Testaufgabe 8: Nullstellen von Systemen

$$f := (x,\, y) \to \begin{pmatrix} \sin x + e^y - 9\,y \\ e^{-y^2} - \cos x + 7\,x \end{pmatrix}$$

$$F := (x,\, y) \to \begin{pmatrix} \frac{1}{7}\cos x - \frac{1}{7}e^{-y^2} \\ \frac{1}{9}\sin x + \frac{1}{9}e^y \end{pmatrix}$$

$$F' := (x,\, y) \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{7}\sin x - -\frac{2}{7}y\,e^{-y^2} \\ \frac{1}{9}\cos x + \frac{1}{9}e^y \end{pmatrix}$$

Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, wollen wir nun ein konvexes Gebiet $D = [a,b] \times [c,d]$ finden, das durch F in sich abgebildet wird, und auf dem F kontraktiv ist. Letzteres ist wegen der Konvexität von D erfüllt, falls ein $alpha < 1$ sowie eine Norm existieren mit $\|F'(x,x)\| \leq \alpha$ für alle $(x,y) \in D$.

Hier ist das Gebiet vorgegeben: $D = [-1,1] \times [-1,1]$

Abbildung in sich: (grobe Abschätzung)
Für $x \in [-1,1]$ gilt:

$$0 < \cos 1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 < \sin(-1) \leq \sin x \leq \sin 1 < 1$$

sowie für $y \in [-1,1]$:

$$0 < e^{-y^2} \leq 1$$

$$0 < e^y \leq e^1 < 3$$

Folglich gilt $F_1(D) \subset [-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}]$ und $F_2(D) \subset [-\frac{1}{9}, \frac{4}{9}]$ Insgesamt wird also D durch F in sich abgebildet.

kontraktiv:(erneut grobe Abschätzung)
$|.|$ heißt, das wir von jeder Komponente den Betrag nehmen, $<.$ heißt, daß wir komponentenweise vergleichen; auf D gilt dann:

$$|F'(x,y)|. < . \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix} =: J_{max}$$

und somit

$$\|J_{max}\|_1 = \frac{13}{21} \quad \text{und} \quad \|J_{max}\|_\infty = \frac{4}{9}$$

Wir wählen die ∞-Norm und setzen: $\alpha := 0.45$, haben $\varepsilon = 0.005$ vorgegeben. Startwert $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)$, voraus

$$\boldsymbol{x}_1 = F(\boldsymbol{x}_0) = (0, \frac{1}{9})$$

folgt. Die a-priori Abschätzung ergibt mit

$$\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_\infty = \left\|(0, \frac{-1}{9})\right\|_\infty = \frac{1}{9}$$

$$\|\boldsymbol{x}_n - \overline{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_\infty \stackrel{!}{=} \varepsilon \to \tilde{n} = \frac{\ln(\varepsilon * (1-\alpha)/\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_\infty)}{\ln(\alpha)} = 4.6...$$

und somit reichen 5 Iterationen aus, um die geforderte Genauigkeit zu erzielen. Die zweite Iteration ergibt: $\boldsymbol{x}_2 = (.0017528262520556366, .12416878541576262762)$. Dies führt zur a-posteriori Fehlerabschätzung:

$$\|\boldsymbol{x}_2 - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|_\infty = \frac{0.45}{1-0.45} * .01305767430465151651 = .01068355170380578623 5$$

Jetzt zwei Schritte mit dem Newton-Verfahren:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x & e^y - 9 \\ \sin x + 7 & -2\,y\,e^{-y^2} \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} .01644071151 \\ -.00302832017 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} .9999984638 & -7.86779304511 \\ -7.00175282535 & .24453809537 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} .9999984638 & -7.86779304511 & | & .01644071151 \\ 7.00175282535 & -.24453809537 & | & -.00302832017 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 7.00175282535 & -.24453809537 & | & -.00302832017 \\ 0 & -7.83286783055 & | & .01687321971 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -.00050774334 \\ -.00215415606 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - \Delta \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} .00226056960 \\ .12632294148 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} 2.62857950936e-06 \\ -4.29716065252e-06 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} .99999744491 & -7.8653514658 \\ 7.00226056767 & -.24864628655 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} .99999744491 & -7.8653514658 & | & 2.62857950936e-06 \\ 7.00226056767 & -.24864628655 & | & -4.29716065252e-06 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 7.00226056767 & -.24864628655 & | & -4.29716065252e-06 \\ 0 & -7.82984212581 & | & 3.24225985322e-06 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -6.28386014423e-07 \\ -4.14090067350e-07 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 - \Delta \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} .00226119798 \\ .12632335557 \end{pmatrix}$$

Der genaue Wert (20 stellige Rechnung) ist $\boldsymbol{x}_2 = (.00226119798170093037807, .12632335556628465951)$ voraus (ein weiterer Fixpunkt-Schritt) $\boldsymbol{x}_3 = F(\boldsymbol{x}_2) = (.00226119798170443753, .12632335556629541874)$ folgt. Und die a-posteriori Abschätzung ergibt:

$$\|\boldsymbol{x}_3 - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\|_\infty = \frac{0.45}{1-0.45} * .1075923e-13 = .8803e-14$$

Das vereinfachte Newton-Verfahren ergäbe:

$$A = \begin{pmatrix} .9999984638 & -7.86779304511 \\ 7.00175282535 & -.24453809537 \end{pmatrix} \to$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7.00176358146 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} .9999984638 & -7.86779304511 \\ 0 & 54.84388871432 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} .01644071151 \\ -.00302832017 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} .01644071151 \\ -.11814229525 \end{pmatrix} \to$$

$$\Delta \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -.00050774334 \\ -.00215415606 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - \Delta \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} .00226056960 \\ .12632294148 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} 2.62857950936e-06 \\ -4.29716065252e-06 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 2.62857950936e-06 \\ -2.27018529322e-05 \end{pmatrix} \to$$

$$\Delta \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -6.28183235273e-07 \\ -4.13935872608e-07 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} .00226119778 \\ .12632335541 \end{pmatrix}$$

Der genaue Wert (20 stellige Rechnung) ist $\boldsymbol{x}_2 = (.00226119777893015434190, .12632335541208991724)$ voraus (ein weiterer Fixpunkt-Schritt) $\boldsymbol{x}_3 = F(\boldsymbol{x}_2) = (.00226119797629278777, .12632335552432480299)$ folgt. Und die a-posteriori Abschätzung ergibt:

$$\|\boldsymbol{x}_3 - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\|_\infty = \frac{0.45}{1-0.45} * .1122e-9 = .9183e-10$$