Verständnisfragen-Teil (32 Punkte)

Es gibt zu jeder der 8 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit "wahr" bzw. "falsch" zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 1.0 Punkte.

Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1:		
1.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	
2.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler in der selben Größenordnung wie der Eingabefehler.	
3.	Die Funktion $f(x, y) = x^2 - y$ ist gut konditioniert für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y < 0$	
4.	Die Funktion $f(x, y) = (x^2 - 1)\cos y$ ist in der Nähe von $(1, 1)$ gut konditioniert.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Es gilt $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$.	
2.	Sei $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich $\|\cdot\|$. Es gilt $\|\tilde{x} - x\| \leq \kappa(A)\|\tilde{b} - b\|$.	
3.	Ist A symmetrisch positiv definit, so ist A^{-1} symmetrisch positiv definit.	
4.	Ist A eine untere Dreiecksmatrix, so ist A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix.	

VF-3: Es seien $A \in R^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Es seien $A \in R^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.	
2.	Die Gauß-Elimination mit Pivotisierung führt auf eine Zerlegung $PA = LR$.	
3.	Das Cholesky-Verfahren sollte stets mit Pivotisierung zusammen eingesetzt werden.	
4.	Durch Zeilenäquilibrierung soll die Stabilität der LR-Zerlegung verbessert werden	

VF-4: Gesucht ist die Lösung von $Q\,x = b$ mit einer orthogonalen Matrix Q. Die rechte Seite sei bezüglich der 2-Norm mit einem relativen Fehler $r_b \leq \epsilon$ behaftet.		
1.	$x = Q^T\,b$.	
2.	Der relative Fehler in x bezüglich der 2-Norm ist kleiner oder gleich ϵ.	
3.	Der relative Fehler in x bezüglich der 1-Norm ist kleiner oder gleich ϵ.	
4.	Der relative Fehler in x bezüglich der ∞-Norm kann größer als ϵ sein.	

VF-5: Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der vollständigen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion Φ mit der Kontraktionskonstante $L < 1$ bezüglich der Norm $\|\|.\|\|$ erfüllt. Sei $x_0 \in D$ und $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, die mit der Fixpunktiteration erzeugte Folge. Dann gilt:		
1.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 1 sein.	
2.	Es existiert nur ein Fixpunkt x^* in $\mathbb{R}^2$.	
3.	$\|\|x_k - x^*\|\| \leq \frac{L}{1-L} \|\|x_k - x_{k-1}\|\|$, $k = 1, 2, \ldots$, wobei $x^* \in D$ Fixpunkt von Φ ist.	
4.	Sei $\Phi(x) := \frac{1}{2}\sin(x)$, $D := [-1, 1]$. Dann erfüllt f die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.	

VF-6: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Dazu sei noch $\phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$.		
1.	Es gilt: $\nabla \phi(x^\star) = 0$.	
2.	Die Lösung $x^\star$ ist eindeutig.	
3.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Minimums.	
4.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	

VF-7: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $U^T A V = \Sigma$ die Singulärwertzerlegung von A mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots \sigma_p = 0$, $p = \min\{m, n\}$. Die Matrix U hat Spalten u_i, $i = 1, \ldots, m$, und die Matrix V hat Spalten v_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt:		
1.	Es gilt: $AV = \Sigma U$.	
2.	Die Matrix U ist eine reguläre $m \times m$-Matrix.	
3.	Für die Pseudoinverse A^+ gilt $\|A^+\|_2 = \sigma_r^{-1}$.	
4.	σ_1 ist der größte Eigenwert von $A^T A$.	

VF-8: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n] f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt: $\delta_n = [x_0, \ldots, x_n] f$.	
2.	Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\|$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	
3.	Falls die Funktion f ein Polynom vom Grad maximal n ist, dann gilt $f(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
4.	Seien $x_0, \ldots, x_n$ äquidistant auf $[a, b]$ und $f \in C^\infty([a, b])$ beliebig. Dann gilt für jedes $x \in [a, b]$ dass $\lim_{n \to \infty} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\| = 0$.	

Numerik ET F13

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 27xy^2 + 25, \\ 0 &= 4x^2 - 3y^3 - 1, \end{aligned}$$

indem Sie mit Taschenrechnergenauigkeit ausgehend von der Näherung $(x^{(0)}, y^{(0)})^T = (1,1)^T$ die ersten zwei Iterierten mit dem vereinfachten Newton-Verfahren bestimmen. Berechnen Sie dabei im ersten Schritt eine LR-Zerlegung der Jacobi-Matrix und nutzen Sie diese im 2. Schritt.

Aufgabe 2 (2+3+10+3=18 Punkte)

Gegeben seien die Messwerte

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & 1 & 2 & 4 \\ \hline f_i & 0.2 & 0.7 & 0.6 \end{array},$$

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = e^{-\lambda(t-\alpha)^2}$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem auf (Messwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß-Newton-Verfahren seien die Startwerte $\alpha_0 = 3$, $\lambda_0 = 0.5$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? Geben Sie die auftretenden Werte in Matrizen/Vektoren mit mindestens drei signifikanten Stellen an. (Der erste Schitt muss nicht durchgeführt werden).

c) Lösen Sie stattdessen das lineare Ausgleichsproblem $||Ax - b||_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie den Wert des Residuum explizit an.

d) Betrachten Sie nun eine zu b gestörte rechte Seite $\tilde{b}$ mit zugehöriger Lösung $\tilde{x}$, d.h. $\tilde{x}$ ist Minimum von $||A\tilde{x} - \tilde{b}||_2$ (A und b aus Teil c). Wie groß darf die relative Abweichung $||\tilde{b} - b||_2/||b||_2$ höchstens sein, damit der relative Fehler $||\tilde{x} - x||_2/||x||_2$ nicht größer als 0.05 ist? (Hinweis: $\kappa_2(A) \approx 7$).

Numerik ET F13

Aufgabe 3 (4+4+6=14 Punkte)

Die Funktion $f(x) = (\sin 2x)^2$ soll durch ein Polynom interpoliert werden.

x_i	0	$\pi/12$	$\pi/4$
$f(x_i)$	0	$1/4$	1

a) Bestimmen Sie zu den 3 Tabellenwerten das Interpolationspolynom in der Newton-Darstellung.

b) Wir nehmen zu den Tabellenwerten noch einen Interpolationswert für die Ableitung hinzu: $f'(\pi/4) = 0$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zu allen 4 gegebenen Daten in der Newtondarstellung.

c) Man füge immer mehr Stützstellen in das Intervall $[0, \pi/4]$ ein und bezeichne, wenn $n+1$ verschiedene Stützstellen vorhanden sind, das zugehörige Interpolationspolynom mit p_n. Zeigen Sie, dass p_n für $n \to \infty$ auf $[0, \pi/4]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.
Hinweis: wenn n gerade ist, gilt

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} 4^{n-1} \cdot 2 \cdot \cos(4x).$$