Testaufgabe 7: Nullstellen (skalar)
Bisektion

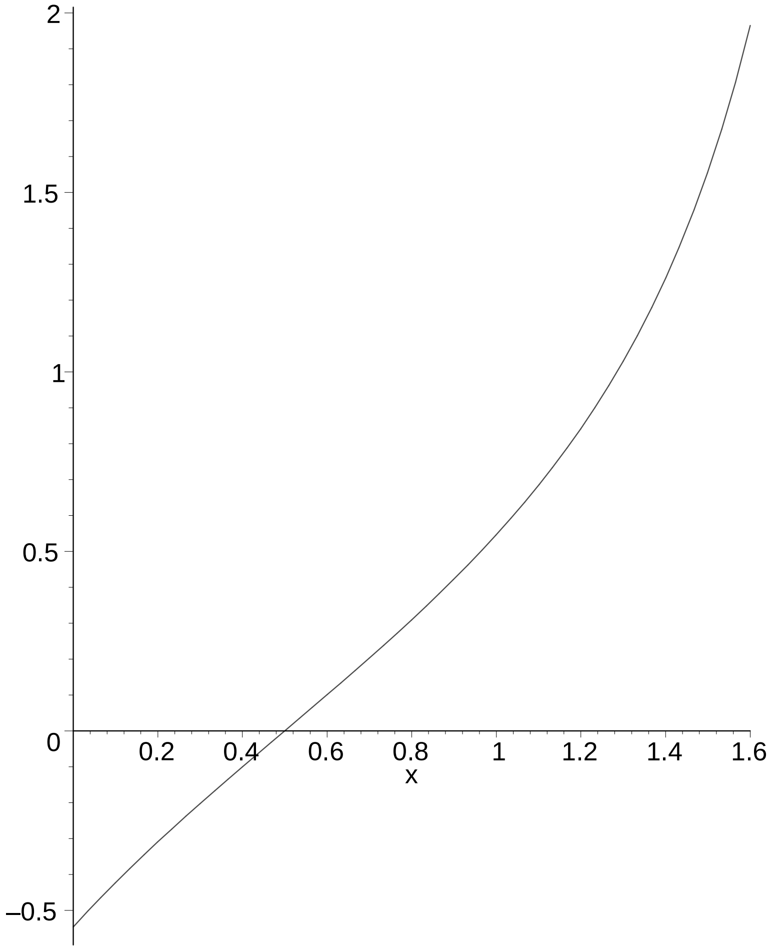
$$f := x \to \tan(x - 0.5)$$

(Natürlich hat diese Funktion eine Nullstelle bei $x = 0.5$.)

$$f' := x \to 1 + \tan(x - .5)^2$$

$f'(x) > 0$: also ist f auf $[0, 1.5]$ (dort ist f stetig) monoton steigend $\to$ höchstens eine Nulsttelle.
Skizze hilft, also: Wertetabelle!

x	0	.2	.4	.6	.8	1.0	1.2	1.4	1.6
f	-.546302	-.309336	-.100335	.100335	.309336	.546302	.842288	1.260158	1.96476



Wähle Startwerte $x_0 := 0$ und $x_1 := 1.5$ (oder $x_0 := 0.4$ und $x_1 := 0.6$) für Einschluß. Nun wird solange iteriert, bis $|x_{i-1} - x_i| \leq 0.01 = \varepsilon$ ist. Da der Abstand in jedem Schritt halbiert wird. läßt sich die Anzahl der Iterationen n vorher, nur mit Kenntnis von $x_0 - x_1$ und ε, bestimmen.

$$\tilde{n} = 1 + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \ln \frac{\varepsilon}{|x_1 - x_0|} = 8.2... \to n = 9$$

i	x_i	f_i	$x_{i-1} = x_{i-2}$?
0	0	$-.546302$	entfällt
1	1.5	1.557408	entfällt
2	.75	.255342	*ja*
3	.375	$-.125655$	*nein*
4	.5625	.062582	*nein*
5	.46875	$-.031260$	*nein*
6	.515625	.015626	*nein*
7	.492188	$-.007813$	*nein*
8	.503906	.003906	*nein*
9	.498047	$-.001953$	entfällt

Fixpunktverfahren

Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir $f(x) = 0$ in $x = F(x)$ umwandeln und ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ finden, das durch F in sich abgebildet wird, und auf dem F kontraktiv ist. Letzteres ist erfüllt, falls ein $alpha < 1$ existiert mit $|F'(x)| \leq \alpha$ für alle $x \in [a, b]$.

Der *Standardtrick* auf beiden Seiten x zu addieren ergibt:

$$F := x \to x + \tan(x - .5)$$

$$F' := x \to 2 + \tan(x - .5)^2$$

und somit $(F'(x) > 1)$ keine Kontraktivität. Es existiert aber maximal ein Fixpunkt, da $F'(x) > 1$ und stetig auf $[0, 1.5]$.

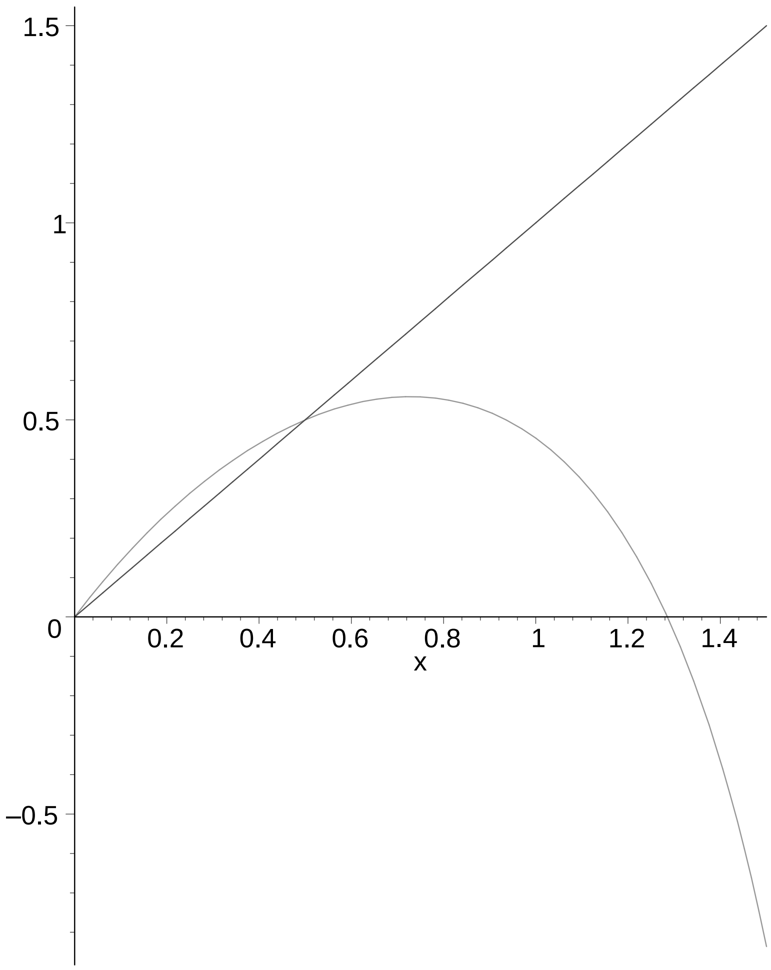
Eine weitere Möglichkeit ist, $f(x)$ mit Funktion $g(x)$ zu multiplizieren (hier $g(x) = x$). Dadurch entstehen zusätzliche Fixpunkte bei den Nullstellen von $g(x)$; hier nur $x = 0$.

$$F := x \to x - x\ \tan(x - .5)$$

$$F' := x \to 1 - \left(\tan(x - .5) + x\ (1 + \tan(x - .5)^2)\right)$$

Skizze (x und $F(x)$):

x	0	.2	.4	.6	.8	1.0	1.2	1.4	1.6
F	0	.261867	.440134	.539799	.552531	.453698	.189254	-.364222	-1.543615



Da wir bereits wissen, daß es maximal einen Fixpunkt auf $[0, 1.5]$ gibt und dieser wegen der letzten Wertetabelle offenbar zwischen 0.4 und 0.6 liegt, versuchen wir die Vorauusetzungen für das abgeschlossene Intervall $I = [0.4, 0.6]$ nachzuweisen.

Für $x \in I$ ist $g(x) := \tan(x - 0.5)$ streng monoton steigend, also

$$g(I) = [\tan(0.4 - 0.5), \tan(0.6 - 0.5)] = [-0.1003346721, 0.1003346721] \subset [-0.11, 0.11]$$

Für $h(x) := x\,(1+\tan(x-.5)^2)$ gilt

$$h(I) \subset [0.4\,(1+0), 0.6\,(1+\tan(0.6-0.5)^2] = [0.4, 0.7790678462] \subset [0.4, 0.78]$$

Insgesamt ist also

$$F'(I) \subset [1-(0.11+0.78), 1-(-0.11+0.4)] = [0.11, 0.71]$$

und somit F' positiv auf I, also F streng monoton steigend.

Abbildung in sich:
Es genügt die Randwerte zu untersuchen (s.o.): $x_0 = 0.4 \to x_1 = F(0.4) = .4401338688 \in [0.4, 0.6]$ und $F(0.6) = .5397991967 \in [0.4, 6]$.

kontraktiv:
$F'(I) \subset [0.11, 0.71]$, also ist F kontraktiv mit $\alpha := 0.71$.

Die a-priori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| \stackrel{!}{=} \varepsilon$$

führt auf

$$\tilde{n} = \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{|x_1-x_0|}}{\ln(\alpha)}$$

Mit $\varepsilon = 1e-2$ und $x_0 = 0.4$ (s.o.) ergibt diese Formel $\tilde{n} = 7.6...$ Also ist es hinreichend, 8 Iterationen auszuführen.

$$\begin{aligned}
x_2 &= .466515 \\
x_3 &= .482142 \\
x_4 &= .490753 \\
x_5 &= .495291 \\
x_6 &= .497623 \\
x_7 &= .498806 \\
x_8 &= .499402
\end{aligned}$$

Die a-posteriori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

ergibt dann

$$|x_8 - \overline{x}| \leq .146e-2$$

Newtonverfahren
Erklärungen, Skizze und Startwerte siehe auch Bisektion

$$f := x \to \tan(x-0.5) \to f' := x \to 1 + (\tan(x-0.5))^2$$

Startwert: $x_0 := 0$ (vgl. Bisektion). Iteration (15-stellig gerechnet):

$$\begin{array}{llll}
f_0 = -5.4630249e-01 & f_0' = 1.2984464e+00 & \Delta_x = -4.2073549e-01 & x_1 = 4.2073549e-01 \\
f_1 = -7.9430929e-02 & f_1' = 1.0063093e+00 & \Delta_x = -7.8932919e-02 & x_2 = 4.9966841e-01 \\
f_2 = -3.3158839e-04 & f_2' = 1.0000001e+00 & \Delta_x = -3.3158835e-04 & x_3 = 5.0000000e-01
\end{array}$$

Teste Einschluß (Newton-Verfahren konvergiert lokal monoton, d.h.: x_n lokal monoton); dazu wird f an den Stellen x_n und $x_n \pm \varepsilon$ ausgewertet:

$$f(x_3) = -.243e-10 \quad \text{und} \quad f(x_3 + 1e-2) = .1000e-1$$

Einschluß gegeben, also x_3 genügend genau.

Sekantenverfahren
Erklärungen, Skizze und Startwerte siehe auch Bisektion

$$f := x \to \tan(x-0.5)$$

Startwerte: $x_0 := 0$ und $x_1 := 1.5$ (vgl. Bisektion). Iteration (15-stellig gerechnet) mit $f(x_0) = -.5463024898$ und $f(x_1) = 1.557407725$ sowie dem Abbruchkriterium: $|\Delta_x| < \varepsilon$ und f_n und f_{n-1} bilden einen Einschluß, m ist die *Sekantensteigung*:

$$\begin{array}{llll}
m = 1.4024735e+00 & \Delta_x = 1.1104721e+00 & x_2 = 3.8952786e-01 & f_2 = -1.1092375e-01 \\
m = 1.5023623e+00 & \Delta_x = -7.3832890e-02 & x_3 = 4.6336075e-01 & f_3 = -3.6655655e-02 \\
m = 1.0058945e+00 & \Delta_x = -3.6440856e-02 & x_4 = 4.9980161e-01 & f_4 = -1.9839498e-04 \\
m = 1.0004502e+00 & \Delta_x = -1.9830571e-04 & x_5 = 4.9999991e-01 & f_5 = -8.9265923e-08 \\
m = 1.0000000e+00 & \Delta_x = -8.9265922e-08 & x_6 = 5.0000000e-01 & f_6 = -1.0000000e-15 \\
m = 1.0000000e+00 & \Delta_x = -1.0000000e-15 & x_7 = 5.0000000e-01 & f_7 = 0.0000000e-01
\end{array}$$

Hier wird (zu) lange iteriert, da sich der Einschluß nicht nach zwei Iterationen wieder einstellt.