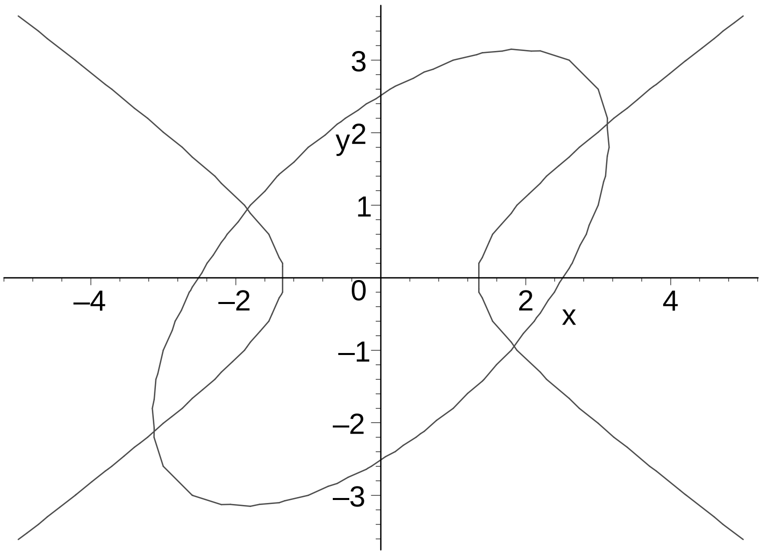
Übung 8 Aufgabe 3: Nullstellen von Systemen: Newton-Verfahren

$$f := (x,\, y) \to \begin{pmatrix} 5\,x^2 - 6\,x\,y + 5\,y^2 - 32 \\ 9\,x^2 - 16\,y^2 - 16 \end{pmatrix}$$

$f_1(x,y) = 0$ ist eine Ellipsengleichung (Mittelpunkt im Ursprung, Drehung um 45°, sowie den Hauptachsen 2 und 4); $f_2(x,y) = 0$ ist die Gleichung einer Hyperbel. Skizze der Nullstellengebilde:



Wegen der Symmetrie zum Ursprung ist mit $\overline{\boldsymbol{x}}$ auch $-\overline{\boldsymbol{x}}$ Nullstelle von f. Geeignete Startwerte zur Bestimmung der vier Nullstellen sind somit $\boldsymbol{x}_{01} = (3,2)$ und $\boldsymbol{x}_{02} = (2,-1)$. Für die Ableitung von f erhalten wir

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 10x - 6y & -6x + 10y \\ 18x & -32y \end{pmatrix}.$$

Wir iterieren zunächst mit $\boldsymbol{x}_{02} = (2,-1) =: \boldsymbol{x}_0$.

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 26 & -22 \\ 36 & 32 \end{pmatrix}$$

Damit lösen wir $f'(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 26 & -22 & 5 \\ 36 & 32 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 36 & 32 & 4 \\ 0 & -45.\overline{1} & 2.\overline{1} \end{array}\right) \Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} .1527093596 \\ -.04679802956 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1.847290640 \\ -.9532019704 \end{pmatrix}$$

Weitere Iterationen:

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} .17043000 \\ .17484044 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} 24.19211822 & -20.61576354 \\ 33.25123152 & 30.50246305 \end{pmatrix} \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 24.19211822 & -20.61576354 & .17043000 \\ 33.25123152 & 30.50246305 & .17484044 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 33.25123152 & 30.50246305 & .17484044 \\ 0 & -42.80799999 & .0432238666 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} .006184409290 \\ -.001009714694 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 - \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.841106231 \\ -.9521922557 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} .00032792 \\ .00032792 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 24.12421584 & -20.56855995 \\ 33.13991216 & 30.47015218 \end{pmatrix} \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 24.12421584 & -20.56855995 & .00023380 \\ 33.13991216 & 30.47015218 & .00032792 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 33.13991216 & 30.47015218 & .00032792 \\ 0 & -42.74932266 & -.49095301\,10^{-5} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} .9789424460\,10^{-5} \\ .1148446290\,10^{-6} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 - \Delta\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.841096442 \\ -.9521923705 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} .1\,10^{-7} \\ .1\,10^{-7} \end{pmatrix}$$

vereinfachtes Newton-Verfahren

Statt f' jedesmal neu zu berechnen, wird hier nur $A := f'(\boldsymbol{x}_0)$ verwendet. Die Gleichungssysteme werden nun per L-R-Zerlegung gelöst.

$$A = \begin{pmatrix} 26 & -22 \\ 36 & 32 \end{pmatrix} \rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{18}{13} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.384615385 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 26 & -22 \\ 0 & \frac{812}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -22 \\ 0 & 62.46153847 \end{pmatrix}$$

Damit lösen wir für $i = 0, 1, 2, ...\quad L\,\boldsymbol{y}_i = f(\boldsymbol{x}_0)$ sowie $R\,\Delta\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$ und setzen $\boldsymbol{x}_{i+1} := \boldsymbol{x}_i - \Delta\boldsymbol{x}_i$.

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2.92307692500 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} .1527093596 \\ -.04679802956 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.847290640 \\ -.9532019704 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} .17043000 \\ .17484044 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} .17043000 \\ -.0611395600 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} .005726754729 \\ -.0009788353202 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.841563885 \\ -.9522231351 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} .01191064 \\ .01455551 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} .01191064, \\ -.00193614538 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} .0004318729681 \\ -.00003099740140 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1.841132012 \\ -.9521921377 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} .00085333 \\ .00118590 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} .00085333 \\ .4366154\,10^{-5} \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} .00003287953203 \\ .6990148030\,10^{-7} \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1.841099132 \\ -.9521922076 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_4) = \begin{pmatrix} .00006155 \\ .00009413 \end{pmatrix}$$

nun der andere Startwert

$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_{01} = (3, 2)$.

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 1.00 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 18.0 & 2.0 \\ 54.0 & -64.0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18.0 & 2.0 & -3.00 \\ 54.0 & -64.0 & 1.00 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 54.0 & -64.0 & 1.00 \\ 0 & 23.333333 & -3.333333 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -.150794 \\ -.142857 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 3.150794 \\ 2.142857 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} .086483 \\ -.121882 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} 18.650794 & 2.52381 \\ 56.714286 & -68.571429 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18.650794 & 2.52381 & .086483 \\ 56.714286 & -68.571429 & -.121882 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 56.714286 & -68.571429 & -.121882 \\ 0 & 25.073887 & .126564 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} .003954 \\ .005048 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 - \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3.14684 \\ 2.137809 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 8.582000e-05 \\ -.000267 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 18.641541 & 2.497056 \\ 56.643115 & -68.409904 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18.641541 & 2.497056 & 8.582000e-05 \\ 56.643115 & -68.409904 & -.000267 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 56.643115 & -68.409904 & -.000267 \\ 0 & 25.011107 & .000174 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3.673500e-06 \\ 6.944294e-06 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 - \Delta\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3.146836 \\ 2.137803 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} -1.0e-08 \\ -5.0e-08 \end{pmatrix}$$

vereinfachtes Newton-Verfahren

Statt f' jedesmal neu zu berechnen, wird hier nur $A := f'(\boldsymbol{x}_0)$ verwendet. Die Gleichungssysteme werden nun per L-R-Zerlegung gelöst.

$$A = \begin{pmatrix} 18.0 & 2.0 \\ 54.0 & -64.0 \end{pmatrix} \rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 18.0 & 2.0 \\ 0 & -70 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 1.00 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -.150794 \\ -.142857 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 3.150794 \\ 2.142857 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} .086483 \\ -.121882 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} .086483 \\ -.38133 \end{pmatrix} \to \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} .004199 \\ .005448 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3.146594 \\ 2.13741 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} -.005487 \\ .013189 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} -.005487 \\ .029650 \end{pmatrix} \to \Delta\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -.000258 \\ -.000424 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 3.146852 \\ 2.137833 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} .000375 \\ -.001185 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} .000375 \\ -.002311 \end{pmatrix} \to \Delta\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1.718816e-05 \\ 3.301157e-05 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 3.146835 \\ 2.1378 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_4) = \begin{pmatrix} -2.745000e-05 \\ .000100 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{y}_4 = \begin{pmatrix} -2.745000e-05 \\ .000183 \end{pmatrix} \to \Delta\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} -1.235254e-06 \\ -2.607714e-06 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 3.146836 \\ 2.137803 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_5) = \begin{pmatrix} 2.080000e-06 \\ -8.250000e-06 \end{pmatrix}$$

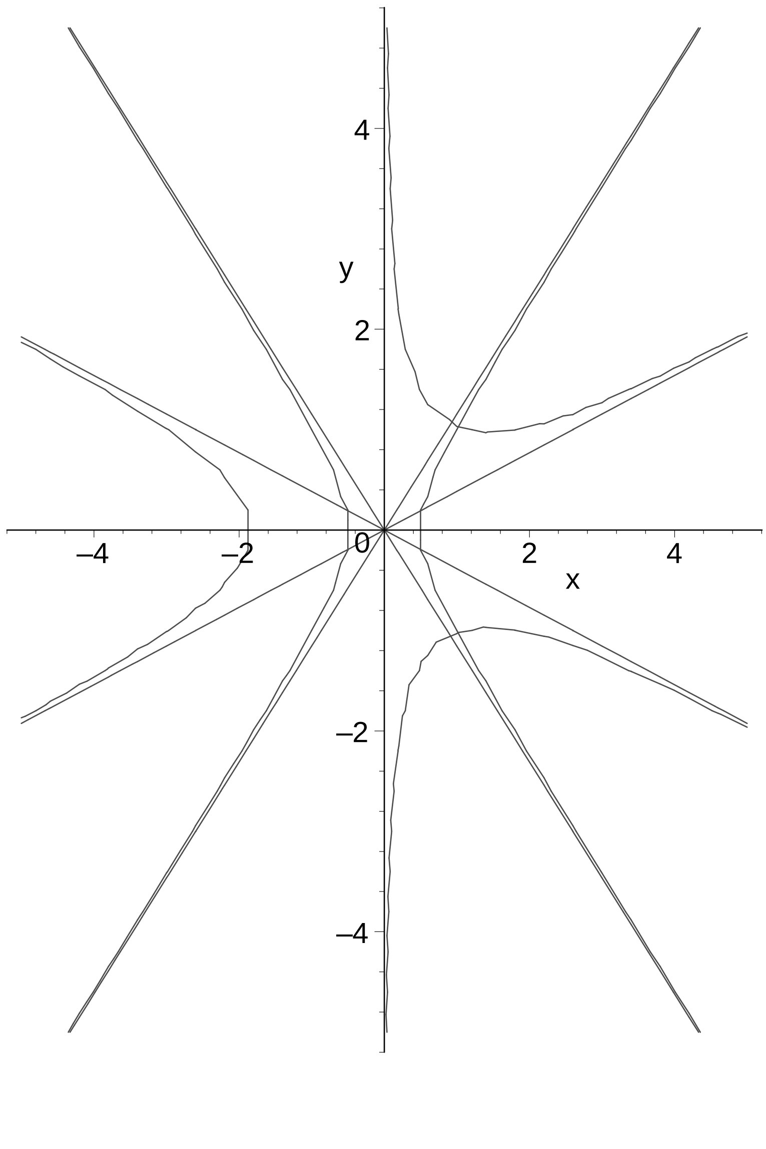
neue Funktion

$$f := (x,\, y) \to \begin{pmatrix} 4\,x^3 - 27\,x\,y^2 + 25 \\ 4\,x^2 - 3\,y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$f_1(x, y) = 0$ ist läßt sich nach y auflösen:

$$y_{f1}(x) = \pm\frac{1}{9}\,\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{x\,(4\,x^3 + 25)}}{x}$$

hat also eine Pol bei $x = 0$ und Asymptoten $y = \pm\sqrt{3}\frac{2}{9}$. $f_2(x, y) = 0$ ist die Gleichung einer Hyperbel. Skizze der Nullstellengebilde mit Asymptoten:



Wegen der Symmetrie zu $y = 0$ ist mit $(\overline{x}, \overline{y})$ auch $(\overline{x}, -\overline{y})$ Nullstelle von f. Geeigneter Startwert zur Bestimmung der zwei Nullstellen ist somit $\boldsymbol{x}_0 = (1, 1)$. Für die Ableitung von f erhalten wir

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 12\,x^2 - 27\,y^2 & -54\,x\,y \\ 8\,x & -6\,y \end{pmatrix}$$

Die Iteration ergibt:

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} -15.00 & -54.00 \\ 8.0 & -6.0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -15.00 & -54.00 & 2.000 \\ 8.0 & -6.0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -15.00 & -54.00 & 2.000 \\ 0 & -34.8 & 1.066667 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -.022989 \\ -.030651 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1.022989 \\ 1.030651 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} -.057609 \\ -.000705 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} -16.122473 & -56.934602 \\ 8.183908 & -6.183908 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -16.122473 & -56.934602 & -.057609 \\ 8.183908 & -6.183908 & -.000705 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -16.122473 & -56.934602 & -.057609 \\ 0 & -35.084408 & -.029948 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} .000559 \\ .000854 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 - \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.02243 \\ 1.029798 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} -4.283000e-05 \\ -9.360000e-07 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} -16.088704 & -56.856369 \\ 8.179437 & -6.178787 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -16.088704 & -56.856369 & -4.283000e-05 \\ 8.179437 & -6.178787 & -9.360000e-07 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -16.088704 & -56.856369 & -4.283000e-05 \\ 0 & -35.084352 & -2.271061e-05 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3.745513e-07 \\ 6.473146e-07 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 - \Delta\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.022429 \\ 1.029797 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 2.000000e-08 \\ -5.000000e-09 \end{pmatrix}$$

vereinfachtes Newton-Verfahren

Statt f' jedesmal neu zu berechnen, wird hier nur $A := f'(\boldsymbol{x}_0)$ verwendet. Die Gleichungssysteme werden nun per L-R-Zerlegung gelöst.

$$A = \begin{pmatrix} -15.00 & -54.00 \\ 8.0 & -6.0 \end{pmatrix} \rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -.533333 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} -15.00 & -54.00 \\ 0 & -34.8 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 1.066667 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -.022989 \\ -.030651 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1.022989 \\ 1.030651 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} -.057609 \\ -.000705 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} -.057609 \\ -.031430 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} .000589 \\ .000903 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.022399 \\ 1.029748 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} .003264 \\ 5.666900e-05 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} .003264 \\ .001797 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -3.165482e-05 \\ -5.165125e-05 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1.022431 \\ 1.0298 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} -.000182 \\ -3.546000e-06 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} -.000182 \\ -.000101 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1.723057e-06 \\ 2.888410e-06 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1.022429 \\ 1.029797 \end{pmatrix}$$

Hier ist die Änderung der Jakobischen im Laufe der Iteration so gering, daß das vereinfachte Newton-Verfahren nicht viel schlechter ist als das (aufwendigere) Newton-Verfahren.