Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Wolfgang Dahmen Karl-Heinz Brakhage
RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Aufgaben zur Numerischen Mathematik I für Maschinenbauer, SS 2000
Numerische Quadratur

Aufgabe 1

Es seien $Q_2 f$ die Trapezregel und $Q_3 f$ die Simpsonregel für das Intervall $[-1,1]$.
Dann gelten die folgenden Fehlerdarstellungen:

a) $\forall f \in C^2[-1,1]\ \ R_2 f := I\,f - Q_2 f = -\dfrac{2}{3} f''(\psi),\ \psi \in (-1,1)$

b) $\forall f \in C^4[-1,1]\ \ R_3 f := I\,f - Q_3 f = -\dfrac{f^{(4)}(\psi)}{90},\ \psi \in (-1,1)$

Seien nun $\tilde{Q}_2 f$ die Trapezregel und $\tilde{Q}_3 f$ die Simpsonregel transformiert auf das Intervall $[a,b]$. Zeige:

$$\forall f \in C^2[a,b]\ \ \tilde{R}_2 f := I\,f - \tilde{Q}_2 f = -\frac{f''(\psi)}{12}(b-a)^3,\ \psi \in (a,b)$$

$$\forall f \in C^4[a,b]\ \ \tilde{R}_3 f := I\,f - \tilde{Q}_3 f = -\frac{f^{(4)}(\psi)}{2880}(b-a)^5,\ \psi \in (a,b)$$

Aufgabe 2

Bestimme mit der Mittelpunktsregel, Trapezregel, Simpsonregel, 3/8-Regel und Milne Regel Näherungen für die Integrale $\int_{-1}^{1} e^x dx$ bzw. $\int_1^2 \ln x\, dx$ und gib entsprechende Fehlerabschätzungen an (ohne die exakten Integralwerte zu benutzen).

Aufgabe 3

Es seien $I\,f := \int_{-1}^{1} f(x)dx$ und $Q\,f = a_1 f\left(-\frac{3}{4}\right) + a_2 f(0) + a_3 f(x_3)$ eine Quadraturformel.

a) Bestimme für $x_3 = \frac{3}{4}$ die übrigen Unbekannten a_1, a_2 und a_3 so, daß Q möglichst hohen Grad hat und gib diesen explizit an.

b) Bestimme für $a_3 = \frac{1}{2}$ die übrigen Unbekannten a_1, a_2 und x_3 so, daß Q möglichst hohen Grad hat und gib diesen explizit an.

c) Benutze die Formeln aus a) und b), um Näherungen für die Integrale $\int_{-1}^{1} e^x dx$ bzw. $\int_1^2 \ln x\, dx$ zu bestimmen.

Aufgabe 4

a) Bestimme die zu den drei Quadraturformeln Mittelpunkts-, Trapez- und Simpsonregel gehörigen summierten Regeln (zu der äquidistanten Unterteilung $x_i = a + ih,\ i = 0,\dots,n, h = \dfrac{b-a}{n}$) und gib jeweils eine Fehlerdarstellung an.

b) Bestimme n so, daß die Abweichung der summierten Regeln aus a) vom exakten Integralwert $\int_{0.1}^{1} \dfrac{1}{x} dx$ maximal 10^{-5} beträgt.

Führe die gleichen Rechnungen nun für $\int_{0.1}^{0.4} \dfrac{1}{x} dx$ und $\int_{0.4}^{1} \dfrac{1}{x} dx$ durch, wobei der maximale Fehler nun jeweils bei $5 \cdot 10^{-6}$ liegen soll. Kommentiere die Ergebnisse!

Aufgabe 5

Ist f auf $[a, b]$ mindestens viermal stetig differnzierbar, so gelten für die n-fach summierten Formeln der Mittelpunkts- und der Trapezregel die Fehlerdarstellungen $R_n^M = -\frac{c}{2}h^2 + R_M(h)$ und $R_n^T = c\,h^2 + R_T(h)$, wobei $h = \frac{b-a}{n}$ und R_T bzw. R_M Restterme sind, die wie h^4 gegen Null gehen. c hängt nur von f und $[a, b]$ ab.

a) Konstruiere durch Kombination der beiden Regeln eine Quadraturformel, deren Fehler bei n-facher Summation wie h^4 gegen Null geht.

b) Bestimme $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ mittels der in a) gewonnenen Formel für $n = 2$. Wie läßt sich der Fehler (grob) abschätzen?

c) Bestimme $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ mittels Rombergintegration ($h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$) und der Schrittweitenfolge nach Bulirsch ($h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$). Wie läßt sich der Fehler hier (grob) abschätzen?

Aufgabe 6

Es sei f eine in $[-1, 1]$ genügend oft differenzierbare Funktion und

$$Q(f) := \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

eine Quadraturformel.

a) Bestimme die Gewichte α_1 und α_2 sowie die Stützstellen x_1 und x_2 so, daß $Q(f)$ für Polynome möglichst hohen Grades exakt ist.

b) Berechne mit $Q(f)$ eine Näherung für

$$\int_1^2 \ln x dx.$$

Aufgabe 7

Es sei f eine in $[-1, 1]$ genügend oft differenzierbare Funktion. Bestimme die Stützstellen x_i und die Gewichte a_i in

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

so, daß die Formel für Polynome möglichst hohen Grades exakt ist.
Benutze die oben gewonnene Quadraturformel zur näherungsweisen Berechnung von $\int_{-1}^1 e^x dx$ bzw. $\int_1^2 \ln x\, dx$.

Aufgabe 8

a) Nähere

$$\int_0^1 \sin(\pi\, x)\, dx$$

mittels der Mittelpunkts- und der Trapezregel mit Schrittweite $h = 0.2$ an. Schätze den Fehler ab, ohne den exakten Wert des Integrals zu benutzen.

b) Berechne für die Trapezregel zum obigen Integral Näherungen zu den Schrittweiten 1, 0.5 und 0.25 und führe damit eine adäquate Extrapolation durch. Wie läßt sich der Fehler jetzt schätzen?