Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Mehrgitterverfahren — WS 2013/2014

Prof. Dr. Arnold Reusken — Dipl.-Math. Patrick Esser

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die im CG-Verfahren auftretenden Suchrichtungen und Schrittweiten können wie folgt bestimmt werden (die Notation richtet sich nach dem Skript, vergleiche (7.18)):

$$\mathbf{p}^k = \mathbf{r}^k - \frac{\langle \mathbf{r}^k, \mathbf{A}\mathbf{p}^{k-1}\rangle}{\langle \mathbf{p}^{k-1}, \mathbf{A}\mathbf{p}^{k-1}\rangle}\mathbf{p}^{k-1}\,,\ \alpha_{\mathrm{opt}}(\mathbf{x}^k, \mathbf{p}^k) = -\frac{\langle \mathbf{p}^k, \mathbf{r}^k\rangle}{\langle \mathbf{p}^k, \mathbf{A}\mathbf{p}^k\rangle}$$

Beweisen Sie, dass die folgende Darstellung äquivalent zu obiger ist:

$$\mathbf{p}^k = \mathbf{r}^k + \frac{\langle \mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k\rangle}{\langle \mathbf{r}^{k-1}, \mathbf{r}^{k-1}\rangle}\mathbf{p}^{k-1}\,,\ \alpha_{\mathrm{opt}}(\mathbf{x}^k, \mathbf{p}^k) = -\frac{\langle \mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k\rangle}{\langle \mathbf{p}^k, \mathbf{A}\mathbf{p}^k\rangle}$$

Bemerkung Laut Herrn Reusken soll diese Aufgabe nicht in der Vorlesung behandelt worden sein.

Aufgabe 2

Wir wollen das Modellproblem

$$u'' = f$$

auf $(0,1)$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen mit Hilfe von linearen finiten Elementen lösen. Schreiben Sie ein Programm in einer Programmiersprache Ihrer Wahl (z.B. C++, Python, Matlab), welches die entsprechende Matrix für beliebige Schrittweiten $h = 1/N$ aufstellt. Lösen Sie es mit Hilfe folgender Methoden

- Jacobi
- Gauss-Seidel
- CG

und vergleichen Sie die Iterationszahlen in Abhängigkeit von h. Als rechte Seite nehmen Sie $f(x) = 1.0$. Testen Sie, ob das Verhalten der iterativen Löser abhängig vom Startwert ist.

Bemerkung: Hauptaugenmerk der Aufgabe liegt auf den iterativen Lösern, ich kann gerne Code für die Matrix bereitstellen. Anstatt ein Programm selbst zu schreiben, können auch externe Pakete oder Lösungen verwendet werden, z.B. dune, deal II, freefem, ...

Aufgabe 3

Wie aus der Vorlesung bekannt, ist das Verfahren der konjugierten Gradienten (CG) sehr gut geeignet, Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A zu lösen. Wenn A nicht symmetrisch ist, lässt sich CG auf die Normalengleichungen $A^T Ax = A^T b$ anwenden.

a) Was spricht gegen dieses Vorgehen, wann könnte es trotzdem Sinn machen?

b) Leiten Sie einen effizienten Algorithmus — basierend auf CG — zur Lösung der Normalengleichungen her, ohne $A^T A$ explizit zu berechnen. Ebenfalls sollte die Berechnung von $A^T Ap_i$ vermieden werden.