Aufgabe 5.11
Bestimme eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sin x + e^{y} - 9\,y &= 0 \\ e^{-y^2} - \cos x + 7\,x &= 0 \end{aligned}$$

im Bereich $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

a) Wieviele Iterationen sind mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2}$ zu erreichen? Wie groß ist der Fehler (höchstens) nach der 2. Iteration?

b) Verbessere die in a) gewonnene Näherung mittels 2 Schritten des (vereinfachten) Newton–Verfahrens.

c) Führe nun einen weiteren Schritt des Fixpunktverfahrens durch und gib erneut eine a-posteriori Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 5.12 (KA: 8 Punkte)
Bestimme für das Intervall $[0, 1.5]$ den/die Fixpunkt(e) der Funktion

$$F(x) = \tan(x - 0.5)$$

bis auf einen absoluten Fehler von 0.01.
Benutze dazu das Fixpunktverfahren. Weise die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes explizit nach. (Begründe Deine Aussagen; ansonsten gibt es **keine** Punkte.) Führe a-priori und a-posteriori Fehlerabschätzungen durch.

Aufgabe 5.13 (KA: 5+1+1+1 Punkte)
Gesucht ist eine Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssytems:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2) \\ 2\,x_2 &= e^{-x_1} \end{aligned}$$

a.) Schreibe zunächst das nichtlineare Gleichungssystem in ein Fixpunktproblem um, und zeige mit dem Banachschen Fixpunktsatz, daß die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right)$ für die spezielle Fixpunktvorschrift Φ für alle Startwerte $x^{(0)} \in D = [0,1] \times [0,1]$ konvergiert.

b.) Führe, ausgehend von $x^{(0)} = (1,1)^T$, einen Iterationsschritt aus.

c.) Wieviele Iterationsschritte sind höchstens notwendig, um eine Näherung mit der Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-2}$ in der Maximumnorm zu gewinnen?

d.) Mit welcher Ordnung konvergiert die Banachsche Fixpunktiteration im allgemeinen, und durch welches andere Verfahren wird eventuell eine höhere Konvergenzordnung realisiert?

Aufgabe 5.14 (KA: 3+4+2+2 Punkte)
Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + x_2^2} &= 2\,x_1\,, \\ \sin\, x_1 + \cos\, x_2 &= 4\,x_2\,, \end{aligned}$$

besitzt im Intervall $D := [\,-1, 1\,] \times [\,-1, 1\,]$ genau eine Lösung $x^\star = (x_1^\star, x_2^\star)^T$.

a) Forme das obige Gleichungssystem durch geeignete Skalierung in eine äquivalente Fixpunktgleichung um. Gib die entsprechende Funktion Φ, deren Fixpunkt $x^\star$ ist, explizit an, und bestimme die Jacobi-Matrix von Φ.

b) Verifiziere für das Fixpunktproblem in a) die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

c) Führe ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (0,0)^T$ zwei Iterationsschritte mit dem obigen Verfahren durch.

Achtung: Berechne die trigonometrischen Funktionen in Bogenmaß!

d) Schätze mit Hilfe der in b) bestimmten Lipschitz-Konstanten den Fehler $\|x^{(2)} - x^\star\|_\infty$ nach zwei Iterationsschritten ab.

Aufgabe 5.15 (KA: 6+4+1+2 Punkte)

Man betrachte die Funktion

$$f(x) = e^x - e^{-x} - \frac{3}{2}.$$

Sie hat im Interval $D := [0, \frac{4}{5}]$ genau eine Nullstelle $x^* = \ln 2$, die man iterativ bestimmen will. Dazu seien die beiden Iterationsvorschriften

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \phi_1(x_k), \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad \text{mit} \quad \phi_1(x) := x - \tfrac{1}{5}e^{2x} + \tfrac{3}{10}e^x + \tfrac{1}{5} \\ x_{k+1} &= \phi_2(x_k), \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad \text{mit} \quad \phi_2(x) := x + e^x - e^{-x} - \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

gegeben.

a.) Sind die Iterationsvorschriften ϕ_1 und ϕ_2 in D kontraktiv ? Gib gegebenenfalls die Lipschitzkonstanten an.

b.) Zeige, daß ϕ_1 im Intervall $D = [0, \frac{4}{5}]$ selbstabbildend ist.
(Hinweis: Zur Nullstellenbestimmung benutze die Transformation $z = e^x$.)

c.) Mit welcher Ordnung konvergiert das durch die Iterationsvorschrift ϕ_1 gegebene Fixpunktverfahren ?

d.) Führe, ausgehend von $x_0 = 0$, zwei Iterationsschritte mit $x_{k+1} = \phi_1(x_k)$ durch. Warum ist $|x_1 - x_0|$ größer als $|x_2 - x_1|$?

Aufgabe 5.16 (KA: 12 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(e^x e^{-y} + \ln(x+1)\right) \\ \frac{1}{5}\left(\tan\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(y - \frac{3}{5}\right)^2\right) \end{pmatrix}.$$

a) Zeige: In $[0,2]^2$ hat F genau einen Fixpunkt.

b) Wieviele Iterationen sind mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = 0.01$ zu erreichen?

c) Stelle obige Fixpunktgleichung in ein Nullstellenproblem um und führe ausgehend vom Startwert $(0,0)^T$ zwei Schritte mit dem vereinfachten Newtonverfahren durch.

6 Interpolation mit Polynomen

Aufgabe 6.1
Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	4
f_i	-3	1	2	7

a) Bestimme mit der Interpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom 3. Grades durch die obigen Wertepaare.

b) Bestimme das Interpolationspolynom 3. Grades durch die obigen Wertepaare mittels des zugehörigen lin. Gleichungssystems.

c) Interpoliere die Wertetabelle gemäß der Newton Form.

d) Wie lautet das Interpolationspolynom unter Hinzunahme des Punktes $(x_4, f_4) = (-1, 1)$ (Berechnung nach a) bis c)) bzw. der Punkte $(x_4, f_4) = (-1, 1)$ und $(x_5, f_5) = (3, 6)$ (Berechnung nach c)).

Aufgabe 6.2
Berechne das Interpolationspolynom $p_5(x)$, das den Bedingungen $p_5(1) = -4$, $p_5'(1) = -7$, $p_5''(1) = -8$, $p_5(2) = -14$, $p_5'(2) = -8$ und $p_5(3) = 14$ genügt.

Aufgabe 6.3
Die Funktion $\sin x$ soll im Intervall $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ äquidistant so tabelliert werden, daß bei linearer bzw. kubischer Interpolation der Interpolationsfehler für jedes $x \in I$ kleiner als $\frac{1}{2}10^{-4}$ ist. Wie groß darf der Stützstellenabstand h dann höchstens sein und wieviele Funktionswerte müssen in die Tabelle aufgenommen werden?

Aufgabe 6.4
Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist als Tabelle gegeben.

x	0.0	0.5	1.0	1.5
$\sin x$	0.0	0.47943	0.84147	0.99750

a) Berechne einen Näherungswert für $f(0.75)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte und gib eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechne einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.25)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 3. Gib eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 6.5
Eine Bank besitzt einen Safe, zu dessen Öffnung die Kenntnis einer Kombination aus fünf natürlichen Zahlen $n_i, 1 \leq i \leq 5$ benötigt wird. Bei der Bank sind 20 Kassierer angestellt. Je fünf von ihnen sollen in der Lage sein, gemeinsam den Safe zu öffnen, aber eine kleinere Gruppe soll den Safe nicht öffnen können.

Aufgabe 6.6
Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ ist als Tabelle gegeben.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.0	0.96079	0.85214	0.69768	0.52729	0.36788

a) Berechne einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.5)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von vier Tabellenwerten und gib eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechne einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.1)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 3. Gib eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 6.7 (KA: 9 Punkte)

Zur Berechnung der Funktion $f(x) = \cos x$ steht die folgende Tabelle zur Verfügung.

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
$\sin x$	0.0000	.2474	.4794	.6816	.8415	.9490	.9975
$\cos x$	1.000	.9689	.8776	.7317	.5403	.3153	.07074

a) Berechne einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.9)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von vier Tabellenwerten und gib eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechne einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.1)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 2. Gib eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 6.8 (KA: 4+6 Punkte)

Die Funktion $f(x) = 2\,\sin(3\pi x)$ soll polynomial interpoliert werden und zwar zu den Stützstellen $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{12},\ x_2 = \frac{1}{6}$.

a.) Berechne das Interpolationspolynom in der Newton-Darstellung, und werte es an der Stelle $x = \frac{1}{24}$ aus.

b.) Gib eine Abschätzung für den Fehler $|f(x) - P(f|x_0, x_1, x_2)(x)|$ im Intervall $[0, \frac{1}{6}]$ an, wobei Du die Extrema von $|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$ bestimmst.