1 Einleitung

Ohne Aufgaben.

2 Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität

Aufgabe 2.1

a) Bestimme die normalisierte Dezimaldarstellung der folgenden Dualzahlen

$$1101.01 \qquad 10.\overline{101} \quad 110.\overline{10110}$$

b) Bestimme die normalisierte Dualdarstellung der folgenden Dezimalzahlen

$$7\,, \quad 1024\,, \quad 8.75\,, \quad 0.\overline{3}\,, \quad 0.\overline{142857}\,, \quad 0.0\overline{6}\,, \quad 0.1\,.$$

Aufgabe 2.2
Du hast auf einem Rechner eine einbytige Fixpunktarithmetik implementiert — 4 Bit vor dem Komma und 4 Bit nach dem Komma. Die Eingabe ist komfortabel; man darf sogar Brüche eingeben. Die Ausgabe erfolgt dezimal. Teste Dein Werk mit der einfachen Multiplikation von $\frac{7}{3}$ mit 3. Wie lautet die Antwort des Rechners? (Du darfst davon ausgehen, daß Du korrekt programmiert hast.) Was liefern die weiteren Tests mit $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{4}$ sowie 5.2 und 3.5?

Aufgabe 2.3
Für $i = 1, 2, ...$ sei $a = 10^i$ und $b = a - 1$. Berechne damit (Taschenrechner, Rechner mit einfacher und doppelter Genauigkeit) $f_1 = a^2 - b^2$ und $f_2 = (a + b) * (a - b)$. Die Zwischenergebnisse sollen dabei abgespeichert werden. Begründe die Ergebnisse ausführlich.

Aufgabe 2.4
In den meisten Formelsammlungen findet man zur Lösung der (normierten) quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Formel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$. Teste die Formel für $p = -123$ ($p = -12345$) sowie $q = 0.4$ ($q = 0.0456$) mit vierstelliger Rechnung (was heißt *vierstellige Rechnung*?) und begründe das Ergebnis.
Finde eine *bessere* Variante zur Lösung quadratischer Gleichungen.

Aufgabe 2.5
Es sei $\tilde{\mathbb{M}}(b, m, l)$ die Menge der Maschinenzahlen zur Basis b mit Mantissenlänge m und l-stelligem Exponenten. Welche Maschinenzahlen sind das ausgedrückt durch $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ Bestimme alle positiven Zahlen von $\tilde{\mathbb{M}}(2, 4, 2)$ und markiere sie auf der Zahlengeraden.

Aufgabe 2.6
Führe die Berechnungen aus Aufgabe 2.2 in $\mathbb{M}(2, 3, -8, 7)$ durch.

Aufgabe 2.7
Sei $\mathbb{M}(b, m, l) \subset \mathbb{R}$ die Menge aller Gleitpunktzahlen der Form

$$\begin{aligned} r &= \pm(0.d_1 d_2 \dots d_m)_b * b^e && \in \mathbb{R}, \\ e &= \pm(e_1 b^{l-1} + \dots + e_l b^0) && \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

wobei

$$d_k, e_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}, \quad d_1 \neq 0 \text{ falls } r \neq 0, \quad l, m, b \in \mathbb{N}.$$

Soll eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{M}$ im Rechner dargestellt werden, so muß man zur nächstgelegenen Gleitpunktzahl $r = fl(x)$ übergehen. Sei hier $b = 2$, $m = 2$, $l = 1$.

a) Berechne alle Gleitpunktzahlen, die mit den obigen Parametern dargestellt werden können.

b) Bestimme die "Under"– und "Overflow"– bereiche, d.h. Schranken $x_{\min}, x_{\max}$, mit $x_{\min} \leq |x| \leq x_{\max}, \quad \forall\, x \in M(2,2,1)$.

c) Zu der Zahl 1000 soll in 3–stelliger Gleitpunktarithmetik 1000 mal die 1 hinzuaddiert werden. Berechne dazu die folgenden Alternativen:

$$\begin{aligned} a &= (\dots((1000+1)+1)+\dots+1)+1, \\ b &= (\dots((1+1)+1)+\dots+1)+1000. \end{aligned}$$

Erkläre das Ergebnis.

d) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $fl(x)$, $|fl(x) - x|$ und $\dfrac{|fl(x) - x|}{|x|}$.

Aufgabe 2.8
Sei $f(x,y) = \sqrt{5(x - \sqrt{x^2 - y^2})}$.

i) Bestimme $f(\frac{1}{8}, \frac{1}{10})$ und gib den relativen Fehler an

   a) bei Rechnung in $\mathbb{M}(10, 3, -4, 3)$,
   b) bei Rechnung in $\mathbb{M}(10, 2, -4, 3)$,
   c) bei Rechnung mit deinem Rechner, aber mit Eingangsdaten, die nur auf 2 Stellen hinter dem Komma genau angegeben sind.

ii) Bestimme allgemein in erster Näherung den relativen Fehler $\frac{\Delta f}{f}$ in Abhängigkeit von $\frac{\Delta x}{x}$ und $\frac{\Delta y}{y}$.

iii) Gib eine Formel für f an, die bei $x \simeq y$ ein günstigeres Verhalten zeigt.

Aufgabe 2.9
Untersuche die Fehlerverstärkung bei der Division x/y unter der Annahme, daß die relativen Eingabefehler beschränkt sind durch $|\delta_x|, \ |\delta_y| \leq \epsilon < 0.5$.
Hinweis: Verwende die geometrische Reihe!

Aufgabe 2.10
Berechne die folgenden drei Ausdrücke für die angegebenen Werte von x. Welches Phänomen ist zu beobachten? Bringe die Ausdrücke auf eine numerisch stabilere Form.

a) $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x} \quad$ für $|x| << 1$

b) $\dfrac{1 - \cos x}{x} \quad$ für $x \neq 0$ und $|x| << 1$

c) $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ für $x = 29.999$

d) $1 - \exp(x^{-3})$ für $|x| > 10$

Aufgabe 2.11
$\tilde{x}$ sei ein Näherungswert für $\overline{x} = 2$, der mit einem relativen Fehler von maximal 5% behaftet ist.

a) Schätze den relativen Fehler in $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ab?

b) Wie groß darf die relative Abweichung in x maximal sein, damit der relative Fehler in f maximal 1% beträgt? Wie sicher ist diese Abschätzung?

Aufgabe 2.12
Man möchte den Ausdruck

$$f = f_1 = (\sqrt{2} - 1)^6$$

mit dem Näherungswert $\sqrt{2} \approx 1.4$ berechnen. Man kennt für f noch die Darstellungen

$$\begin{aligned} f = f_2 &= \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} \\ f = f_3 &= (3 - 2\sqrt{2})^3 \\ f = f_4 &= \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} \\ f = f_5 &= 99 - 70\sqrt{2} \\ f = f_6 &= \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Zeige zunächst $f_i = f_1$ für $i = 1, 2, \ldots, 6$. Welche der Darstellungen führt zu dem besten Resultat? Begründe Deine Antwort ohne die Berechnung der einzelnen f_i. Benutze dazu $1.4 < \sqrt{2} < 1.42$ und schätze den absoluten Fehler ab.

Aufgabe 2.13
Für $n \in \mathbb{N}_+$ seien a_n bzw. b_n die Seitenlängen eines dem Einheitskreis ein- bzw. umschriebenen regelmäßigen $6 \cdot 2^n$-Ecks. Dann gilt ja

$$6 \cdot 2^{n-1}\, a_n \le \pi \le 6 \cdot 2^{n-1}\, b_n$$

Geometrische Überlegungen führen auf folgende Rekursionsformeln:

$$a_0 = 1\,, \quad b_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A1) \quad a_{n+1} = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)} \qquad B1) \quad b_{n+1} = \frac{4}{b_n}\left(\sqrt{\left(\frac{b_n}{2}\right)^2 + 1} - 1\right)$$

$$A2) \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)}} \qquad B2) \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{\sqrt{\left(\frac{b_n}{2}\right)^2 + 1} + 1}$$

a) Zeige, daß sich die verschiedenen Ausdrücke für a_{n+1} bzw. b_{n+1} ineinander überführen lassen.

b) Berechne für $n = 1, \dots, 20$ nach jeder dieser Formeln (so wie sie hier stehen) untere bzw. obere Schranken für π mit einfacher Genauigkeit (single, float, real, ...). Erläutere die Ergebnisse.

Aufgabe 2.14
Wir definieren die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $y_n := \int\limits_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx$. Zeige:

a) $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine streng monoton fallende Nullfolge.

b) $y_0 = \ln(1.2)$

c) $y_{n+1} + 5\,y_n = \dfrac{1}{n+1}$

d) $y_n = (-5)^n \left(y_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{(-5)^i\, i} \right)$

e) Berechne einige Folgeglieder $y_0, y_1, \dots y_n$.

α) durch Anwedung der durch b) und c) gegebenen Rekursion und

β) durch Anwendung von b.) und d.).

$n \in \mathbb{N}$ ist jeweils so groß zu wählen, daß sich die berechneten Werte anders verhalten als a.) erwarten läßt. Diskutiere die Ergebnisse.

Aufgabe 2.15
Gegeben sei das Problem

$$f(x) = \frac{1}{1+2x} - 1, \qquad x \in (0, \infty)\,.$$

a) Untersuche die Kondition des Problems.

b) Betrachte den Algorithmus

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x \\ y_2 &= 1 + y_1 \\ y_3 &= \frac{1}{y_2} \\ y_4 &= y_3 - 1. \end{aligned}$$

$$y_1 = 2x,\ y_2 = 1 + y_1,\ y_3 = \frac{1}{y_2},\ y_4 = y_3 - 1.$$

Ist dieser Algorithmus stabil? Gib gegebenenfalls einen geeigneteren Algorithmus an.