Uebung 8 Aufgabe 2: Nullstellen: Newton

Erklärungen, Plots und Startwerte siehe auch Bisektion

$$f := x \to e^{(-x)} - x \to f' := x \to -e^{(-x)} - 1$$

Startwert: $x_0 := 0$ (vgl. Bisektion). Iteration (15-stellig gerechnet):

$$\begin{array}{llll} f_0 = 1.000000e+00 & f_0' = -2.000000e+00 & \Delta_x = -5.000000e-01 & x_1 = 5.000000e-01 \\ f_1 = 1.065307e-01 & f_1' = -1.606531e+00 & \Delta_x = -6.631100e-02 & x_2 = 5.663110e-01 \\ f_2 = 1.304510e-03 & f_2' = -1.567616e+00 & \Delta_x = -8.321618e-04 & x_3 = 5.671432e-01 \end{array}$$

Teste Einschluß (Newton-Verfahren konvergiert lokal monoton, d.h.: x_n lokal monoton); dazu wird f an den Stellen x_n und $x_n \pm \varepsilon$ ausgewertet:

$$f(x_3) = .196480472e-6 \quad \text{und} \quad f(x_3 + 1e-3) = -.001566663403863$$

Einschluß gegeben, also x_3 genügend genau.

neue Funktion

$$f := x \to e^{(-x^2)} + .2 - x \to f' := x \to -2\,x\,e^{(-x^2)} - 1$$

Startwert $x_0 := 0$ (vgl. Bisektion). Iteration (15-stellig gerechnet):

$$\begin{array}{llll} f_0 = 1.200000e+00 & f_0' = -1.000000e+00 & \Delta_x = -1.200000e+00 & x_1 = 1.200000e+00 \\ f_1 = -7.630722e-01 & f_1' = -1.568627e+00 & \Delta_x = 4.864588e-01 & x_2 = 7.135412e-01 \\ f_2 = 8.747042e-02 & f_2' = -1.857693e+00 & \Delta_x = -4.708551e-02 & x_3 = 7.606267e-01 \\ f_3 = 8.244668e-05 & f_3' = -1.852981e+00 & \Delta_x = -4.449409e-05 & x_4 = 7.606712e-01 \end{array}$$

Teste Einschluß:

$$f(x_4) = 0.174441e-9 \quad \text{und} \quad f(x_4 + 1e-3) = -0.001852883983855$$

Einschluß gegeben, also x_4 genügend genau.

neue Funktion

$$f := x \to \ln(x+2) - x \to f' := x \to \frac{1}{x+2} - 1$$

Startwert $x_0 := -1.9$ (vgl. Bisektion). Iteration (15-stellig gerechnet):

$$\begin{array}{llll} f_0 = -4.025851e-01 & f_0' = 9.000000e+00 & \Delta_x = -4.473168e-02 & x_1 = -1.855268e+00 \\ f_1 = -7.760543e-02 & f_1' = 5.909337e+00 & \Delta_x = -1.313268e-02 & x_2 = -1.842136e+00 \\ f_2 = -3.883478e-03 & f_2' = 5.334552e+00 & \Delta_x = -7.279857e-04 & x_3 = -1.841408e+00 \end{array}$$

Teste Einschluß:

$$f(x_3) = -.00001060022209 \quad \text{und} \quad f(x_3 + 1e-3) = .00527507816198$$

Einschluß gegeben, also x_3 genügend genau.

Neuer Startwert $x_0 := 1$ (vgl. Bisektion). Iteration (20-stellig gerechnet):

$$\begin{array}{llll} f_0 = 1.000000e+00 & f_0' = -2.000000e+00 & \Delta_x = -5.000000e-01 & x_1 = 5.000000e-01 \\ f_1 = 1.065307e-01 & f_1' = -1.606531e+00 & \Delta_x = -6.631100e-02 & x_2 = 5.663110e-01 \\ f_2 = 1.304510e-03 & f_2' = -1.567616e+00 & \Delta_x = -8.321618e-04 & x_3 = 5.671432e-01 \end{array}$$

Teste Einschluß:

$$f(x_3) = -.24487e-14 \quad \text{und} \quad f(x_3 - 1e-3) = .0006821050438504441$$

Einschluß gegeben, also x_3 genügend genau.