Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Wolfgang Dahmen   Karl-Heinz Brakhage

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

6. Übung zur Numerischen Mathematik I für Maschinenbauer, SS 99

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1

Fehlerabschätzungen

Das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix}$$

hat die Lösung $x = (\,1 \quad -1\,)^T$.

a) Bilde zu den drei gegebenen Näherungsvektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1.01 \\ -0.98 \end{pmatrix} \quad , \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0.005 \\ 2.01 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}$$

die Residuen $r_i(x_i) = A\,(x_i - x)$. Was könnte man fälschlicherweise über die Qualität der x_i schließen?

b) Mit welchen absoluten Fehler muß in der 1–Norm (2–Norm, ∞–Norm) für x gerechnet werden, wenn statt b der fehlerbehaftete Vektor $\tilde{b}$ mit $||b - \tilde{b}||_1 \leq 0.1$ ($||b - \tilde{b}||_2 \leq 0.075$, $||b - \tilde{b}||_\infty \leq 0.05$) benutzt wird?

c) Schätze den in x zu erwartenden Fehler (relativ und absolut) ab, wenn statt A fälschlich $\hat{A}$ und statt b der Vektor $\hat{b}$ mit

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3.001 & 1 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 2.001 \\ 4 \end{pmatrix}$$

benutzt wird. Führe die Berechnungen in der 1–, 2– und ∞–Norm durch.

Aufgabe 2

Fehlerabschätzungen

Betrachte das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{45}{56} \\ \frac{25}{36} \end{pmatrix},$$

sowie das System $\tilde{A}\,\tilde{x} = \tilde{b}$, wobei $\tilde{A}$ aus A und $\tilde{b}$ aus b gewonnen werden, indem die Koeffizienten bzw. Komponenten in Dezimaldarstellung auf 3 (sowie 4) Dezimalen nach dem Komma gerundet werden.
Schätze den relativen Fehler in x ab und vergleiche ihn mit dem wahren Fehler.

Aufgabe 3

Fehlerabschätzungen

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme cond(A) für die 1–, 2– und ∞–Norm.

b) Schätze den relativen und absoluten Fehler ab, der entsteht, wenn man statt $A\,x = b$ das gestörte System $\tilde{A}\,x = b$ mit $|\varepsilon| < 0.5$ löst.

Aufgabe 4 Kondition und Fehleranalyse von Gleichungssystemen

Gesucht wird die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & -0.6 & -0.4 \\ -0.6 & 1.5 & 0.1 \\ -0.4 & 0.1 & 1.3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 2.3 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von Datenfehlern (z.B. Meßfehler bei der Bestimmung der Koeffizienten) steht jedoch nur die folgende, gestörte Matrix $\tilde{A}$ bzw. die gestörte rechte Seite $\tilde{b}$ zur Verfügung:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2.009 & -0.599 & -0.400 \\ -0.600 & 1.497 & 0.098 \\ -0.395 & 0.102 & 1.307 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1.105 \\ 1.188 \\ 2.310 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die Kondition $\kappa(A)$ bzgl. der Euklidischen Norm $||.||_2$.
Hinweis: Für symmetrische Matrizen A stimmt $\kappa(A)$ mit dem Quotienten aus dem Betrag des größten und dem Betrag des kleinsten Eigenwertes überein.

b) Sei $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Schätze den relativen Fehler $||\tilde{x} - x||_2/||x||_2$ ab.
Hinweis: Um $||\tilde{A} - A||_2$ abzuschätzen, verwende man, daß $||M||_2 \leq \sqrt{n}\,||M||_\infty$ für alle Matrizen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt.

c) Für große A ist die Berechnung von $||A^{-1}||_2$ im allgemeinen nicht mehr sinnvoll. Man kann jedoch versuchen, die Eigenwerte von A nach oben und unten abzuschätzen. Bei diagonaldominanten Matrizen benutzt man dazu den folgenden *Satz von Gerschgorin*:
Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine beliebige Matrix. Für $1 \leq i \leq n$ sei $\overline{K_i} \subset \mathbb{C}$ der abgeschlossene Kreis mit Mittelpunkt a_{ii} und Radius $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Dann liegen alle Eigenwerte von A in der Vereinigung der Kreise $\overline{K_i}$, $1 \leq i \leq n$.
Verwende diesen Satz, um die Eigenwerte der obigen Matrix A und damit ihre Kondition abzuschätzen.

Aufgabe 5 Givens-Rotation

a) Es seien x und y Vektoren im $\mathbb{R}^2$ mit $||x||_2 = ||y||_2 = 1$. Gib einen numerisch stabilen Algorithmus an, der eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ((Givens-Rotation) berechnet, die

$$Qx = y \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix} \text{c} & \text{s} \\ \text{-s} & \text{c} \end{pmatrix}$$

erfüllt.

b) Gib (orthogonale) Rotationsmatrizen $Q_{ik} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, für die gilt:

$$Q_{ik}e_i = e_k, \quad Q_{ik}e_j = e_j \quad \text{für} \quad j \neq i, k.$$

Dabei bezeichnet e_j den j-ten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$.

c) Gib mit Hilfe der Givens-Rotationen einen Algorithmus zur Berechnung der QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, an. Hierbei ist $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix.

d) Benutze den obigen Algorithmus um die Q-R–Zerlugungen der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 & -13 \\ 0 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

zu berechnen.