4 Ausgleichsrechnung, Fehlerquadratmethode

Aufgabe 4.1
Sei $Q \in \mathrm{IR}^{n \times n}$ orthogonal, d.h. $Q^T Q = I$.
Zeige ($\mathrm{cond}(A) = ||A||\,||A^{-1}||$):

a) $|\det Q| = 1$;

b) $||Q||_2 = 1$ und $||Q^T||_2 = 1$

c) $||QA||_2 = ||A||_2 = ||AQ||_2$ für $A \in \mathrm{IR}^{n \times n}$ beliebig

d) $||Qx||_2 = ||x||_2$ für $x \in \mathrm{IR}^n$ beliebig

e) $\mathrm{cond}_2\,(Q) = 1$

f) $\mathrm{cond}_2\,(QA) = \mathrm{cond}_2\,(A)$ für $A \in \mathrm{IR}^{n \times n}$ beliebig

g) Seien Q_1, $Q_2 \in \mathrm{IR}^{n \times n}$ orthogonal, dann ist auch das Produkt $Q_1 Q_2$ orthogonal.

Aufgabe 4.2

a) Seien x und y Vektoren im IR^2 mit $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$. Gib einen numerisch stabilen Algorithmus an, der eine orthogonale Matrix $Q \in \mathrm{IR}^{2 \times 2}$ ((Givens-Rotation) berechnet, die

$$Qx = y \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix} \text{c} & \text{s} \\ \text{-s} & \text{c} \end{pmatrix}$$

erfüllt.

b) Gib (orthogonale) Rotationsmatrizen $Q_{ik} \in \mathrm{IR}^{n \times n}$ an, für die gilt:

$$Q_{ik} e_i = e_k, \quad Q_{ik} e_j = e_j \ \text{ für } \ j \neq i, k.$$

Dabei bezeichnet e_j den j-ten Einheitsvektor des IR^n.

c) Gib mit Hilfe der Givens-Rotationen einen Algorithmus zur Berechnung der QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathrm{IR}^{m \times n}$, $m \geq n$, an. Hierbei ist $Q \in \mathrm{IR}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathrm{IR}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix.

d) Benutze den obigen Algorithmus um die Q-R–Zerlugungen der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad , \; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 & -13 \\ 0 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

zu berechnen.

Aufgabe 4.3

a) Sei $v \in \mathrm{IR}^n \backslash \{0\}$. Dann ist die Householder-Spiegelung definiert durch $Q_v = I - 2\frac{v\,v^T}{v^T v}$. Zeige:

1.) $Q_v = Q_v^T$;

2.) Q_v ist regulär und $Q_v^{-1} = Q_v$;

3.) $Q_{\alpha v} = Q_v, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;

4.) $Q_v y = y \Leftrightarrow y^T v = 0$;

5.) $Q_v v = -v$

b) Gib eine orthogonale Matrix Q an, so daß der Vektor $z = (1,2,2)^T$ unter Q auf den Vektor $-||z||_2\, e_1$ abgebildet wird, d.h. $Qz = -||z||_2\, e_1$. Dabei bezeichnet e_1 den ersten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4.4
Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem $||Ax - b||_2 = \min$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.999 & 1.001 \\ 1.001 & 0.999 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 0.667 \\ 0.667 \end{pmatrix}.$$

a) Berechne eine „least-squares“-Lösung des Problems in 7-stelliger (10-stelliger) Gleitpunktarithmetik. Gehe dabei zu den Normalgleichungen $A^T A x = A^T b$ über.

b) Berechne eine „least-squares“-Lösung des mit $\Delta b = (0, -1 \cdot 10^{-3}, 0)^T$ gestörten Problems in 7-stelliger (10-stelliger) Gleitpunktarithmetik. Gehe dabei wieder zu den Normalgleichungen $A^T A\tilde{x} = A^T \tilde{b}$ mit $\tilde{b} = b + \Delta b$ über.

c) Berechne die Kondition $\kappa_2(A^T A)$ und die Residuen $r =: ||Ax - b||_2$ sowie $\tilde{r} =: ||A\tilde{x} - \tilde{b}||_2$ in Taschenrechnerarithmetik.

d) Berechne eine „least-squares“-Lösung des Problems in 5-stelliger Gleitpunktarithmetik. Gehe dabei **nicht** zu den Normalgleichungen über sondern verwende orthogonale Transformationen.

Bemerkung: Die Kondition der Matrix A ist $\kappa_2(A) \approx 1.2 \cdot 10^3$. Durch den Übergang zu den Normalengleichungen tritt eine Konditionsverschlechterung ein.

Aufgabe 4.5
Bestimme die Q-R–Zerlugung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 12 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Q und R sind explizit anzugeben.

Aufgabe 4.6
Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte y_i

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & -1 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 1 & 3 & 3 \end{array}.$$

Bestimme die Gerade $y(t) = at + b$ so, daß die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{3}(y(t_i)-y_i)^2$ minimal wird. Formuliere dazu das entsprechende Ausgleichsproblem $||Ax-f||_2 =$ min und löse dieses mittels

a) Householder-Spiegelungen und

b) Givens-Rotationen.

Gehe dabei nicht zu den Normalgleichungen über.

Aufgabe 4.7
Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte y_i

t_i	-1	0	2
y_i	1	2	-3

Bestimme die Parabel $y(t) = at^2 + b$ so, daß die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{3}(y(t_i) - y_i)^2$ minimal wird. Formuliere dazu das entsprechende Ausgleichsproblem $||Ax - f||_2 \to$ min und löse dieses.

a) Benutze zur Lösung die Normalgleichungen.

b) Gehe nicht zu den Normalgleichungen über und löse das Ausgleichsproblem mittels Givens-Rotationen bei Verwendung von 3-stelliger Gleitpunktarithmetik.

Aufgabe 4.8
Gegeben seien die Werte

t_i	-1	-0.5	0	0.5	1
y_i	e^{-1}	$e^{-0.5}$	1	$e^{0.5}$	e^{1}

Bestimme zu diesen Werten die im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate (Approximation im quadratischen Mittel) optimale Parabel.

a) Benutze zur Lösung die Normalgleichungen.

b) Gehe nicht zu den Normalgleichungen über und löse das Ausgleichsproblem mittels Givens-Rotationen.

Aufgabe 4.9
Eine Kurve der Darstellung $f(x) = A\,x + ln(B\,x)$ soll derart an drei Meßpunkte (x_i, y_i) angepaßt werden, daß die Summe der Fehlerquadrate minimal ist. Berechne A und B zu

x_i	1	3	4
y_i	1	2	2

Aufgabe 4.10
Eine Parabel $y(x) = x^2$ soll im Interval $[-1, 1]$ durch eine Kurve der Darstellung $f(x) = a\,cos(\pi\, x) + b\,sin(\pi\, x) + c)$ so approximiert werden, daß die Summe der Fehlerquadrate zu den fünf Stützstellen -1, -0.5, 0, 0.5 und 1 minimal ist. Berechne a, b und c.

Aufgabe 4.11
Es seien die Punkte $(u_1, v_1) = (1, \frac{\sqrt{7}}{2}), (u_2, v_2) = (0, \frac{\sqrt{15}}{4})$ und $(u_3, v_3) = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ gegeben. Von den Punkten weiß man, daß sie einer Ellipsengleichung der Form

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

genügen sollten. Bestimme die Parameter $a, b > 0$ optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

Aufgabe 4.12
Gegeben seien Meßwerte

x_i	-5	-3	0	8	13
y_i	-9	-2	-14	4	-1

die zu einem Kreis mit unbekanntem Mittelpunkt und Radius gehören.

a) Stelle das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem mittels der impliziten Kreisgleichung auf.

b) Linearisiere das Problem mit einer geeigneten Substitution und bestimme die zugehörige Lösung.

Aufgabe 4.13 (KA: 2+6+1+2 Punkte)
Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte y_i

t_i	0	1	2
y_i	$3/4$	$9/4$	$13/4$

Gesucht ist die Gerade $y(t) = a(t-1) + b$ so, daß die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{3}(y(t_i) - y_i)^2$ minimal wird.

a) Formuliere das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Löse das Ausgleichsproblem mittels Givens–Rotationen. Gehe dabei nicht zu den Normalgleichungen über.

c) Wie groß ist das Residuum?

d) Fertige eine Skizze an, in der Du die Ausgleichsgerade und die Meßwerte einträgst.

Aufgabe 4.14 (KA: 9 Punkte)
Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte y_i

t_i	-1	0	1.5
y_i	1	2	1.5