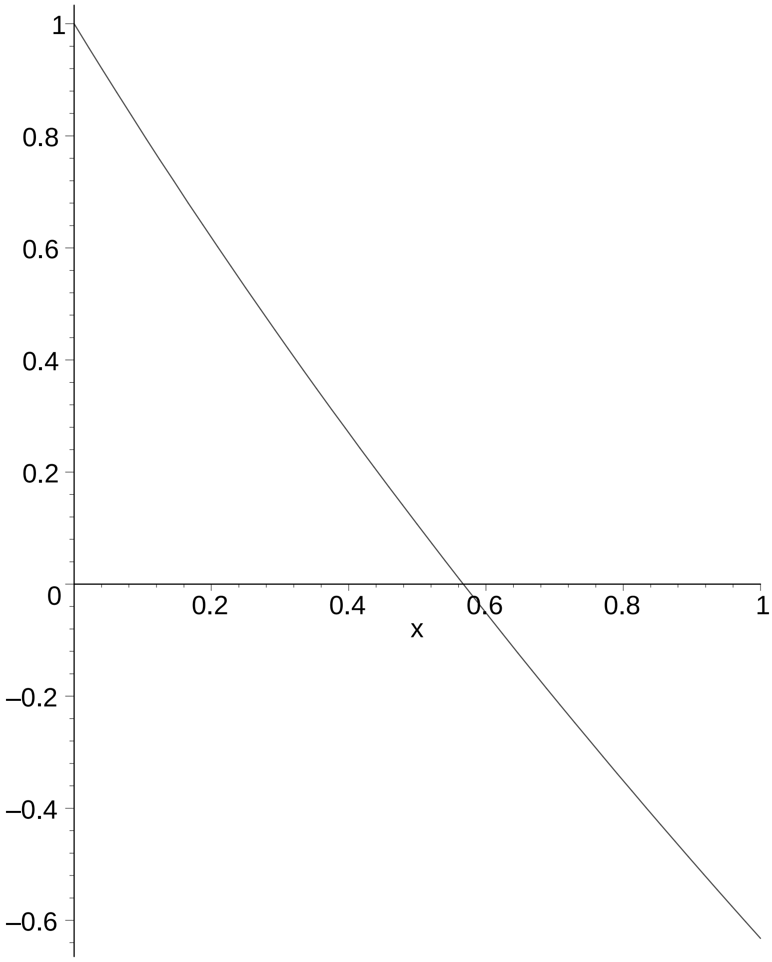
Uebung 8 Aufgabe 2: Nullstellen: Bisektion

$$f(x) = e^{(-x)} - x$$

$$f'(x) = -e^{(-x)} - 1$$

$f'(x) < 0$: also ist f auf ganz R streng monoton fallend $\rightarrow$ höchstens eine Nulsttelle.
Skizze hilft, also: Wertetabelle!

x	0	0.25	0.5	0.75	1
f	1	0.5288	0.1065	-0.2776	-0.6321



Wähle Startwerte $x_0 := 0$ und $x_1 := 1$ (oder 0.5 und 0.75) für Einschluß. Nun wird solange iteriert, bis $|x_{i-1} - x_i| \leq 1e^{-3} = \varepsilon$ ist. Da der Abstand in jedem Schritt halbiert wird. läßt sich die Anzahl der Iterationen n vorher, nur mit Kenntnis von $x_0 - x_1$ und ε, bestimmen.

$$\tilde{n} = 1 + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \ln \frac{\varepsilon}{|x_1 - x_0|} = 10.9... \rightarrow n = 11$$

i	x_i	f_i	$x_{i-1} = x_{i-2}$?
0	0	1	entfällt
1	1	-0.6321	entfällt
2	.5	.1065306597	*nein*
3	.75	$-.2776334473$	*nein*
4	.625	$-.0897385715$	*ja*
5	.5625	.0072828247	*nein*
6	.59375	$-.0414975498$	*nein*
7	.578125	$-.0171758392$	*ja*
8	.5703125	$-.0049637604$	*ja*
9	.56640625	.0011552020	*nein*
10	.568359375	$-.0019053596$	*nein*
11	.5673828125	$(-.0003753492)$	entfällt

$$f(x) = e^{(-x^2)} + .2 - x$$

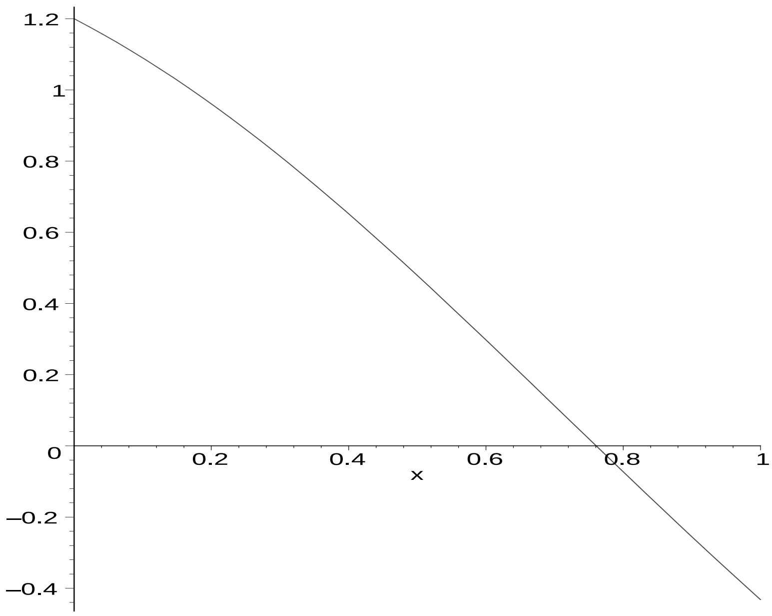
$$f'(x) = -2\,x\,e^{(-x^2)} - 1$$

$$f''(x) = -2\,e^{(-x^2)} + 4\,x^2\,e^{(-x^2)}$$

Extrema von f': $f''(x) = 0$ falls $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $f'(\pm\infty) = -1$ (darf man streng gesehen nicht so schreiben), $f'(-\sqrt{0.5}) = -1.858$, $f'(\sqrt{0.5}) = -.1422$; somit ist f' stets kleiner 0, also f streng monoton fallend und hat höchstens eine Nullstelle.

Wertetabelle und Skizze:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
f	1.2	.8894	.4788	.01978	$-.4321$



Wähle Startwerte $x_0 := 0$ und $x_1 := 1$ (oder 0.75 und 1) für Einschluß. Nun wird solange iteriert, bis $|x_{i-1} - x_i| \leq 1e^{-3} = \varepsilon$ ist. Da der Abstand in jedem Schritt halbiert wird. läßt sich die Anzahl der Iterationen n vorher, nur mit Kenntnis von $x_0 - x_1$ und ε, bestimmen.

$$\tilde{n} = 1 + \frac{1}{\ln\frac{1}{2}} \ln\frac{\varepsilon}{|x_1 - x_0|} = 10.9... \rightarrow n = 11$$

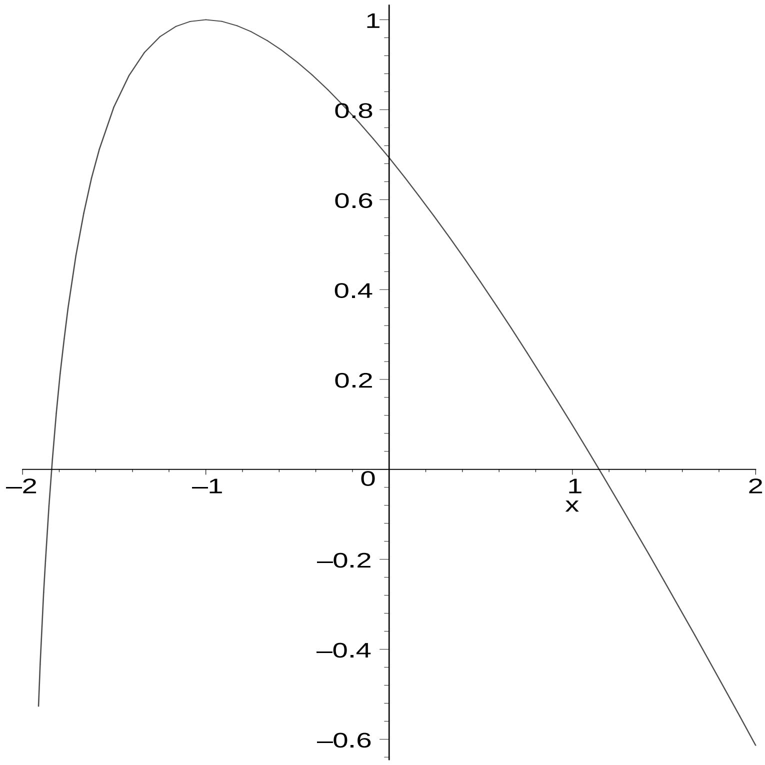
i	x_i	f_i	$x_{i-1} = x_{i-2}$?
0	0	1.2	entfällt
1	1	-0.4321	entfällt
2	.5	.4788007831	*nein*
3	.75	.0197828247	*ja*
4	.875	$-.2099568119$	*nein*
5	.8125	$-.0957294172$	*ja*
6	.78125	$-.0380901191$	*ja*
7	.765625	$-.0091770483$	*ja*
8	.7578125	.0052977832	*nein*
9	.76171875	$-.0019410028$	*nein*
10	.759765625	.0016780593	*nein*
11	.7607421875	$(-.0001315559)$	entfällt

$$f(x) = \ln(x+2) - x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

$f'' < 0$ also: f konkav und somit höchstens 2 Nullstellen.
Wertetabelle $\rightarrow$ Skizze und Startwerte:



$x_0 = -1.9$ und $x_1 := -1.5$ bzw. $x_0 = 1$ und $x_1 := 1.5$
Die ersten Startwerte:

$$\tilde{n} = 1 + \frac{1}{\ln\frac{1}{2}} \ln \frac{\varepsilon}{|x_1 - x_0|} = 9.6... \rightarrow n = 10$$

Die Iteration ergibt: ... $x_5 = -1.825$ ... $x_{10} = -1.84140625$.

Die zweiten Startwerte:

$$\tilde{n} = 1 + \frac{1}{\ln\frac{1}{2}} \ln \frac{\varepsilon}{|x_1 - x_0|} = 9.9... \rightarrow n = 10$$

Die Iteration ergibt: ... $x_5 = 1.15625$ ... $x_{10} = 1.145507813$.