a) Bestimme cond(A) für die 1–, 2– und ∞–Norm.

b) Schätze den relativen und absoluten Fehler ab, der entsteht, wenn man statt $Ax = b$ das gestörte System $\tilde{A}x = b$ mit $|\varepsilon| < 0.5$ löst.

Aufgabe 2.29 (KA: 4+2+2 Punkte)
Gegeben ist das Problem

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad x \in (0, \infty).$$

a.) Wie ist die Kondition des Problems ? Ist sie gut oder schlecht (mit Begründung!) ?

b.) Gegeben sei der Algorithmus

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + x \\ y_2 &= \frac{1}{y_1}. \end{aligned}$$

Ist dieser Algorithmus stabil ? Begründe Deine Antwort.

c.) Wenn allgemein ein Problem eine Kondition von der Größenordnung 10^4 hat und man mit 7-stelliger Gleitpunktarithmetik rechnet, auf wieviele Stellen kann das Ergebnis maximal genau sein ? Warum ?

Aufgabe 2.30 (KA: 8 Punkte)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.782 & 0.918 \\ 0.418 & 0.582 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.917 \\ 0.333 \end{pmatrix}.$$

Alle Werte in A und b sind auf drei Stellen genau gerundet. Mit welchem relativen und welchem absoluten Fehler (gemessen in der 1-Norm) muß man für x rechnen?

3 Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren

Aufgabe 3.1
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

a) Löse das Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel.

b) Löse das Gleichungssystem mit Gauß–Elimination.

c) Bei Anwendung auf ein Gleichungssystem der Dimension n sind mit der Cramerschen Regel etwa $(n+1)!$ und mit Gauß–Elimination etwa $2n^3/3$ Multiplikationen auszuführen. Schätze für beide Verfahren die Rechenzeit für die Lösung eines Gleichungssystems der Dimension $n = 20$ auf einem 10 MFlop–Rechner ($\approx$10 Mio. Fließkommaoperationen pro Sekunde).

Aufgabe 3.2
Die Hilbertmatrix $H_n = (h_{ij}^n)_{i,j=1}^n$ ist definiert durch $h_{ij}^n := 1/(i+j-1),\ i,j = 1,\dots,n$. Betrachte das lineare Gleichungssystem $H_n x = r$ mit $n = 4$ und $r = (2,2,2,2)^T$.

a) Die exakte Lösung x lautet: $x = (-8, 120, -360, 280)^T$. Berechne die Lösung $\tilde{x}$ in 4-stelliger Gleitpunktarithmetik. Wie groß ist der absolute Fehler $||x - \tilde{x}||_2$?

b) Berechne die Kondition $\kappa_\infty(H_n) = ||H_n||_\infty ||H_n^{-1}||_\infty$ der Hilbertmatrix für den Fall $n = 4$.

Aufgabe 3.3
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

a) Löse $Ax = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *ohne* Spaltenpivotisierung.

b) Löse $Ax = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Spaltenpivotisierung.

c) Vergleiche die Lösungen aus a) und b) mit der exakten Lösung. Erkläre Deine Beobachtung.

Aufgabe 3.4
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 10^4 \\ 0.4 & 1.1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 10^4 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

a) Löse $Ax = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Spaltenpivotisierung.

b) Löse $Ax = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Äquilibrierung und *ohne* Spaltenpivotisierung.

c) Löse $Ax = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Äquilibrierung und *mit* Spaltenpivotisierung.

d) Vergleiche die Lösungen aus a), b) und c) mit der exakten Lösung. Erkläre Deine Beobachtung.

Aufgabe 3.5
Berechne mit 2–stelliger, 3–stelliger und 4–stelleiger dezimaler Gleitpunktarithmetik sowie mit Taschenrechnergenauigkeit jeweils mit und ohne Spaltenpivotisierung die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 9 & -1 \\ 5 & -0.5 & 0.01 \\ 4 & -1 & 0.01 \end{pmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} -99 \\ 10 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

Interpretiere die Ergebnisse. Führe die Berechnungen auch mit der rechten Seite

$$b' = (1 \quad 1 \quad 1)^T$$

durch.

Aufgabe 3.6
Berechne mit 3–stelliger, 4–stelliger dezimaler Gleitpunktarithmetik sowie mit Taschenrechnergenauigkeit jeweils mit Spaltenpivotisierung die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 543 & -96 \\ 6 & -0.5 & 0.01 \\ 5 & -2 & 0.01 \end{pmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Führe die Berechnungen nun mit Skalierung durch. Interpretiere die Ergebnisse.

Aufgabe 3.7
Um die Schwächen der Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung aufzuzeigen, betrachten wir das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2.1 & 2512 & -2516 \\ -1.3 & 8.8 & -7.6 \\ 0.9 & -6.2 & 4.6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -6.5 \\ 5.3 \\ -2.9 \end{pmatrix}.$$

a) Löse $Ax = b$ in 5-stelliger Gleitpunktarithmetik mit Hilfe der Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung. Gib die Faktoren L und R an. Vergleiche die gestörte Lösung mit der exakten Lösung $x = (-5, -1, -1)^T$. Wodurch entstehen die großen Abweichungen?

b) Skaliere das Gleichungssystem mit Hilfe einer Äquilibrierung (d.h. $DAx = Db$, mit $\|DA\|_\infty = 1$), und berechne die Lösung des skalierten Systems mit Hilfe der Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung in 5-stelliger Gleitpunktarithmetik.

c) Eine andere Pivotisierungsstrategie ist die sogenannte *relative Spaltenpivotisierung*. Dabei wird die Skalierung nicht explizit durchgeführt, sondern implizit als Hilfsmittel zur Bestimmung des Pivotelementes verwendet. Unter den in Frage kommenden Elementen bestimmt man dabei dasjenige zum Pivotelement, für welches der Quotient aus Element und Zeilensumme am größten ist. Vergleiche das Ergebnis mit den übrigen!

Aufgabe 3.8
Zur Erinnerung: Bei der Bestimmung von $Ax = b$ entstehen während der Berechnung fast immer Rundungsfehler. Diese Fehler kann man iterativ vermindern. Dazu wird der *Residuenvektor* $r = b - A * x$ meist doppelt genau berechnet. Der Algorithmus sieht folgendermaßen aus.

1) Berechne $LR = A$ (numerische LR-Zerlegung .

2) Bestimme x_0 (etwa aus $LRx_0 = b$).

3) Berechne $r_k = b - Ax_k$ doppelt genau.

4) Berechne x_{k+1} aus $LR(x_{k+1} - x_k) = r_k$

5) zurück zu 3).

Die Lösung von

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{107}{210} \\ \frac{73}{168} \\ \frac{191}{504} \end{pmatrix} \quad \text{ist } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Runde die Koeffizientenmatrix korrekt auf 5 Dezimalen und die rechte Seite so, daß die Lösung unverändert bleibt. Verwende nun den obigen Algorithmus mit 5- bzw. beim Residuum 10-stelliger Rechnung und führe zwei Nachiterationsschritte aus.

Aufgabe 3.9

Bei der Lösung des linearen Systems $Ax = b$ mit endlicher Gleitpunktarithmetik ergeben sich bekanntlich Fehler. Für die Lösung $\tilde{x}$ gilt i.a. $r(\tilde{x}) := A\tilde{x} - b \neq 0$. Beachtet man, daß gilt $r(\tilde{x}) = A\tilde{x} - b = A\tilde{x} - Ax = A(\tilde{x} - x) =: A\Delta\tilde{x}$, so kann man die Lösung $\tilde{x}$ verbessern, indem man das lineare System $A\Delta\tilde{x} = r(\tilde{x})$ löst und $x = \tilde{x} - \Delta\tilde{x}$ bildet. Diesen Prozeß der Nachiteration kann man solange wiederholen, bis die Lösung genau genug ist, d.h. bis das in doppelter Genauigkeit berechnete Residuum r eine Toleranz unterschreitet. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{33}{16} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechne die Lösung mit 3–stelliger Gleitpunktarithmetik. Bestimme das Residuum in 6–stelliger Gleitpunktarithmetik. Verbessere nun $\tilde{x}$ mit einem Nachiterationsschritt.

Aufgabe 3.10

Die LR-Zerlegung zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist im allgemeinen mit Rundungsfehlern behaftet und liefert dann Matrizen $\tilde{L}$, $\tilde{R}$, deren Produkt $\tilde{L}\tilde{R} = A + F$ nur bis auf eine Fehlermatrix F mit A übereinstimmt. Entsprechend ist auch die durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen definierte Lösung $x^{(0)}$ von $\tilde{L}\tilde{R}x^{(0)} = b$ nur eine Näherungslösung für die exakte Lösung x. Diese kann oft durch sogenannte *Nachiteration* verbessert werden, d.h., durch eine Iteration der Form

$$x^{(k)} \;:=\; x^{(k-1)} + (\tilde{L}\tilde{R})^{-1}(b - Ax^{(k-1)})\,, \qquad k = 1, 2, 3, \dots\,.$$

Die Korrektur $\delta^{(k)} := (\tilde{L}\tilde{R})^{-1}(b - Ax^{(k-1)})$ gewinnt man durch Vorwärts/Rückwärtseinsetzen als Lösung des Gleichungssystems $\tilde{L}\tilde{R}\delta^{(k)} = b - Ax^{(k-1)}$. Da bei der Berechnung des Residuums $b - Ax^{(k-1)}$ starke Auslöschung auftritt, ist eine Nachiteration nur dann sinnvoll, wenn das Residuum in doppelter Genauigkeit berechnet wird. Betrachte als Beispiel das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2.06 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die (Näherungs-)Lösung $x^{(0)}$ dieses Gleichungssystems in 3-stelliger Gleitpunktaritmetik. Berechne anschließend das Residuum in 6-stelliger Gleitpunktaritmetik, und verbessere dann die Näherungslösung $x^{(0)}$ mit einem Nachiterationsschritt in 3-stelliger Gleitpunktaritmetik.

Aufgabe 3.11

a) Welche der folgenden Matrizen besitzen eine LR–Zerlegung und welche lassen sich nach geeigneter Zeilenvertauschung (Pivotisierung) LR–zerlegen?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gib gegebenenfalls die Permutationsmatrix an.

b) Bestimme mit Hilfe der in a) gewonnenen LR–Zerlegungen die Determinante, den Rang und, falls die Matrizen regulär sind, auch die Inverse.

Aufgabe 3.12
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 8 & 7 & -7 & -6 \\ -6 & 16 & -2 & 13 \\ -10 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die Lösung von $A\,x = b$ mit Gaußelimination.

b) Bestimme die Lösung von $A\,x = c$ mit Gaußelimination.

c) Berechne die Determinante von A.

d) Bestimme die $L\,R$–Zerlegung von A.

e) Berechne nochmals die Determinante von A.

f) Löse nun $A\,x = b$ und $A\,x = c$ mit der $L\,R$–Zerlegung von A.

Führe obige Berechnungen mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 & -13 \\ 0 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{durch.}$$

Aufgabe 3.13
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 1 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die $L\,R$–Zerlegung von A.

b) Wie hängt die Lösung von α, β, γ und δ ab?

c) Berechne die Determinante von A.

Aufgabe 3.14
Die nichtsinguläre Matrix $A \in \mathrm{IR}^{n\times n}$ besitze folgende Blockzerlegung:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

mit $A_{11} \in \mathrm{IR}^{m\times m}$ invertierbar, $A_{12} \in \mathrm{IR}^{m\times(n-m)}$, $A_{21} \in \mathrm{IR}^{(n-m)\times m}$, $A_{22} \in \mathrm{IR}^{(n-m)\times(n-m)}$.
Die Matrix

$$S = (A/A_{11}) = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

bezeichnet man als das Schur–Komplement von A_{11} bezüglich A.

a) Bestimme eine Block–LR–Zerlegung von A.

b) Zeige, daß die Inverse von A folgende Block–Darstellung hat:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1} \\ \hline -S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{array}\right]$$

c) Sei $b = \binom{b_1}{b_2}$ mit $b_1 \in \mathrm{IR}^m$, $b_2 \in \mathrm{IR}^{n-m}$. Gib einen Algorithmus zur Berechnung der Lösung $x = \binom{x_1}{x_2}$, $x_1 \in \mathrm{IR}^m$, $x_2 \in \mathrm{IR}^{n-m}$, von $Ax = b$ an ohne die Inversen von A und A_{11} explizit zu verwenden.

Aufgabe 3.15
Bestimme alle reellen Werte von a, für die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -a & 0 \\ 0 & -a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

Aufgabe 3.16
Bestimme die L-D-L^T–Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von α ist A positiv definit?

Aufgabe 3.17
Bestimme die L-D-L^T – Zerlegung für die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 8 \\ 2 & 8 & 30 \end{pmatrix}.$$

Führe die Berechnung auch für

$$B = \begin{pmatrix} 5.3 & 7 & 2.9 & 15 \\ 7 & 10.8 & 10.5 & 20 \\ 2.9 & 10.5 & 36.5 & 10 \\ 15 & 20 & 10 & 61 \end{pmatrix}$$

durch.

Aufgabe 3.18
Gegeben seien folgende symmetrische Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -6 \\ -2 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 13 & -18 \\ -6 & 5 & -18 & 33 \end{pmatrix}$$

a) Untersuche, welche der Matrizen positiv definit ist/sind.

b) Berechne die $L\,D\,L^T$-Zerlegung für B.

c) Sei $b = (2, -1, -1, 1)^T$. Löse $Bx = b$ mit Hilfe der Zerlegung $B = L\,D\,L^T$.

Aufgabe 3.19
Gegeben sei eine invertierbare Matrix $A \in \mathrm{IR}^{n\times n}$ und m Vektoren $b^{(1)}, \ldots, b^{(m)} \in \mathrm{IR}^n$.
Zur Lösung von m linearen Gleichungssystemen

$$A\,x^{(i)} \;=\; b^{(i)}\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,,$$

bieten sich die beiden folgenden Möglichkeiten an:

a) Mit Hilfe der LR–Zerlegung von A bestimmt man zunächst die Inverse A^{-1} und berechnet anschließend $x^{(i)} = A^{-1}b^{(i)}$ für $i = 1, \ldots, m$.

b) Mit Hilfe der LR–Zerlegung von A bestimmt man $x^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, aus den Vektoren $b^{(i)}$ durch Vorwärts– und Rückwärtseinsetzen.

Schätze für beide Methoden den Rechenaufwand und interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 3.20
Matrizen mit einer großen Anzahl von Null-Einträgen nennt man *schwach besetzte Matrizen.* Wird ein Teil dieser Null-Einträge während der LR-Zerlegung mit von Null verschiedenen Werten überschrieben, so spricht man von *Fill-in.* Da der Fill-in die Anzahl der zu eliminierenden Einträge erhöht, lohnt es sich im allgemeinen, den Fill-in durch geeignete Zeilen- und Spaltenvertauschungen so gering wie möglich zu halten. Betrachte als Beispiel das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Lösung dieses Gleichungssystems mit Gauß-Elimination und versuche dabei, den Fill-in zu minimieren.

Aufgabe 3.21
Es seien $n \in \mathbb{N}, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Formuliere die $L\,R$ Zerlegung für A sowie Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen zur Lösung von $A\,x = d$.

Aufgabe 3.22
Eine Matrix der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_2 & d_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

heißt „Tridiagonalmatrix“.

a) Bestimme die LR–Zerlegung von A, und gib einen effizienten Algorithmus zur Lösung eines tridiagonalen Gleichungssytems an. Wie groß ist der Aufwand des Verfahrens? Ist dieser Algorithmus immer durchführbar? Begründung!

b) Löse mit dem Verfahren aus a) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.23

a.) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\alpha, \beta, \gamma : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine C^2-Funktion $y : [a; b] \to \mathbb{R}$, die die *lineare Randwertaufgabe*

$$y''(x) + \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) + \gamma(x) = 0, \qquad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

löst. Um diese Gleichung näherungsweise zu lösen, teilen wir das Intervall $[a, b]$ in $N (\in \mathbb{N})$ gleiche Teile und setzen

$$h := \frac{b-a}{N}, \qquad x_i := a + ih$$

für alle $i \in \{0, \dots, N\}$. Ferner sei y_i die zu bestimmende Näherung für $y(x_i)$. Wir bestimmen y_i, indem wir in der zu lösenden Gleichung die folgenden Näherungen einsetzen:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

für $i = 1, \dots, N-1$. Dadurch erhalten wir ein System von $N-1$ Gleichungen für die $N+1$ Unbekannten $y_0, \dots, y_N$. Wie lauten diese Gleichungen?

b.) In dem in a.) bestimmten Gleichungssystem sind y_0 und y_N bereits bekannt. Nutze diese bekannten Werte aus, um das System auf ein lineares System von $N-1$ Gleichungen in $N-1$ Unbekannten zu reduzieren und gib dieses Gleichungssystem (Matrix, Unbekannte und rechte Seite) an!

c.) Es sei nun

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad y(-1) = y(1) = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right).$$

Bestimme Näherungen für y mit $N = 4, 8, 16, \dots$.

Aufgabe 3.24 (KA: 5+2 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10^{-4} & 1 \\ 5 \cdot 10^{-1} & -5 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a.) Löse $Ax = b$ in 2-stelliger Gleitpunktarithmetik mit Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung.

b.) Wann ist Spaltenpivotisierung erforderlich ?

Aufgabe 3.25 (KA: 9 Punkte)

Für welche Parameterwerte a, b, c besitzt das Gleichungssytem

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ 2 & 2b+3 & 4+a \\ 3 & 3b+6 & 7+2a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 24+c \end{pmatrix}$$

a) keine Lösung

b) genau eine Lösung

c) mehr als eine Lösung ?

Benutze die Gauss-Elimination, und gib die Lösung im Fall b) explizit an.

Aufgabe 3.26 (KA: 4+3+1+2+1 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 2.8 & -0.7 \\ 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ -0.4 & 0.0 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 3.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechne die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung, d.h. $PA = LR$, wobei P eine geeignete Permutationsmatrix ist. Gib L und R explizit an.

b) Löse das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

c) Ist die Matrix A invertierbar? Begründung !

d) Berechne die Kondition κ von A bzgl. der ∞-Norm.
(**Hinweis:** Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty \approx 2.604$.)

e) Betrachte nun das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Wie groß darf der relative Fehler $\|b - \tilde{b}\|_\infty / \|b\|_\infty$ höchstens sein, damit der relative Fehler $\|x - \tilde{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$ nicht größer als 5% ist ?

Aufgabe 3.27 (KA: 12 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.1111 & 0.1429 \\ 0.1429 & 0.1847 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.1194 \\ 0.1540 \end{pmatrix}.$$

Alle Werte resultieren aus Messungen und sind mit einem absoluten Fehler von maximal 0.00025 behaftet. Mit welchen Fehler (gemessen in der 1-Norm) müßt Du bei der Lösung x des Gleichungssystems rechnen? Bestimme die L-R Zerlegung von A (4-stellige Rechnung) und verwende diese zur Lösung des obigen Gleichungssystems. Führe anschließend einen Nachiterationsschritt aus.

Aufgabe 3.28 (KA: 11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3000 \\ 1.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1.17 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme $cond_\infty(A)$.

b) Löse $Ax = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Spaltenpivotisierung.

c) Löse $Ax = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Skalierung und *mit* Spaltenpivotisierung.

d) Welchen Effekt hat die Skalierung, welchen die Pivotisierung?

Aufgabe 3.29 (KA: 11 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & 0 & \alpha(\alpha - 2) \\ \alpha\beta & 0 & \alpha^2\beta + 1 & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha - 2) & 0 & \alpha^2(\alpha - 2) + \dfrac{\beta}{(\alpha - 2)^3} \end{pmatrix}$$

a) Für welche Werte von α und β is A positiv definit.

b) Berechne die Determinante von A.

c) Für $\alpha = 1$, $\beta = 2$ und $b = (6, -3, 7, -7)^T$ berechne man die Lösung von $Ax = b$.

d) Welche Vorteile hat die L-D-L^T-Zerlegung gegenüber der L-R-Zerlegung?