Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Wolfgang Dahmen Karl-Heinz Brakhage

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

4. Übung zur Numerischen Mathematik I für Maschinenbauer, SS 99

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1

ein Beispiel

Differenzenverfahren für gewöhnliche Randwertaufgaben

a.) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\alpha, \beta, \gamma : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine C^2-Funktion $y : [a; b] \to \mathbb{R}$, die die *lineare Randwertaufgabe*

$$y''(x) + \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) + \gamma(x) = 0, \qquad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

löst. Um diese Gleichung näherungsweise zu lösen, teilen wir das Intervall $[a, b]$ in $N (\in \mathbb{N})$ gleiche Teile und setzen

$$h := \frac{b-a}{N}, \qquad x_i := a + ih$$

für alle $i \in \{0, \ldots, N\}$. Ferner sei y_i die zu bestimmende Näherung für $y(x_i)$. Wir bestimmen y_i, indem wir in der zu lösenden Gleichung die folgenden Näherungen einsetzen:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

für $i = 1, \ldots, N-1$. Dadurch erhalten wir ein System von $N-1$ Gleichungen für die $N+1$ Unbekannten $y_0, \ldots, y_N$. Wie lauten diese Gleichungen?

b.) In dem in a.) bestimmten Gleichungssystem sind y_0 und y_N bereits bekannt. Nutze diese bekannten Werte aus, um das System auf ein lineares System von $N-1$ Gleichungen in $N-1$ Unbekannten zu reduzieren und gib dieses Gleichungssystem (Matrix, Unbekannte und rechte Seite) an!

c.) Es sei nun

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad y(-1) = y(1) = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right).$$

Bestimme Näherungen für y mit $N = 4, 8, 16, \ldots$.

Aufgabe 2

Gaußelimination vs. LR–Zerlegung

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 8 & 7 & -7 & -6 \\ -6 & 16 & -2 & 13 \\ -10 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die Lösung von $A\,x = b$ mit Gaußelimination.

b) Bestimme die Lösung von $A\,x = c$ mit Gaußelimination.

c) Berechne die Determinante von A.

d) Bestimme die $L\,R$–Zerlegung von A.

e) Berechne nochmals die Determinante von A.

f) Löse nun $A\,x = b$ und $A\,x = c$ mit der $L\,R$–Zerlegung von A.

Führen obige Berechnungen mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 & -13 \\ 0 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{durch.}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 1 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die $L\,R$–Zerlegung von A.

b) Wie hängt die Lösung von α, β, γ und δ ab?

c) Berechne die Determinante von A.

Aufgabe 4

$L\,R$ für Tridiagonalmatrizen

Es seien $n \in \mathbb{N}, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Formuliere die $L\,R$ Zerlegung für A sowie Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen zur Lösung von $A\,x = d$.

Aufgabe 5

Berechne mit 3–stelliger, 4–stelliger dezimaler Gleitpunktarithmetik sowie mit Taschenrechnergenauigkeit die Lösung des Gleichungssystems $A\,x = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 9 & -1 \\ 5 & -0.5 & 0.01 \\ 4 & -1 & 0.01 \end{pmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} -99 \\ 10 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

Interpretiere die Ergebnisse.