Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Wolfgang Dahmen Karl-Heinz Brakhage

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

3. Übung zur Numerischen Mathematik I für Maschinenbauer, SS 99

Fehlerfortpflanzung – Kondition – Stabilität

Aufgabe 1

Die folgenden Ausdrücke sollen so umgeformt werden, daß ihre Auswertung stabil wird (Begründung!):

a.) $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x}$ für $|x| << 1$

b.) $\dfrac{1-\cos x}{x}$ für $x \neq 0$ und $|x| << 1$

c.) Führe die Berechnungen der Ausdrücke in a.) und b.) in stabiler und gegebener Form für $x \approx 10^{-4}$ mit einfacher Genauigkeit (single, float, real, ...) durch und erläutere die Resultate.

Aufgabe 2

Man möchte den Ausdruck

$$f = f_1 = (\sqrt{2} - 1)^6$$

mit dem Näherungswert $\sqrt{2} \approx 1.4$ berechnen. Man kennt für f noch die Darstellungen

$$\begin{aligned} f = f_2 &= \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} \\ f = f_3 &= (3 - 2\sqrt{2})^3 \\ f = f_4 &= \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} \\ f = f_5 &= 99 - 70\sqrt{2} \\ f = f_6 &= \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Zeige zunächst $f_i = f_1$ für $i = 1, 2, \ldots, 6$. Welche der Darstellungen führt zu dem besten Resultat? Begründe Deine Antwort ohne die Berechnung der einzelnen f_i. Benutze dazu $1.4 < \sqrt{2} < 1.42$ und schätze den absoluten Fehler ab.

Aufgabe 3

Für $n \in I\!N_+$ seien a_n bzw. b_n die Seitenlängen eines dem Einheitskreis ein- bzw. umschriebenen regelmäßigen $6 \cdot 2^n$-Ecks. Dann gilt ja

$$6 \cdot 2^{n-1}\, a_n \leq \pi \leq 6 \cdot 2^{n-1}\, b_n$$

Geometrische Überlegungen führen auf folgende Rekursionsformeln:

$$a_0 = 1\,, \quad b_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A1) \quad a_{n+1} = \sqrt{2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)} \qquad B1) \quad b_{n+1} = \frac{4}{b_n}\left(\sqrt{\left(\frac{b_n}{2}\right)^2+1}-1\right)$$

$$A2) \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)}} \qquad B2) \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{\sqrt{\left(\frac{b_n}{2}\right)^2+1}+1}$$

a) Zeige, daß sich die verschiedenen Ausdrücke für a_{n+1} bzw. b_{n+1} ineinander überführen lassen.

b) Berechne für $n = 1, \ldots, 20$ nach jeder dieser Formeln (so wie sie hier stehen) untere bzw. obere Schranken für π mit einfacher Genauigkeit (single, float, real, ...). Erläutere die Ergebnisse.

Aufgabe 4

Man bestimme den maximalen (absoluten und relativen) Fehler in $y := x_1 x_2^2 \sqrt{x_3}$ für

$$x_1 = 2.0 \pm 0.1, \quad x_2 = 3.0 \pm 0.2, \quad x_3 = 1.0 \pm 0.1$$

mit Hilfe der differentiellen Fehleranalyse.
Berechne die Konditionszahlen. Welche Variable trägt am meisten zum Fehler bei?

Aufgabe 5

Die Ausdrücke

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^4 - 39.8x^3 + 594.05x^2 - 3941.0005x + 9805.051 \\ p_2(x) &= (x-10)^4 + 0.2(x-10)^3 + 0.05(x-10)^2 - 0.005(x-10) + 0.001 \end{aligned}$$

repräsentieren dasselbe Polynom. Man berechne den Wert des Polynoms für die gerundete Zahl $x = 10.11$. Berechne zunächst die Kondition des Problems. Rechne dann so genau, daß der relative Fehler in x und der Fehler durch die Berechnung dieselbe Größenordnung haben. Wie sind die Ausdrücke $p_1(x)$ und $p_2(x)$ dazu auszuwerten? Überprüfe die Überlegungen numerisch.
Die Koeffizienten werden nun als exakte Zahlen betrachtet. Einen wie großen (relativen) Fehler erhält man in $p_1(10.11)$, wenn die Koeffizienten auf 6 signifikante Ziffern gerundet werden?