Übung 8 Aufgabe 3: Nullstellen von Systemen: Fixpunkt

$$F := (x,\, y) \to \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sin(x) + \frac{1}{6}\ln(y+1) \\ \frac{1}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\tan(y) \end{pmatrix}$$

$$F' = (x,\, y) \to \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos(x) & \frac{1}{6}\frac{1}{y+1} \\ -\frac{1}{5}\sin(x) & \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\tan(y)^2 \end{pmatrix}$$

Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, wollen wir nun ein konvexes Gebiet $D = [a,b] \times [c,d]$ finden, das durch F in sich abgebildet wird, und auf dem F kontraktiv ist. Letzteres ist wegen der Konvexität von D erfüllt, falls ein $alpha < 1$ sowie eine Norm existieren mit $\|F'(x,x)\| \leq \alpha$ für alle $(x,y) \in D$.

Hier ist das Gebiet vorgegeben: $D = [-1,1] \times [0,1]$

Abbildung in sich:
Da sin und ln sind in D monoton steigend sind gilt:

$$F_1(D) \subset \left[\frac{1}{6}\sin(-1) + \frac{1}{6}\cdot 0, \frac{1}{6}\sin(1) + \frac{1}{6}\ln(2)\right] = [-.1402451641, .2557696942]$$

cos ist sym. zu 0 (und $\cos(-1) = cos(1)$) sowie tan monoton steigend in D, also:

$$F_2(D) \subset \left[\frac{1}{5}\cos(1) + \frac{1}{5}\cdot 0, \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{5}\tan(1)\right] = [.1080604612, .5114815450]$$

Insgesamt wird also D durch F in $D' = [-.1402451641, .2557696942] \times [.1080604612, .5114815450]$ abgebildet.
kontraktiv:
$|.|$ heißt, das wir von jeder Komponente den Betrag nehmen, $<.$ heißt, daß wir komponentenweise vergleichen; auf D gilt dann:

$$|F'(x,y)| .<. \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\cdot 1 \\ \frac{1}{5}\sin(1) & \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\tan(1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ .1682941970 & .6851037644 \end{pmatrix} =: J_{max}$$

und somit

$$\|J_{max}\|_1 = .8517704311 \quad \text{und} \quad \|J_{max}\|_\infty = .8533979614$$

was kaum einen Unterschied ausmacht, also: Wähle ∞-Norm, da dann bei Vektoren nur eine Komponente zählt. Wir setzen: $\alpha := 0.86$, haben $\varepsilon = 0.01$ vorgegeben und wählen als Startwert $\boldsymbol{x}_0 = (0.5, 0.5)$, voraus

$$\boldsymbol{x}_1 = F(\boldsymbol{x}_0) = (.1474817745, .2847770104)$$

folgt. Die a-priori Abschätzung ergibt (vgl. Aufgabe 2) mit

$$\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_\infty = \|(.3525182255, .2152229896)\|_\infty = .3525182255$$

$$\|\boldsymbol{x}_n - \overline{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_\infty \stackrel{!}{=} \varepsilon \to \tilde{n} = \frac{\ln(\varepsilon * (1-\alpha)/\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_\infty)}{\ln(\alpha)} = 36.6...$$

und somit reichen 37 Iterationen aus, um die geforderte Genauigkeit zu erzielen. Einige weitere Iterierte sind $\boldsymbol{x}_2 = (.06625548048, .2563755501)$, $\boldsymbol{x}_{10} = (.04480209247, .2511026751)$, $\boldsymbol{x}_{17} = (.04480206337, .2511026755)$, $\boldsymbol{x}_{36} = (.04480206337, .2511026755)$, $\boldsymbol{x}_{35} = (.04480206337, .2511026755)$.
Offensichtlich sind einige Iterationen zuviel gemacht. Voran liegt das? Wenn D durch F auf die Teilmenge D' abgebildet wird, so wird auch D' auf D' abgebildet. Man hätte also die Untersuchungen auch etwa auf $\tilde{D} = [-0.141, 0.256] \times [0.108, 0.512]$ durchführen können (Abbildung in sich schon erledigt.) Damit hätten wir (für) $\tilde{D}$

$$\|J_{max}\|_1 = .4135871523 \quad \text{und} \quad \|J_{max}\|_\infty = .3170878460$$

und somit etwa $\alpha = .32$ erhalten. Mit dem Startwert $\boldsymbol{x}_0 = (0.1, 0.3)$ (ungefähr die Mitte von $\tilde{D}$) wären wir dann mit $\boldsymbol{x}_1 = (.06036628020, .2608680830)$ auf die Notwendigkeit von 2 (1.5..) Iterationen gekommen. $\boldsymbol{x}_2 = (.04868834368, .2530259562)$ führt zur a-posteriori Fehlerabschätzung:

$$\|\boldsymbol{x}_2 - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|_\infty = \frac{0.32}{1-0.32} * 0.01167793652 = 0.005495499539$$

neue Funktion

$$F := (x_1,\, x_2,\, x_3) \to 0.1 \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + 3 \end{pmatrix}$$

auf $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,2]$. Genauigkeit: $\varepsilon = 0.5e-6$.

$$F' = (x_1,\, x_2,\, x_3) \to 0.1 * \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 & 2 \cdot x_2 & 2 \cdot x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_2 \cdot x_3 & x_1 \cdot x_3 & x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Abbildung in sich:
Offensichtlich wird D durch F wegen der Monotonie der Monome auf $D' = [0, 0.6] \times [0, 0.4] \times [0.3, 0.5]$ abgebildet, was eine Teilmenge von D ist.

kontraktiv:
Auf dem konvexen, abgeschlossenen D' gilt:

$$|F'(x_1,\, x_2,\, x_3)|. \quad < . \quad 0.1 \begin{pmatrix} 1.2 & 0.8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.24 \end{pmatrix} =: J_{max}$$

Wir setzen $\alpha := \|J_{max}\|_1 = 0.24$ und wählen $\boldsymbol{x}_0 = (0, 0, 0.3) \to \boldsymbol{x}_1 = F(\boldsymbol{x}_0) = (.009, .03, .3)$.
Die a-priori Abschätzung ergibt mit

$$\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_1 = \|(-.009, -0.03, 0)\|_1 = .039$$

$$\tilde{n} = \frac{\ln(\varepsilon * (1-\alpha)/\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_1)}{\ln(\alpha)} = 8.08...$$

somit reichen 9 Iterationen. Einige weitere Iterierte sind:
$\boldsymbol{x}_2 = (.0090981, .0339, .3000081)$, $\boldsymbol{x}_7 = (.009126875658, .03434846941, .3000094051)$,
$\boldsymbol{x}_8 = (.009126876036, .03434847502, .3000094051)$ und $\boldsymbol{x}_9 = (.009126876075, .03434847562, .3000094051)$.
A-posteriori Fehlerabschätzung:

$$\|\boldsymbol{x}_9 - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\|\boldsymbol{x}_9 - \boldsymbol{x}_8\|_\infty = \frac{0.24}{1-0.24} * .639e-9 = .20179e-9$$