Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, daß diese Meßdaten einer Funktion

$$y(t) = a\,t + b\,\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

genügen. Bestimme die Parameter a und b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formuliere dazu das entsprechende Ausgleichsproblem $||Ax - f||_2 \to$ min und löse dieses mittels Givens-Rotationen (4-stellige Rechnung). Gib die Funktion $y(t)$ und das Residuum explizit an. **ACHTUNG:** Das Lösen mittels Normalgleichungen gibt **keine** Punkte.

Aufgabe 4.15 (KA: 1+11+1 Punkte)
Gegeben seien die Meßwerte

i	0	1	2
t_i	0	1	$2/\sqrt{3}$
f_i	1	2	3

einer Größe $f(t)$. Aufgrund theoretischer Überlegungen genügt diese der Darstellung

$$f(t) = \alpha\,t^2 + \beta.$$

a.) Wie ist die *least-squares*-Lösung definiert?

b.) Bestimme die *least-squares*-Lösung mit Hilfe der QR-Zerlegung. Benutze Givens-Rotationen. Gehe dabei nicht zu den Normalengleichungen über.

c.) Wie groß ist der Betrag des Residuums?

Aufgabe 4.16 (KA: 2+8+2 Punkte)
Gegeben sind die Punkte

x_i	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y_i	0	41	3

.

Diese Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, sollen gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$\alpha\,x^2 + \beta\,y = \frac{91}{55}$$

liegen. Die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sollen optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode bestimmt werden.

a.) Wie lautet ein gleichwertiges lineares Ausgleichsproblem?

b.) Bestimme eine *least-squares*-Lösung mit QR-Zerlegung mittels Householder-Transformationen. Gehe dabei nicht zu den Normalengleichungen über.
(Hinweise: Rechne weitestgehend mit Brüchen! Führe nur einen Householder-Schritt durch!)

c.) Warum verändert sich die Kondition einer quadratischen und invertierbaren Systemmatrix in der 2-Norm bei Multiplikation mit Householder-Matrizen nicht ?

5 Iterative Lösung von Gleichungssystemen

Aufgabe 5.1
Bestimme für das Intervall $[0, 1.5]$ die Nullstelle(n) von $f(x) = \tan(x - 0.5)$ mittels Bisektion, Fixpunktverfahren, Newton–Verfahren und Sekantenverfahren bis auf einen absoluten Fehler von 0.01.
Prüfe beim Fixpunktverfahren die Voraussetzungen nach und führe a-priori und a-posteriori Abschätzungen durch.

Aufgabe 5.2
Bestimme die Nullstelle(n) von $f(x) = e^{-x} - x$ mittels Bisektion, Fixpunktverfahren, Newton–Verfahren und Sekantenverfahren bis auf einen absoluten Fehler von 0.01. Prüfe beim Fixpunktverfahren die Voraussetzungen nach und führe a-priori und a-posteriori Abschätzungen durch.
Führe obige Berechnungen auch mit folgenden Funktionen durch:

a) $f(x) = e^{-x^2} + 0.2 - x$,

b) $f(x) = ln(x + 2) - x$.

Aufgabe 5.3
Die Funktion $f(x) = 0.5 - 0.25\, e^x$ besitzt im Intervall $[0.5, 1]$ genau eine Nullstelle, die iterativ bestimmt werden soll.

a) Bestimme die Iterationsfunktion Φ_1 des Newton–Verfahrens sowie eine weitere Iterationsfunktion Φ_2, so daß gilt: $x = \Phi(x)$ ist Lösung des obigen Nullstellenproblems.
Hinweis: (zur Konstruktion von Φ_2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x = x$.

b) Zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß beide Iterationsverfahren für jeden beliebigen Startwert $x_0 \in [0.5, 1]$ gegen die eindeutige Nullstelle von f konvergiert.

c) Von welcher lokalen Ordnung konvergieren die Verfahren. Begründe Deine Antwort.

Aufgabe 5.4
Bestimme eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \cos x_1 + \tan x_2 - 5\, x_2 &= 0 \\ \sin x_1 - 6\, x_1 + \ln(x_2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

im Bereich $D = [-1, 1] \times [0, 1]$. Wieviele Iterationen sind höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = 0.01$ zu erreichen, wenn man mit dem Startwert $x^{(0)} = (0.5, 0.5)^T$ beginnt? Führe analoge Berechnungen für

$$0.1 \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1\, x_2\, x_3 + 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im Bereich $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$ mit $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ durch.

Aufgabe 5.5
In Aufgabe 3.8 wurde die *Nachiteration* behandelt. Überlege dir mit Hilfe des Fixpunktverfahrens warum und unter welchen Voraussetzungen das Verfahren konvergiert.

Aufgabe 5.6
Gesucht ist eine Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \ln(1+x_2) - 2x_1 &= 0 \\ \sin x_1 \cos x_2 - 4x_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

im Bereich $D = [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}]$.

a) Leite eine Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ mit $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})^T$, $k = 0, 1, \ldots$ her, und zeige. daß diese den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt.

b) Führe danach, ausgehend von $x^{(0)} = (0,0)^T$, einen Iterationsschritt durch.

c) Wieviele Iterationsschritte sind höchstens notwendig, um eine Näherung mit der Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-2}$ in der Maximumnorm zu gewinnen?

Aufgabe 5.7
Bestimme eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \cos x_1 + \tan x_2 - 5\,x_2 &= 0 \\ \sin x_1 - 6\,x_1 + \ln(x_2+1) &= 0 \end{aligned}$$

im Bereich $D = [-1, 1] \times [0, 1]$. Wieviele Iterationen sind höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = 0.01$ zu erreichen, wenn man mit dem Startwert $x^{(0)} = (0.5, 0.5)^T$ beginnt? Führe analoge Berechnungen für

$$0.1 \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1\,x_2\,x_3 + 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im Bereich $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,2]$ mit $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ durch.

Aufgabe 5.8
Gesucht sind Näherungslösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5\,x^2 - 6\,x\,y + 5\,y^2 - 32 &= 0 \\ 9\,x^2 - 16\,y^2 - 16 &= 0 \end{aligned} \, .$$

Verschaffe Dir zunächst mit Hilfe einer Skizze einen Überblick über die Anzahl und die Lage der Nullstellen. Verwende für die Iteration sowohl das Newton– als auch das vereinfachte Newton–Verfahren. Behandle

$$\begin{aligned} 4\,x^3 - 27\,x\,y^2 + 25 &= 0 \\ 4\,x^2 - 3\,y^3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

analog.

Aufgabe 5.9
Bestimme Näherungen $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ für eine bei $x^{(0)} = (1,1)^T$ liegende Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$f(x) := \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 27x_1x_2^2 + 25 \\ 4x_1^2 - 3x_2^3 - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Wende dazu

a) das Newton–Verfahren

$$J(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)})$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

mit dem Startwert $x^{(0)}$ an. Hierbei bezeichnet J die Jacobi–Matrix zu f. Iteriere, bis $||f(x^{(k)})||_\infty \leq 10^{-3}$ ist.

b) das vereinfachte Newton–Verfahren an, d.h. bestimme im ersten Newton–Schritt eine LR–Zerlegung von $J(x^{(0)})$, und benutze diese LR–Zerlegung als Approximation von $J(x^{(k)})$ in den weiteren Schritten. Gehe auch hier von dem Startwert $x^{(0)}$ aus, und iteriere bis $||f(x^{(k)})||_\infty \leq 10^{-3}$ ist.

c) Vergleiche Aufwand und Genauigkeit der beiden Verfahren.

Aufgabe 5.10
Gesucht wird die Lösung x eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Die Aufspaltung $A = D - L - R$ mit D diagonal, L und R strikte untere bzw. obere Dreiecksmatrizen, führt je nach Klammerung [$D - (L + R)$ oder $(D - L) - R)$] auf die Fixpunktiterationen

$$\begin{array}{rcllr} x^{(m)} & := & x^{(m-1)} + D^{-1}(b - Ax^{(m-1)})\,, & m = 1, 2, \ldots & \text{Jacobi-Verfahren} \\ x^{(m)} & := & x^{(m-1)} + (D - L)^{-1}(b - Ax^{(m-1)})\,, & m = 1, 2, \ldots & \text{Gauß-Seidel-Verfahren} \end{array}$$

Beide Verfahren sind durchführbar, wenn D^{-1} existiert, d.h., wenn alle Diagonalelemente von $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ungleich Null sind.

a) Zeige: Die Näherungslösungen $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, können wie folgt berechnet werden:

$$\begin{array}{rclll} x_i^{(m)} & = & \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m-1)}\right), & i = 1, \ldots, n\,, & \text{(Jacobi)} \\ x_i^{(m)} & = & \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m-1)}\right), & i = 1, \ldots, n\,, & \text{(Gauß-Seidel)} \end{array}$$

Welcher wesentliche Unterschied besteht zwischen beiden Verfahren in der Praxis ?

b) Betrachte als Beispiel den Fall

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & 0.5 & -0.3 \\ 1.2 & 3.7 & -1.7 \\ -0.2 & 1.3 & 2.5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 3.5 \\ 9.9 \end{pmatrix}.$$

Zeige mit dem Banachschen Fixpunktsatz, daß beide Verfahren für beliebige Startvektoren $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ gegen die exakte Lösung $x = (1, 2, 3)^T$ konvergieren.
Hinweis: Bestimme $\|I - D^{-1}A\|_\infty$ bzw. $\|I - (D - L)^{-1}A\|_\infty$

c) Führe, ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$, jeweils zwei Iterationsschritte mit dem Jacobi- bzw. Gauß-Seidel-Verfahren durch.

d) Was passiert, wenn man das (mehrdimensionale) Newton-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme einsetzt ?