Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Wolfgang Dahmen Karl-Heinz Brakhage

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

# 5. Übung zur Numerischen Mathematik I für Maschinenbauer, SS 99

Lineare Gleichungssysteme

## Aufgabe 1 — Pivotisierung

Berechne mit 2–stelliger, 3–stelliger dezimaler Gleitpunktarithmetik sowie mit Taschenrechnergenauigkeit jeweils mit Spaltenpivotisierung die Lösung des Gleichungssystems $A\,x = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 9 & -1 \\ 5 & -0.5 & 0.01 \\ 4 & -1 & 0.01 \end{pmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} -99 \\ 10 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

Interpretiere die Ergebnisse insbesondere im Hinblick auf Aufgabe 5 des letzten Übungsblattes. Führe die Berechnungen auch mit der rechten Seite

$$b' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

durch.

## Aufgabe 2 — Pivotisierung – Skalierung

Berechne mit 3–stelliger, 4–stelliger dezimaler Gleitpunktarithmetik sowie mit Taschenrechnergenauigkeit jeweils mit Spaltenpivotisierung die Lösung des Gleichungssystems $A\,x = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 543 & -96 \\ 6 & -0.5 & 0.01 \\ 5 & -2 & 0.01 \end{pmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Führe die Berechnungen nun mit Skalierung durch. Interpretiere die Ergebnisse.

## Aufgabe 3 — L-D-L$^T$ – Zerlegung (Cholesky)

Bestimme die L-D-L$^T$ – Zerlegung für die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 8 \\ 2 & 8 & 30 \end{pmatrix}.$$

Führe die Berechnung auch für

$$B = \begin{pmatrix} 5.3 & 7 & 2.9 & 15 \\ 7 & 10.8 & 10.5 & 20 \\ 2.9 & 10.5 & 36.5 & 10 \\ 15 & 20 & 10 & 61 \end{pmatrix}$$

durch.

## Aufgabe 4 — L-D-L$^T$ – Zerlegung (Cholesky)

Bestimme alle reellen Werte von $a$, für die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -a & 0 \\ 0 & -a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

## Aufgabe 5

Nachiteration

Zur Erinnerung: Bei der Bestimmung von $A\,x = b$ entstehen während der Berechnung fast immer Rundungsfehler. Diese Fehler kann man iterativ vermindern. Dazu wird der *Residuenvektor* $r = b - A * x$ meist doppelt genau berechnet. Der Algorithmus sieht folgendermaßen aus.

1) Berechne $L\,R = A$ (numerische $LR$-Zerlegung .
2) Bestimme $x_0$ (etwa aus $L\,R\,x_0 = b$).
3) Berechne $r_k = b - A\,x_k$ doppelt genau.
4) Berechne $x_{k+1}$ aus $L\,R(x_{k+1} - x_k) = r_k$
5) zurück zu 3).

Die Lösung von

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{107}{210} \\ \frac{73}{168} \\ \frac{191}{504} \end{pmatrix} \text{ ist } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Runde die Koeffizientenmatrix korrekt auf 5 Dezimalen und die rechte Seite so, daß die Lösung unverändert bleibt. Verwende nun den obigen Algorithmus mit 5- bzw. beim Residuum 10-stelliger Rechnung und führe zwei Nachiterationsschritte aus.

## Aufgabe 6

Normäquivalenz

Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

a.) $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$
b.) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le \sqrt{n}\|A\|_2$
c.) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_\infty$
d.) $\frac{1}{n}\|A\|_\infty \le \|A\|_1 \le n\|A\|_\infty$.

## Aufgabe 7

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, d.h. $Q^T Q = I$.
Zeige ($\mathrm{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$):

a) $\|Q\|_2 = 1$
b) $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig
c) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig
d) $\mathrm{cond}_2(Q) = 1$
e) $\mathrm{cond}_2(QA) = \mathrm{cond}_2(A)$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig