Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Wolfgang Dahmen Karl-Heinz Brakhage

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Aufgaben zur Numerischen Mathematik I für Maschinenbauer, SS 2000
Nichtlinearer Ausgleich

Aufgabe 1

Gegeben seien Meßwerte

t_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
y_i	0	-0.21	0	0.01

,

die dem Bildungsgesetz

$$y(t) = e^{\beta t} \cos(t + \alpha)$$

gehorchen. Bestimme nun die Parameter α und β, in dem Du zwei Schritte mit dem Gauss–Newton–Verfahren zu den Startwerten $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_0 = -1$ durchführst.
Die Berechnung soll sowohl mittels orthogonaler Transformationen als auch über die Normalgleichungen durchgeführt werden.

Aufgabe 2

Gegeben seien Meßwerte

t_i	0.1	0.2	0.3
y_i	0.395	0.134	-0.119

,

die dem Bildungsgesetz

$$y(t) = Ce^{\lambda t} \cos(2\pi t)$$

gehorchen (gedämpfte Schwingung). Bestimm die Parameter C und λ, in dem Du zwei Schritte mit dem Gauss–Newton–Verfahren zu den Startwerten $C_0 = 0.5$, $\lambda_0 = 1$ durchführst.

Aufgabe 3

Gegeben seien Meßwerte

x_i	-5	-3	0	8	13
y_i	-9	-2	-14	4	-1

,

die zu einem Kreis mit unbekanntem Mittelpunkt und Radius gehören.

a) Stelle das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem mittels der impliziten Kreisgleichung auf.

b) Linearisiere das Problem mit einer geeigneten Substitution und bestimme die zugehörige Lösung.

c) Verbessere die in b) gewonnene Näherung durch zwei Schritte des Gauß-Newton-Verfahrens angewandt auf das in a) aufgestellte Ausgleichsproblem.

Aufgabe 4

An einem Quader mißt man die Kanten der Grundfläche $a = 21$ cm, $b = 28$ cm und die Höhe $c = 12$ cm. Weiter erhält man als Meßwerte für die Diagonale der Grundfläche $d = 34$ cm, für die Diagonale der Seitenfläche $e = 24$ cm und für die Körperdiagonale $f = 38$ cm. Zur Bestimmung der Längen der Kanten des Quaders nach der Methode der kleinsten Quadrate verwende man das Verfahren von Gauß–Newton.

Aufgabe 5

Gegeben seien die Meßdaten

t_i	-3	-2	-1
$f(t_i)$	4	-2	6

Aufgrund theoretischer Überlegungen vermutest Du, daß diese Meßdaten der Funktion

$$f(t) = \alpha \left(e^{\beta t} - t\right)$$

genügen. Bestimme eine Approximation für die Parameter $\alpha, \beta \in \mathrm{IR}$, indem Du einen Schritt mit dem Gauß-Newton-Verfahren zum Startwert $(\alpha_0, \beta_0) = (5, 0)$ durchführst. Löse das dabei entstehende lineare Ausgleichsproblem mittels Givensrotationen.

Aufgabe 6

Gegeben seien die Meßdaten

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Bestimme eine „least-squares"-Lösung $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ zu der nichtlinearen Funktion

$$f(x) = \alpha \sin(\beta x).$$

Gehe dabei wie folgt vor:

a) Stelle ein nichtlineares Ausgleichsproblem auf.

b) Löse dieses Problem, indem Du zu einer Iteration von linearen Ausgleichsproblemen übergehst. Diese Iteration erhältst Du, wenn Du $f(x)$ durch eine Linearisierung ersetzen. Benutze zur Lösung der linearen Probleme eine QR-Zerlegung und iteriere ausgehend vom Startwert $(\alpha_0, \beta_0) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ zwei Schritte.

Aufgabe 7

Du hast folgende Meßreihe ermittelt:

t_i	-3	0	5
y_i	1.1	2.1	3.1

Vermutlich gehorcht $y(t)$ der Funktion

$$y(t) = a\sqrt{b+t} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathrm{IR}$$

. Bestimme eine Approximation für die Parameter a, b, indem Du *einen* Schritt mit dem Gauß-Newton-Verfahren zu den Startwerten $a = 1, b = 4$ durchführst. Löse das dabei entstehende lineare Ausgleichsproblem, indem Du zu den Normalengleichungen übergehst.

Aufgabe 8

In einem Experiment habst Du folgende Meßdaten gemessen:

t_i	$1/2$	1	$3/2$	2
y_i	0	0.15712	-0.05237	0

Aufgrund von theoretischen Überlegungen vermutst Du, daß die Daten der Funktion

$$y(t) = \sin(\alpha\pi t)\cos(\beta\pi t)$$

gehorchen.

a) Gib eine Iteration von linearen Ausgleichsproblemen an, mit deren Hilfe Du die Lösung dieses nichtlinearen Ausgleichsproblems annähern kannst.

a) Berechne einen Iterationsschritt ausgehend vom Startwert $(\alpha_0, \beta_0)^T = (1,1)^T$, indem Du zu den Normalengleichungen übergehst. Benutzen dabei 4-stellige Gleitpunktarithmetik.

a) Gib eine andere Methode an, mit der Du ein lineares Ausgleichsproblem lösen kannst. Welche Vor- und Nachteile hat dieses Verfahren gegenüber der Iteration von Normalengleichungen?

Aufgabe 9

Um die Amplitude A und den Phasenwinkel Φ einer Schwingung

$$x(t) = A\sin(2t + \Phi)$$

zu bestimmen, sind an vier Zeitpunkten t_k die Auslenkungen x_k beobachtet worden.

t_k	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
x_k	1.6	1.1	−1.8	−0.9

Stelle ein lineares Ausgleichsproblem auf und berechnen eine „least-squares"-Lösung.

Hinweis: Führe nach Anwendung eines Additionstheorems neue Unbekannte ein.

Aufgabe 10

Gegeben seien die Messdaten

x	0	$\pi/2$	π
$f(x)$	0	$1/2$	$-1/2$

.

Bestimme eine „least-square"-Lösung $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ zu der nichtlinearen Funktion

$$f(x) = \alpha \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

. Gehe dabei wie folgt vor:

a) Stelle ein nichtlineares Ausgleichsproblem auf!

b) Löse dieses Problem, indem Du zu einer Iteration von linearen Ausgleichsproblemen übergehst. Diese Iteration erhältst Du, wenn Du $f(x)$ durch eine Linearisierung ersetzt. Benutze zur Lösung der linearen Probleme eine QR-Zerlegung und iteriere ausgehend vom Startwert $(\alpha_0, \beta_0) = (2/3, 2/3)$ zwei Schritte.

Aufgabe 11

Gegeben seien folgende Meßwerte

t_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
y_i	0	-0.21	0	0.01

,

die näherungsweise dem Bildungsgesetz

$$y(t) = e^{\beta t}\cos(t + \alpha)$$

gehorchen.

a) Formuliere das nichtlineare Ausgleichsproblem.

b) Bestimme Näherungen für die Parameter α und β, indem Du einen Schritt mit dem Gauß–Newton–Verfahren zu den Startwerten $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_0 = -1$ durchführst.

Aufgabe 12

Gegeben seien die Meßwerte

t_i	0	1	2
y_i	4	5	8

,

die näherungsweise dem Bildungsgesetz

$$y(t) = 2(t^2 - t + 1)\alpha - t^2\alpha^2 + t\beta$$

gehorchen, in dem noch die Parameter α und β bestimmt werden müssen.

a) Formuliere das zugehörige <u>nichtlineare</u> Ausgleichsproblem.

b) Führe zwei Schritte des <u>vereinfachten</u> Gauß–Newton–Verfahrens (d. h., es wird immer $DF(x^{(0)})$ statt $DF(x^{(i)})$ verwendet) mit dem Startvektor $x^{(0)} := \binom{\alpha^{(0)}}{\beta^{(0)}} := \binom{1}{2}$ aus. Löse die auftretenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der LR–Zerlegung.

b) Wie groß ist das Residuum nach dem ersten Schritt?