Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Wolfgang Dahmen   Karl-Heinz Brakhage

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

7. Übung zur Numerischen Mathematik I für Maschinenbauer, SS 99

Lineare Ausgleichsrechnung

Aufgabe 1

Normalgleichungen – Givens-Rotationen – Kondition

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem $||Ax-b||_2 = \min$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-3} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10^{-3} \\ 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

a) $\overline{x} = (1,1)^T$ ist eine „least-squares"-Lösung dieses Problems. Berechne das Residuum $\overline{r} =: ||A\overline{x} - b||_2$.

b) Berechne eine „least-squares"-Lösung des mit $\Delta b = (0,0,-2\cdot 10^{-3})^T$ gestörten Problems in 7-stelliger Gleitpunktarithmetik. Gehe dabei zu den Normalgleichungen $A^TA\tilde{x} = A^T\tilde{b}$ mit $\tilde{b} = b + \Delta b$ über.

c) Berechne die Kondition $\kappa_2(A^TA)$ und das Residuum $\tilde{r} =: ||A\tilde{x} - \tilde{b}||_2$ in Taschenrechnerarithmetik.

Aufgabe 2

Normalgleichungen – Givens-Rotationen

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte y_i

t_i	-1	1	2
y_i	1	3	3

Bestimme die Gerade $y(t) = at + b$ so, daß die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{3}(y(t_i) - y_i)^2$ minimal wird. Formuliere dazu das entsprechende Ausgleichsproblem $||Ax - f||_2 = \min$ und löse dieses.

a) Benutze zur Lösung die Normalgleichungen.

b) Gehe nicht zu den Normalgleichungen über und löse das Ausgleichsproblem mittels Givens-Rotationen.

Aufgabe 3

Normalgleichungen – Givens-Rotationen

Gegeben seien die Werte

t_i	-1	-0.5	0	0.5	1
y_i	e^{-1}	$e^{-0.5}$	1	$e^{0.5}$	e^{1}

Bestimme zu diesen Werten die im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate (Approximation im quadratischen Mittel) optimale Parabel.

a) Benutze zur Lösung die Normalgleichungen.

b) Gehe nicht zu den Normalgleichungen über und löse das Ausgleichsproblem mittels Givens-Rotationen.

Aufgabe 4

Eine Kurve der Darstellung $f(x) = A\,x + ln(B\,x)$ soll derart an drei Meßpunkte (x_i, y_i) angepaßt werden, daß die Summe der Fehlerquadrate minimal ist. Berechne A und B zu

x_i	1	3	4
y_i	1	2	2

Aufgabe 5

Eine Parabel $y(x) = x^2$ soll im Interval $[-1, 1]$ durch eine Kurve der Darstellung $f(x) = a\,cos(\pi\ x) + b\,sin(\pi\ x) + c)$ so approximiert werden, daß die Summe der Fehlerquadrate zu den fünf Stützstellen -1, -0.5, 0, 0.5 und 1 minimal ist. Berechne a, b und c.

Aufgabe 6

Es seien die Punkte $(u_1, v_1) = (1, \frac{\sqrt{7}}{2})$, $(u_2, v_2) = (0, \frac{\sqrt{15}}{4})$ und $(u_3, v_3) = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ gegeben. Von den Punkten weiß man, daß sie einer Ellipsengleichung der Form

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

genügen sollten. Bestimme die Parameter $a, b > 0$ optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

Aufgabe 7

Gegeben seien Meßwerte

x_i	-5	-3	0	8	13
y_i	-9	-2	-14	4	-1

,

die zu einem Kreis mit unbekanntem Mittelpunkt und Radius gehören.

a) Stelle das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem mittels der impliziten Kreisgleichung auf.

b) Linearisiere das Problem mit einer geeigneten Substitution und bestimme die zugehörige Lösung.