Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Mehrgitterverfahren — WS 2013/2014

Prof. Dr. Arnold Reusken — Dipl.-Math. Patrick Esser

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Betrachten Sie das eindimensionale Modellproblem für ein Zweigitterverfahren aus dem Skript (Kapitel 2, (3)-(16)).
Den in der Problemstellung geforderten Nullranddaten wird Tribut gezollt, indem nur die Freiheitsgrade im Inneren berücksichtigt werden. Bei Schrittweite h_l gibt es $n_l = \frac{1}{h_l} + 1$ Gitterpunkte von denen aber nur $n_l - 2$ wirklich Freiheitsgrade sind. Die Steifigkeitsmatrix A_l hat darum die Dimension $n_l - 2 \times n_l - 2$. Ebenso haben die Basisvektoren nur die Dimension $n_l - 2$.
Beweisen Sie die Konvergenz der Methode. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

a) Beweisen Sie, dass die Basisvektoren $z_l^\nu = (w^\nu(\xi_{l,1}), w^\nu(\xi_{l,2}), \ldots, w^\nu(\xi_{l,n_l-2}))^T$, mit $w^\nu(x) = \sqrt{2h_l}\sin(\nu\pi x)$ und $\xi_{l,i} = ih_l$ paarweise orthogonal stehen und normiert sind, d.h. dass gilt:

$$\sum_{j=1}^{n_l-2} \sin(\mu\pi j h_l)\sin(\chi\pi j h_l) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } \mu \neq \chi \\ \frac{1}{2h_l} & , \text{ für } \mu = \chi \end{cases}$$

b) Führen Sie mit den orthogonalen Matrizen

$$Q_l = [z_l^1, z_l^{n_l-2}, z_l^2, z_l^{n_l-3}, \ldots, z_l^{\frac{n_l-1}{2}-1}, z^{\frac{n_l-1}{2}+1}, z_l^{\frac{n_l-1}{2}}] \in \mathbb{R}^{(n_l-2)\times(n_l-2)} \quad \text{(Reihenfolge!)}$$

und

$$Q_{l-1} = [z_{l-1}^1, z_{l-1}^2, \ldots, z_{l-1}^{n_{l-1}-3}, z_{l-1}^{n_{l-1}-2}] = [z_{l-1}^1, z_{l-1}^2, \ldots, z_{l-1}^{\frac{n_l-1}{2}-2}, z_{l-1}^{\frac{n_l-1}{2}-1}] \in \mathbb{R}^{(n_{l-1}-2)\times(n_{l-1}-2)}$$

einen Basiswechsel der Iterationsmatrix $C_{TG,l}(\nu) = (I - p_l A_{l-1}^{-1} r_l A_l) S_l^\nu$ durch, so dass die neue Matrix eine Blockdiagonalstruktur hat:

$$\hat{C}_{TG,l}(\nu) = Q_l^{-1} C_{TG,l}(\nu) Q_l = \begin{pmatrix} C_{TG,l}^{(1)}(\nu) & & & & \\ & C_{TG,l}^{(2)}(\nu) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_{TG,l}^{(n_{l-1})}(\nu) & \\ & & & & C_{TG,l}^{(n_{l-1}+1)}(\nu) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es ergeben sich überall 2×2-Blöcke mit Ausnahme des letzten Blocks, der hat die Dimension 1×1.
Betrachten Sie hierfür die einzelnen Matrizen

$$\hat{S}_l = Q_l^{-1} S_l Q_l,\ \hat{A}_l = Q_l^{-1} A_l Q_l,\ \hat{A}_{l-1} = Q_{l-1}^{-1} A_{l-1} Q_{l-1},\ \hat{p}_l = Q_l^{-1} p_l Q_{l-1},\ \hat{r}_l = Q_{l-1}^{-1} r_l Q_l$$

und deren „Blockstruktur". Als Glätter S_l sei hierbei die Richardson-Iteration gewählt mit $\omega = \frac{h_l^2}{4} \approx \frac{1}{\rho(A_l)}$. Prolongation und Restriktion sehen wie folgt aus:

$$r_l = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_{l-1}-2)\times(n_l-2)} \quad p_l = 2r_l^T \in \mathbb{R}^{(n_l-2)\times(n_{l-1}-2)}$$

Die Steifigkeitsmatrix A_l hat die Form:

$$A_l = \frac{1}{h_l^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_l-2\times n_l-2}$$

Hinweis: Die Basisvektoren z_l^ν sind Eigenvektoren von A_l mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_{\nu,l} = \frac{4}{h_l^2}\sin^2(\frac{\nu\pi h_l}{2})$. Tip: Definieren Sie $s_{\nu,l}^2 = \sin^2(\frac{\nu\pi h_l}{2})$ und $c_{\nu,l}^2 = \cos^2(\frac{\nu\pi h_l}{2})$ und zeigen Sie dann folgende (hilfreiche) Identitäten:

(i) $s_{\nu,l}^2 = c_{n_l-1-\nu,l}^2$

(ii) $s_{\frac{n_l-1}{2},l}^2 = \frac{1}{2}$

(iii) $\sin^2(\nu\pi h_l) = 4s_{\nu,l}^2 c_{\nu,l}^2$

(iv) $\lambda_{\nu,l-1} = \frac{4}{h_l^2} s_{\nu,l}^2 c_{\nu,l}^2$

(v) $rz_l^\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} c_{\nu,l}^2 z_{l-1}^\nu$, $rz_l^{n_l-1-\nu} = -\frac{1}{\sqrt{2}} s_{\nu,l}^2 z_{l-1}^\nu$ und $rz_l^{\frac{n_l-1}{2}} = 0$ für alle für $1 \le \nu \le n_{l-1}-1$.

c) Beweisen Sie, dass der Spektralradius der transformierten Iterationsmatrix dem maximalen Blockspektralradius entspricht:

$$\rho(\hat{C}_{TG,l}(\nu)) = \max\{\rho(C_{TG,l}^{(\mu)}(\nu)) \mid 1 \le \mu \le n_{l-1}-1\}$$

d) Zeigen Sie: Der Spektralradius der Iterationsmatrix ist beschränkt durch

$$\rho(C_{TG,l}(\nu)) \le \max\left\{\max_\xi\left\{\xi(1-\xi)^\nu + (1-\xi)\xi^\nu \mid 0 \le \xi \le \frac{1}{2}\right\}, \left(\frac{1}{2}\right)^\nu\right\} =: \rho_\nu < 1$$

Zur Erinnerung:

$$\rho(\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}) = a + b \quad a, b \in \mathbb{R}$$