{j+1} := \mathbf{A}\mathbf{q}^j \qquad \text{(Vergrößerung des Ansatzraumes)}$$

$$\text{für } i = 1, \ldots, j: \ h_{ij} := \langle \tilde{\mathbf{q}}^{j+1}, \mathbf{q}^j \rangle \,,\ \tilde{\mathbf{q}}^{j+1} := \tilde{\mathbf{q}}^{j+1} - h_{ij}\mathbf{q}^i \qquad \text{(Iteration zum Orthogonalisieren)}$$

$$h_{j+1,j} := \|\tilde{\mathbf{q}}^{j+1}\|, \quad \mathbf{q}^{j+1} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}^{j+1}}{h_{j+1,j}} \qquad \text{(Normalisieren)}$$

(hierbei ist $\mathbf{r}^k = \mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}$).
Beweisen Sie: Die so entstehenden Iterierten $\mathbf{q}^1, \ldots$ stehen paarweise orthogonal zueinander.