Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Mehrgitterverfahren — WS 2013/2014

Prof. Dr. Arnold Reusken — Dipl.-Math. Patrick Esser

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und mit vollem Rang, und sei $r_0 \in \mathbb{R}^n \neq 0$ beliebig (wir arbeiten unter der Annahme 7.2.1 aus dem Skript). Zeigen Sie, dass

$$\langle p, q \rangle_{r_0} := \langle p(A) r_0, q(A) r_0 \rangle$$

ein Skalarprodukt im Raum $\mathbb{P}_{n-1}$ der Polynome vom Grad höchstens $n-1$ ist.

Aufgabe 2

Eine Folge orthogonaler Polynome bezüglich eines Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erfüllt eine Drei-Term-Rekursion der Form

$$p_{j+1}(x) = (x - \alpha_j) p_j(x) - \beta_j^2 p_{j-1}(x), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $\beta_0^2 = 0$, $p_0(x) = 1$ und $p_{-1}(x) = 0$.

a) Wie kann man mit Hilfe dieser Drei-Term-Rekursion die Folge $\{r_0, Ar_0, \ldots, Ar_{k-1}\}$ orthogonalisieren?

b) Berechnen Sie die Koeffizienten α_j, β_j^2. (**Hinweis:** Induktion)

c) Zeigen Sie, dass $\beta_j^2 > 0$ ist. (Hier spielt die Symmetrie von A eine wichtige Rolle.)

Aufgabe 3

Das Problem des Algorithmus' aus Aufgabe 2 ist, dass die Normen der Vektoren beliebig groß (oder beliebig klein) werden können.

a) Zeigen Sie, dass die Drei-Term-Rekursion

$$\beta_{k+1} \bar{p}_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) \bar{p}_k(x) - \beta_k \bar{p}_{k-1}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

orthonormale Polynome liefert. Wie kann man obige Rekursion in der Praxis durchführen? (Anders gefragt, wie kann man die β_k berechnen, ohne die β_k^2 zu berechnen?)

b) Leiten Sie aus dieser Drei-Term-Rekursion den Lanczos-Algorithmus ((7.4 im Skript) her.

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe wollen wir das (vorkonditionierte) CG-Verfahren auf ein Sattelpunktproblem anwenden. Sei dazu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{A}$ symmetrisch positiv definit ist und $\mathbf{B}$ eine rechteckige Matrix mit vollem Rang ist. Ferner seien Vorkonditionierer $\mathbf{Q}_A$ für $\mathbf{A}$ und $\mathbf{Q}_S$ für das Schurkomplement $\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$ gegeben mit

$$\alpha_0 \mathbf{A} \leq \mathbf{Q}_A < \mathbf{A}, \tag{2}$$

wobei $0 < \alpha_0 < 1$ konstant ist.

Somit ist $(\mathbf{A} - \mathbf{Q}_A)$ symmetrisch positiv definit und die Bilinearform

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] = \langle (\mathbf{A} - \mathbf{Q}_A) x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \tag{3}$$

definiert ein inneres Produkt. Multipliziere nun (1) vom links mit

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_A^{-1} & 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{Q}_A^{-1} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

und betrachte das äquivalente System

$$\hat{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\hat{\mathbf{K}} := \mathbf{G}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{B} & \mathbf{B}\mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{B}^T \end{pmatrix} \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $\tilde{\mathbf{M}} := \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \emptyset \\ \emptyset & \mathbf{S} \end{pmatrix}$ bezüglich $[.,.]$ symmetrisch positiv definit ist.

b) Zeigen Sie: $\hat{\mathbf{K}}$ ist bezüglich $[.,.]$ symmetrisch positiv definit. **Hinweis:** Es gilt (ohne Beweis)

$$\lambda_0 \left[\tilde{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \leq \left[\hat{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \leq \lambda_1 \left[\tilde{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]$$

mit Konstanten $\lambda_0, \lambda_1 > 0$.