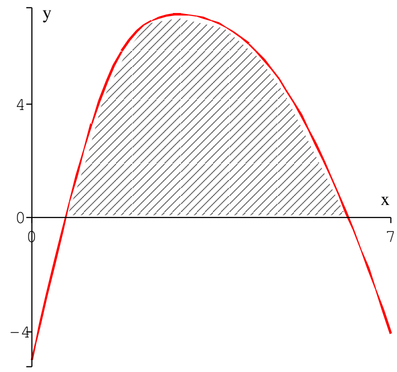
A2: Funktionen: Wertetabelle, numerische Integration, Nullstellenbestimmung durch Bisektion (2 Wochen)



Neue Elemente von C++: Schleifen, Funktionen.

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{sin(x)} - (x-1)(x-6)\ .$$

Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, welche von der x-Achse und dem positiven Graphen von f eingeschlossen wird. Wir gehen dazu schrittweise vor:

Aufgaben:

1) **Funktion:** Implementieren Sie die Funktion f und geben Sie zum Testen die Funktionswerte $f(0)$ und $f(1)$ in der `main`-Funktion aus.[1]

2) **Wertetabelle:** Gegeben sei ein Intervall $[a, b]$ und eine natürliche Zahl N (diese Daten sollen zu Beginn Ihres Programmes mit `cin` eingelesen werden). Geben Sie eine Wertetabelle von f für die Stellen

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

mit $h = \frac{b-a}{N}$ aus. Diese sieht für $a = 0,\ \ b = 1,\ \ N = 2$ etwa so aus:[2]

```
x       f(x)
----------------
0       -5
0.5     -1.13485
1       2.31978
```

Lagern Sie Ihren Code zur Ausgabe der Wertetabelle in eine Funktion

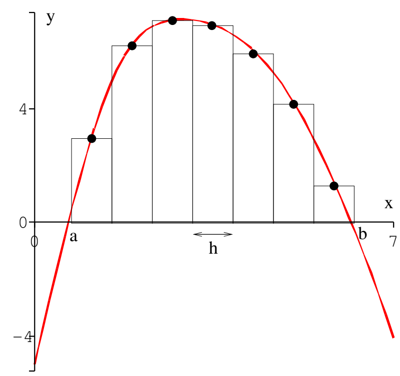
```
void Wertetabelle( double a, double b, int N)
```

aus.

3) **Annäherung des Integrals:** Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch angenähert werden. Wir benutzen dazu die summierte Mittelpunktsregel, bei der das Integral über den Flächeninhalt von N Rechtecken approximiert wird:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \approx \quad h \sum_{i=1}^{N} f\big(a + (i - \frac{1}{2})h\big)$$

mit $h = \frac{b-a}{N}$.



[1] `std::exp` und `std::sin` können Sie mittels `#include <cmath>` einbinden.
[2] Hier wurde zwischen den x- und Funktionswerten jeweils ein Tabulatorzeichen `'\t'` ausgegeben.

Schreiben Sie eine Funktion

```
double MPRegel( double a, double b, int N)
```

welche den über die Mittelpunktsregel angenäherten Wert des Integrals zurückgibt. Testen Sie diese Funktion mit den Werten $a = 1, \quad b = 5, \quad N = 16$ (es sollte `24.2478` herauskommen).

4) **Nullstellen:** Nun müssen wir nur noch die Nullstellen von f herausfinden. Wir benutzen dazu ein ganz simples Verfahren, die Bisektionsmethode. Wir starten mit einem Intervall $I = [a, b]$, in dem eine Nullstelle von f *eingeschlossen* ist, d. h., $f(a)$ und $f(b)$ besitzen unterschiedliche Vorzeichen.

   a) Schreiben Sie eine Funktion (bzw. ein Prädikat)

   ```
   bool Einschluss( double fa, double fb)
   ```

   die bei gegebenen Funktionswerten $f(a), f(b)$ testet, ob im Intervall $[a, b]$ ein Einschluss vorliegt.

   Der Mittelpunkt $m = \frac{a+b}{2}$ teilt das Intervall I in zwei Teilintervalle

   $$I_1 = [a, m] \qquad \text{und} \qquad I_2 = [m, b] \ .$$

   Man wählt unter diesen das Intervall mit Einschluss aus und macht es zum neuen Intervall I (d. h., a bzw. b müssen entsprechend verändert werden). Dies wird solange wiederholt, bis die Länge des Intervalls $[a, b]$ einen vorgegebenen Wert ε unterschreitet. Als Ergebnis wird der Mittelpunkt dieses Intervalls zurückgegeben.

   b) Machen Sie sich zunächst den Ablauf des Bisektionsverfahrens über ein Nassi-Shneiderman-Diagramm klar.

   c) Schreiben Sie dann eine Funktion

   ```
   double Bisektion( double a, double b, double eps)
   ```

   die die Nullstelle von f im Intervall $[a, b]$ mit einer vorgegebenen Genauigkeit von `eps` berechnet. Ihre Funktion soll als allererstes überprüfen, dass das Intervall $[a, b]$ tatsächlich einen Einschluss liefert und ggf. eine Fehlermeldung ausgeben.

5) **Alles zusammensetzen:** Nun haben wir alle Bausteine beisammen, um die zu Anfang gestellte Aufgabe zu lösen: *Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, welche von der x-Achse und dem positiven Graphen von f eingeschlossen wird.* Das richtige Ergebnis lautet `27.3836`. Da alle Bausteine als Funktionen vorliegen, sollte Ihnen das nun keine größeren Schwierigkeiten mehr bereiten!

Lernziele

1. **Schleifen:**
   - die unterschiedlichen Arten von Schleifen und ihre Einsatzgebiete kennen
2. **Funktionen:**
   - Parameter und Rückgabewert einer Funktion kennen
   - Funktionen deklarieren/definieren und aufrufen können
   - Funktionen zur Strukturierung eines Programmes in logische Untereinheiten benutzen

Erweiterungen

1*) Verbessern Sie die Effizienz Ihrer Funktion `Bisektion`, indem Sie sicherstellen, dass pro Schleifendurchlauf nur eine Funktionsauswertung von f benötigt wird. Doppelte Funktionsauswertungen sollen also vermieden werden, da dies unnötige Rechenzeit kostet.

2*) Ersetzt man in der Bisektionsmethode den Intervallmittelpunkt m durch den Schnittpunkt $\hat{m}$ der x-Achse mit der Geraden durch die Punkte $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ („Sekante“), so erhält man das Sekantenverfahren. Leiten Sie eine Formel für $\hat{m}$ her, und implementieren Sie das Sekantenverfahren in der Funktion

```
double SekVerfahren( double a, double b, double eps)
```

Brechen Sie die Iteration ab, sobald $|\hat{m}_{k+1} - \hat{m}_k| < \varepsilon$ und $|f(\hat{m}_{k+1})| < \varepsilon$ ist.

Vergleichen Sie, wieviele Schritte das Bisektions- und das Sekantenverfahren jeweils benötigen, um die jeweilige Nullstelle von f mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-6}$ zu bestimmen.

3*) Programmieren Sie das Newtonverfahren

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

das zu gegebenem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle der differenzierbaren Funktion f annähert. Brechen Sie die Iteration ab, sobald $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ und $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$ ist.

Vergleichen Sie, wieviele Schritte das Newtonverfahren im Vergleich zu Bisektions- und Sekantenverfahren benötigt, um die jeweilige Nullstelle von f mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-6}$ zu bestimmen. Als Startwert x_0 wählen Sie dabei den Mittelpunkt des Startintervalls $[a, b]$, das im Bisektions- und Sekantenverfahren benutzt wurde.