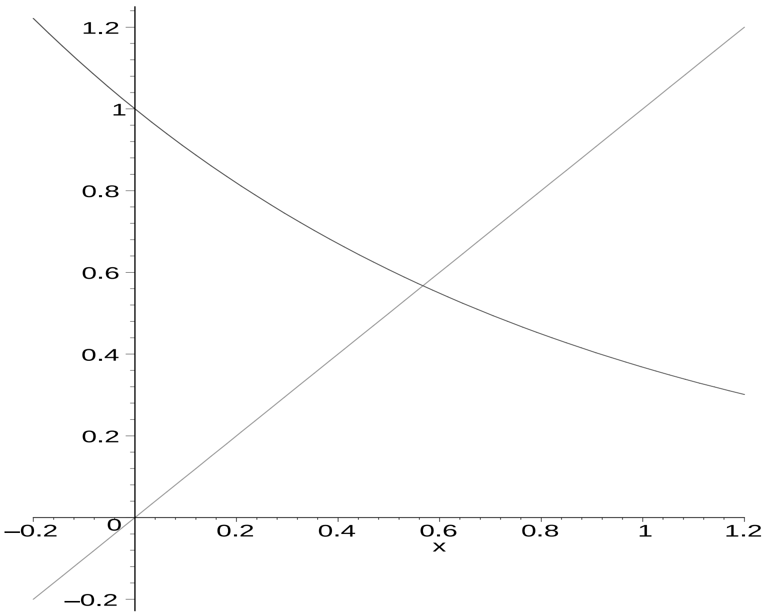
Uebung 8 Aufgabe 2: Nullstellen: Banach - Fixpunktverfahren

$$f(x) = e^{(-x)} - x$$

Versuch mit

$$F(x) = e^{(-x)} \to F'(x) = -e^{(-x)} \quad \text{und} \quad F''(x) = e^{(-x)}$$

Skizze ($F(x)$ und x):



Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir nun ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ finden, das durch F in sich abgebildet wird, und auf dem F kontraktiv ist. Letzteres ist erfüllt, falls ein $alpha < 1$ existiert mit $|F'(x)| \leq \alpha$ für alle $x \in [a, b]$.

Wir wählen das **abgeschlossen**e Intervall $[0, 1]$:

Abbildung in sich:
Da $F'(x) < 0$ ist F streng monoton fallend, d.h. es genügt die Randwerte zu untersuchen: $F(0) = 1 \in [0, 1]$ und $F(1) = 0.3678794412 \in [0, 1]$.

Weiterhin folgt aus F streng monoton fallend und $y(x) = x$ streng monoton steigend, daß es nur einen Fixpunkt geben kann.

kontraktiv:
Da $F''(x) > 0$ ist F' streng monoton steigend (und < 0), d.h. es genügt die Randwerte (den linken Randwert) zu untersuchen: $F'(0) = -1$; somit darf 0 nicht zum Intervall gehören.

Wir wissen, daß $[0, 1]$ in das **abgeschlossene** Intervall $[0.3678794412, 1]$ abgebildet wird. Daher wird auch $[0.3678794412, 1]$ in (eine Teilmenge von) $[0.3678794412, 1]$ abgebildet. Wir hätten bei der Untersuchung der Kontraktivität also gleich dieses Intervall nehmen können.

Wir gehen etwas anders vor und wählen hier das **abgeschlossene** Intervall $[0.35, 1]$.

Abbildung in sich:
Es genügt die Randwerte zu untersuchen (s.o.): $F(0.35) = .7046880897 \in [0.35, 1]$ und $F(1) = 0.3678794412 \in [0.35, 1]$.

kontraktiv:
Es genügt die Randwerte zu untersuchen (s.o.): $F'(0.35) = -.7046880897$ ($F'(1) = -.3678794412$); also können wir $\alpha = 0.705$ wählen.

Die a-priori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| \stackrel{!}{=} \varepsilon$$

führt auf

$$\tilde{n} = \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}}{\ln(\alpha)}$$

Mit $\varepsilon = 1e-3$ und $x_0 = 0.35 \rightarrow x_1 = F(x_0) = 0.7046880897$ ergibt diese Formel $\tilde{n} = 20.28856251$. Also ist es hinreichend, 21 Iterationen auszuführen.

$x_2 = .4942627158, ..., x_{10} = .5663453536, ..., x_{20} = .5671405424, x_{21} = .5671448489$.

Die a-posteriori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

ergibt dann

$$|x_{21} - \overline{x}| \leq 0.1029180508e-4$$

Die a-priori Abschätzung war also zu pessimistisch, was hier unter Anderem daran liegt, daß für die letzten Iteration die Kontraktion besser ist (0.567... statt 0.705).

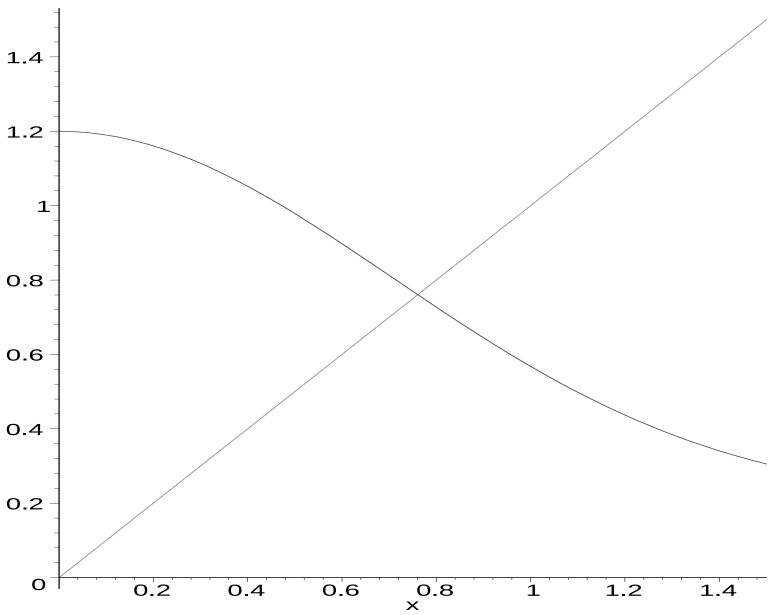
Betrachte nun

$$f(x) = e^{(-x^2)} + .2 - x$$

und versuche

$$F(x) = e^{(-x^2)} + .2 \rightarrow F'(x) = -2\,x\,e^{(-x^2)} \quad \text{und} \quad F''(x) = -2\,e^{(-x^2)} + 4\,x^2\,e^{(-x^2)}$$

Skizze ($F(x)$ und x):



Da $F(x) > 0$ gilt, können nur Fixpunkte mit $\overline{x} > 0$ existieren.

Aufgrund der Skizze wählen wir das **abgeschlossen**e Intervall $[0.5, 1]$:

Abbildung in sich:
Da $F'(x) < 0$ ist auf $(0, \infty]$, ist F dort streng monoton fallend, d.h. es genügt die Randwerte zu untersuchen: $F(0.5) = 0.9788007831 \in [0.5, 1]$ und $F(1) = 0.5678794412 \in [0.5, 1]$.

Weiterhin folgt aus F streng monoton fallend und $y(x) = x$ streng monoton steigend, daß es nur einen Fixpunkt geben kann.

kontraktiv:
$F''(x) = 0$ für $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (auf $[0.5, 1]$), also untersuche Randwerte plus $\sqrt{0.5}$ für Kontraktivität: $F'(0.5) = -.7788007832$, $F'(\sqrt{0.5}) = -.8577638850$ und $F'(1) = -.7357588824$; somit wählen wir $\alpha = 0.86$.
2mm] Mit $\varepsilon = 1e-3$ und $x_0 = 0.5 \rightarrow x_1 = F(x_0) = 0.9788007831$ folgt aus der a-priori Abschätzung $\tilde{n} = 53.9...$. Also ist es hinreichend, 54 Iterationen auszuführen.

$x_2 = .5836398823, ..., x_{10} = .7138203649, ..., x_{53} = .7607212944, x_{54} = .7606284525$.

Die a-posteriori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

ergibt dann

$$|x_{54} - \overline{x}| \leq .5703145286e - 3$$

Die a-priori Abschätzung war also diesmal nicht so pessimistisch. was hier unter Anderem daran liegt, daß die Kontraktivität in Fixpunktnähe hier nicht besser wird.

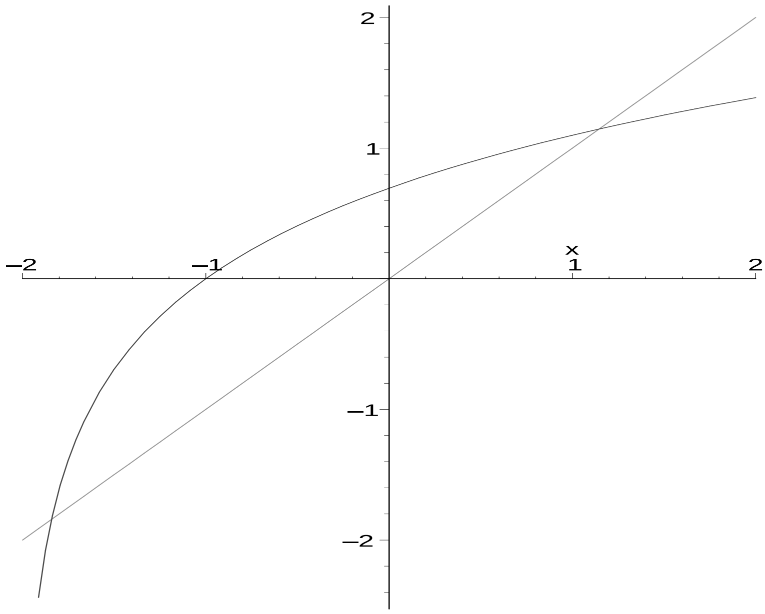
Betrachte nun

$$f(x) = \ln(x+2) - x$$

und versuche

$$F(x) = \ln(x+2) \rightarrow F'(x) = \frac{1}{x+2} \quad \text{und} \quad F''(x) = x \rightarrow -\frac{1}{(x+2)^2}$$

Skizze ($F(x)$ und x):



Offensichtlich (Steigung) ist mit obigem F nur der größere der beiden Fixpunkte zu bekommen. (Daß es nur zwei Fixpunkte geben kann liegt daran, daß F konkav ist ($F''(x) < 0$).)

Aufgrund der Skizze wählen wir zunächst das **abgeschlossen**e Intervall $[1, 1.5]$:

Abbildung in sich:
Da $F'(x) > 0$ ist auf $[1, 1.5]$, ist F dort streng monoton steigend, d.h. es genügt die Randwerte zu untersuchen: $F(1) = 1.098612289 \in [1, 1.5]$ und $F(1.5) = 1.252762968 \in [1, 1.5]$.

kontraktiv:
Da $F''(x) < 0$ ist auf $[1, 1.5]$, ist F' dort streng monoton fallend, d.h. es genügt die Randwerte zu untersuchen: $F'(1) = \frac{1}{3} = 0.33333...$ und $F'(1.5) = .2857142857$, also etwa $\alpha := 0.34$.

Die a-priori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| \stackrel{!}{=} \varepsilon$$

führt auf

$$\tilde{n} = \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}}{\ln(\alpha)}$$

Mit $\varepsilon = 1e-3$ und $x_0 = 1 \to x_1 = F(x_0) = 1.098612289$ ergibt diese Formel $\tilde{n} = 4.6....$ Also ist es hinreichend, 5 Iterationen auszuführen.

$$\begin{array}{lcl} x_2 & = & 1.130954 \\ x_3 & = & 1.141338 \\ x_4 & = & 1.144649 \\ x_5 & = & 1.145702 \end{array}$$

Die a-posteriori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

ergibt dann

$$|x_5 - \overline{x}| \leq .5426750304e-3$$

Betrachte nun auf $I = [-2, -1.5]$ die Umkehrabbildung zu

$$F(x) = \ln(x+2)$$

und versuche somit

$$F(x) = e^x - 2 \to F'(x) = e^x \quad \text{und} \quad F''(x) = e^x$$

Somit sind F und F' streng monoton steigend, es reicht also eine Randwertuntersuchung auf dem **abgeschlossenen** Intervall I:

Abbildung in sich:

$F(-2) = -1.865 \in [-2, -1.5]$ und $F(-1.5) = -1.777 \in [-2, -1.5]$.

kontraktiv:

$F'(-2) = 0.1353$ und $F'(-1.5) = .2231$, also etwa $\alpha := 0.23$.

Die a-priori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| \stackrel{!}{=} \varepsilon$$

führt auf

$$\tilde{n} = \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}}{\ln(\alpha)}$$

Mit $\varepsilon = 1e-3$ und $x_0 = -2 \to x_1 = F(x_0) = -1.865$ ergibt diese Formel $\tilde{n} = 3.5....$ Also ist es hinreichend, 4 Iterationen auszuführen.

$$\begin{array}{lcl} x_2 & = & -1.845052 \\ x_3 & = & -1.841983 \\ x_4 & = & -1.841497 \end{array}$$

Die a-posteriori Abschätzung

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

ergibt dann

$$|x_4 - \overline{x}| \leq .1450777273e-3$$