

2. Übung zur Numerischen Mathematik I für Maschinenbauer, SS 99

Aufgabe 1

Zahlendarstellung

- a.) Bestimme die normalisierte Dezimaldarstellung der folgenden Dualzahlen

$$1101.01 \quad 10.\overline{101} \quad 110.\overline{10110}$$

- b.) Bestimme die normalisierte Dualdarstellung der folgenden Dezimalzahlen

$$7, \quad 1024, \quad 8.75, \quad 0.\overline{3}, \quad 0.\overline{142857}, \quad 0.0\overline{6}, \quad 0.1.$$

Aufgabe 2

Zahlendarstellung

Bestimme alle positiven Maschinenzahlen $M(2, 4, -4, 3)$ und markiere sie auf der Zahlengeraden.

Aufgabe 3

Kondition

Sei $f(x, y) = \sqrt{5(x - \sqrt{x^2 - y^2})}$.

- i) Bestimme $f(\frac{1}{8}, \frac{1}{10})$ und gib den relativen Fehler an
 - a) bei Rechnung in $M(10, 3, -4, 3)$,
 - b) bei Rechnung in $M(10, 2, -4, 3)$,
 - c) bei Rechnung mit deinem Rechner, aber mit Eingangsdaten, die nur auf 2 Stellen hinter dem Komma genau angegeben sind.
- ii) Bestimme allgemein in erster Näherung den relativen Fehler $\frac{\Delta f}{f}$ in Abhängigkeit von $\frac{\Delta x}{x}$ und $\frac{\Delta y}{y}$.
- iii) Gib eine Formel für f an, die bei $x \simeq y$ ein günstigeres Verhalten zeigt.

Aufgabe 4

Normen

- a) Welche der folgenden Abbildungen definieren Normen im \mathbb{R}^2 ?

$$x \mapsto |x_1|, \quad x \mapsto 5|x_1| + 2|x_2|, \quad x \mapsto \max(4|x_1|, |x_2|),$$

$$x \mapsto x_1 + x_2, \quad x \mapsto \sqrt{x_1 + x_2}, \quad x \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$x \mapsto |x_1| + |x_2|, \quad x \mapsto \max(|x_1|, |x_2|).$$

- b) Skizziere die Einheitssphären $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ zu den Normen in a).
- c) Welche Matrixnormen gehören zu den letzten 3 Normen?

Aufgabe 5

Kondition linearer Gleichungssysteme

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \pm \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Mit welchem relativen Fehler (in x — ∞ -Norm) muß man rechnen, wenn statt $Ax = b$ das LGS $Ax = \tilde{b}$ gelöst wird. Mache Deine Angaben ohne $Ax = b$ zu lösen.
- b) Die durch $Ax = b$ gegebenen Gleichungen werden nun wie folgt behandelt: Für $i = 1, 2$ wird die i -te Gleichung durch $\sum_k |a_{ik}|$ geteilt. Untersuche das so entstehende Gleichungssystem wie unter a).
- c) Löse nun $Ax = b$ und berechne damit den relativen Fehler.

Aufgabe 6

Kondition linearer Gleichungssysteme

Die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 0.500 & 0.333 & 0.250 \\ 0.333 & 0.250 & 0.200 \\ 0.250 & 0.200 & 0.167 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1.083 \\ 0.783 \\ 0.617 \end{pmatrix} \text{ ist } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Runde die rechte Seite korrekt auf 3 Dezimalen. Mit welchem Fehler in x ist nun zu rechnen? Berechne die Lösung des so entstandenen Gleichungssystems mit 3- und 4-stelliger Gleitpunktarithmetik sowie möglichst genau.

Führe die Berechnungen auch mit ungerundeter rechter Seite durch.

Hinweis: Die Kondition obiger Matrix ist $\text{cond}_2 \approx 1350$