Aufgabe 2.16
Man bestimme den maximalen (absoluten und relativen) Fehler in $y := x_1 x_2^2 \sqrt{x_3}$ für

$$x_1 = 2.0 \pm 0.1, \quad x_2 = 3.0 \pm 0.2, \quad x_3 = 1.0 \pm 0.1$$

mit Hilfe der differentiellen Fehleranalyse.
Berechne die Konditionszahlen. Welche Variable trägt am meisten zum Fehler bei?

Aufgabe 2.17
Die Ausdrücke

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^4 - 39.8x^3 + 594.05x^2 - 3941.005x + 9805.051 \\ p_2(x) &= (x-10)^4 + 0.2(x-10)^3 + 0.05(x-10)^2 - 0.005(x-10) + 0.001 \end{aligned}$$

repräsentieren dasselbe Polynom. Man berechne den Wert des Polynoms für die gerundete Zahl $x = 10.11$. Berechne zunächst die Kondition des Problems. Rechne dann so genau, daß der relative Fehler in x und der Fehler durch die Berechnung dieselbe Größenordnung haben. Wie sind die Ausdrücke $p_1(x)$ und $p_2(x)$ dazu auszuwerten? Überprüfe die Überlegungen numerisch. Die Koeffizienten werden nun als exakte Zahlen betrachtet. Einen wie großen (relativen) Fehler erhält man in $p_1(10.11)$, wenn die Koeffizienten auf 6 signifikante Ziffern gerundet werden?

Aufgabe 2.18
Sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Eine Abbildung $\| \,.\, \| : X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:
1.) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$; 2.) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \quad \forall \, x \in X, \ \lambda \in \mathbb{K}$;
3.) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall \, x, y \in X$.
Ist insbesondere $X = \mathbb{K}^n, \ n \in \mathbb{N}$, so spricht man auch von einer Vektornorm.

a) Sei $w \in \mathbb{R}^n$, $w_i > 0, \ i = 1, \ldots, n$. Zeige, daß die Abbildung $||.||_w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $||x||_w := \sum_{i=1}^n w_i |x_i|, \ x \in \mathbb{R}^n$, eine Norm ist.

b) Stelle die Menge $S_{||.||} := \{ \, x \ : \ ||x|| = 1, \ x \in \mathbb{R}^2 \}$ für die Vektornormen

$$||x||_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|, \qquad ||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \qquad ||x||_2 := \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{1/2}$$

sowie für $||.||_w$ mit $w = (1, 2)$ graphisch dar.

Aufgabe 2.19

a) Welche der folgenden Abbildungen definieren Normen im $\mathbb{R}^2$?

$$x \mapsto |x_1|, \qquad x \mapsto 5|x_1| + 2|x_2|, \qquad x \mapsto \max(4|x_1|, |x_2|),$$

$$x \mapsto x_1 + x_2, \qquad x \mapsto \sqrt{x_1 + x_2}, \qquad x \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$x \mapsto |x_1| + |x_2|, \quad x \mapsto \max(|x_1|, |x_2|).$$

b) Skizziere die Einheitssphären $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ zu den Normen in a).

c) Welche Matrixnormen gehören zu den letzten 3 Normen?

Aufgabe 2.20
Sei $\mathbb{K}$ entweder der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Gegeben sei die Vektornorm $||.||$ auf $\mathbb{K}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die durch $||.||$ induzierte Matrixnorm $||.||_{Mat}$ ist definiert durch

$$||A||_{Mat} := \sup_{x \in \mathcal{K}^n \setminus \{0\}} \frac{||Ax||}{||x||} \quad \text{für } A \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Der Einfachheit halber verwendet man für die induzierte Matrixnorm meist die gleiche Bezeichnung wie für die Vektornorm $||| \cdot ||$. Zeige:

a) Die Matrixnorm $|| \cdot ||$ ist tatsächlich eine Norm auf dem Raum $\mathbb{K}^{n \times n}$.

b) Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $x \in \mathbb{K}^n$ gilt: $||Ax|| \leq ||A|| \, ||x||$.
Ist A außerdem invertierbar, dann gilt zusätzlich: $\frac{1}{||A^{-1}||}||x|| \leq ||Ax||$.
Für alle invertierbaren Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $x \in \mathbb{K}^n$ gilt: $\frac{1}{||A^{-1}||}||x|| \leq ||Ax|| \leq ||A|| \, ||x||$.

c) Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt: $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$.

d) Für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt: $||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||$.

e) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für die durch $||.||_\infty$ induzierte Matrixnorm gilt: $||A||_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}| \right\}$.
Bemerkung: Für die durch $||.||_1$ und $||.||_2$ induzierten Matrixnormen gilt:
$$||A||_1 = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_{ki}| \right\} \text{ und } ||A||_2 = \sqrt{\max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } A^T A\}} \; .$$

f) Bestimme $||A||_\infty$, $||A||_1$ und $||A||_2$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7/4 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -3/4 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 5/2 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -3/4 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 7/4 \end{pmatrix} \quad .$$

Aufgabe 2.21
Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

a.) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

b.) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

c.) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$

d.) $\frac{1}{n}\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\|A\|_\infty$.

Aufgabe 2.22
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \pm \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Mit welchem relativen Fehler (in x — ∞–Norm) muß man rechnen, wenn statt $A\,x = b$ das LGS $A\,x = \tilde{b}$ gelöst wird. Mache Deine Angaben ohne $A\,x = b$ zu lösen.

b) Die durch $A\,x = b$ gegebenen Gleichungen werden nun wie folgt behandelt: Für $i = 1, 2$ wird die i–te Gleichung durch $\sum_k |a_{ik}|$ geteilt. Untersuche das so entstehende Gleichungssystem wie unter a).

c) Löse nun $A\,x = b$ und berechne damit den relativen Fehler.

Aufgabe 2.23
Die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 0.500 & 0.333 & 0.250 \\ 0.333 & 0.250 & 0.200 \\ 0.250 & 0.200 & 0.167 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1.083 \\ 0.783 \\ 0.617 \end{pmatrix} \text{ ist } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Runde die rechte Seite korrekt auf 3 Dezimalen. Mit welchem Fehler in x ist nun zu rechnen? Berechne die Lösung des so entstandenen Gleichungssystems mit 3- und 4-stelliger Gleitpunktarithmetik sowie möglichst genau.
Führe die Berechnungen auch mit ungerundeter rechter Seite durch.
Hinweis: Die Kondition obiger Matrix ist $\mathrm{cond}_2 \approx 1350$

Aufgabe 2.24
Gesucht wird die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & -0.6 & -0.4 \\ -0.6 & 1.5 & 0.1 \\ -0.4 & 0.1 & 1.3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 2.3 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von Datenfehlern (z.B. Meßfehler bei der Bestimmung der Koeffizienten) stehen Ihnen jedoch nur die folgende gestörte Matrix $\tilde{A}$ bzw. die gestörte rechte Seite $\tilde{b}$ zur Verfügung:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2.009 & -0.599 & -0.400 \\ -0.600 & 1.497 & 0.098 \\ -0.395 & 0.102 & 1.307 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1.105 \\ 1.188 \\ 2.310 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die Kondition $\kappa(A)$ bzgl. der Euklidischen Norm $\|.\|_2$.

   Hinweis: Für symmetrische Matrizen A stimmt $\kappa(A)$ mit dem Quotienten aus dem Betrag des größten und dem Betrag des kleinsten Eigenwertes überein. (**Warum?**)

b) Sei $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Schätzen Sie den relativen Fehler $\|\tilde{x} - x\|_2 / \|x\|_2$ ab.

   Hinweis: Um $\|\tilde{A} - A\|_2$ abzuschätzen, verwende man, daß $\|M\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|M\|_\infty$ für alle Matrizen
   $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt.

c) Für große A ist die Berechnung von $\|A^{-1}\|_2$ im allgemeinen nicht mehr sinnvoll. Man kann jedoch versuchen, die Eigenwerte von A nach oben und unten abzuschätzen. Bei diagonaldominanten Matrizen benutzt man dazu den folgenden *Satz von Gerschgorin*:

   Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine beliebige Matrix. Für $1 \leq i \leq n$ sei $\overline{K_i} \in \mathbb{C}$ der abgeschlossene Kreis mit Mittelpunkt a_{ii} und Radius $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Dann liegen alle Eigenwerte von A in der Vereinigung der Kreise $\overline{K}_i$, $1 \leq i \leq n$.

   Verwende diesen Satz, um die Eigenwerte der obigen Matrix A und damit ihre Kondition abzuschätzen.

Aufgabe 2.25
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.985 & 2.146 \\ 1.478 & 3.175 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.597 \\ 0.888 \end{pmatrix}.$$

Alle Werte resultieren aus Messungen und sind mit einem absoluten Fehler von maximal 0.0005 behaftet. Mit welchen Fehler (gemessen in der ∞-Norm) muß man rechnen?

Aufgabe 2.26
Das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix}$$

hat die Lösung $x = (\,1 \quad -1\,)^T$.

a) Bilde zu den drei gegebenen Näherungsvektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1.01 \\ -0.98 \end{pmatrix} \quad , \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0.005 \\ 2.01 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}$$

die Residuen $r_i(x_i) = A\,(x_i - x)$. Was könnte man fälschlicherweise über die Qualität der x_i schließen?

b) Mit welchen absoluten Fehler muß in der 1–Norm (2–Norm, ∞–Norm) für x gerechnet werden, wenn statt b der fehlerbehaftete Vektor $\tilde{b}$ mit $\|b - \tilde{b}\|_1 \leq 0.1$ ($\|b - \tilde{b}\|_2 \leq 0.075$, $\|b - \tilde{b}\|_\infty \leq 0.05$) benutzt wird?

c) Schätze den in x zu erwartenden Fehler (relativ und absolut) ab, wenn statt A fälschlich $\hat{A}$ und statt b der Vektor $\hat{b}$ mit

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3.001 & 1 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 2.001 \\ 4 \end{pmatrix}$$

benutzt wird. Führe die Berechnungen in der 1–, 2– und ∞–Norm durch.

Aufgabe 2.27
Betrachte das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{45}{56} \\ \frac{25}{36} \end{pmatrix},$$

sowie das System $\tilde{A}\,\tilde{x} = \tilde{b}$, wobei $\tilde{A}$ aus A und $\tilde{b}$ aus b gewonnen werden, indem die Koeffizienten bzw. Komponenten in Dezimaldarstellung auf 3 (sowie 4) Dezimalen nach dem Komma gerundet werden.
Schätze den relativen Fehler in x ab und vergleiche ihn mit dem wahren Fehler.

Aufgabe 2.28
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$