

Verständnisfragen-Teil

(25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = xe^{8y^2}$. (Der relative Fehler der Eingabe wird bezüglich der 1-Norm gemessen)	
1.	Was ist die relative Konditionszahl κ_{rel} von f an der Stelle $(x, y) = (5, -10)$?
2.	Was ist die relative Konditionszahl κ_{rel} von f an der Stelle $(x, y) = (3, \frac{1}{10})$?
3.	Ist die Addition zweier Zahlen stets gut konditioniert?
4.	Ist bei einem stabilen Lösungsverfahren der relative Ausgabefehler stets in der gleichen Größenordnung wie der relative Eingabefehler?
5.	Gibt die Konditionszahl einer Funktion an, wie stark sich der Eingabefehler durch Verwendung von Gleitpunktarithmetik bei Auswertung der Funktion verstärkt?

Verständnisfragenblock 2: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.	
1.	Sei $A = LDL^T$ mit $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ normierte untere Dreiecksmatrix und D Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $d_{i,i} > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Ist A dann stets symmetrisch positiv definit?
2.	Sollte vor der Durchführung des Cholesky-Algorithmus eine Zeilenskalierung durchgeführt werden?
3.	Gegeben sei $A = LDL^T$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Was ist $\det(A)$?
4.	Sei A regulär. Existiert dann stets eine Zerlegung $PA = LR$ mit Permutationsmatrix P , normierter unterer Dreiecksmatrix L und oberer Dreiecksmatrix R ?
5.	Sei A symmetrisch und invertierbar. Ist A dann auch positiv definit?

Verständnisfragenblock 3: Gegeben sei das Lineare Ausgleichsproblem: Finde $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\ Ax^* - b\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$, $\text{Rang}(A) = n$.	
1.	Ist AA^T regulär?
2.	Ist das obige lineare Ausgleichsproblem eindeutig lösbar?
3.	Was ist $(Ax^*)^T(Ax^* - b)$?
4.	Seien A, b so, dass $\frac{\ Ax^*\ _2}{\ b\ _2} \approx 0$. Ist das lineare Ausgleichsproblem dann gut konditioniert?
5.	Kann die zugehörige Normalgleichung mittels Cholesky-Zerlegung gelöst werden?

Verständnisfragenblock 4:

1.	Kann jede Fixpunktgleichung in ein Nullstellenproblem umgeformt werden?	
2.	Konvergiert die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ mit Startwert $x_0 \in E$ genau dann, wenn E eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n ist, Φ stetig differenzierbar mit $\ \Phi'(x)\ \leq c < 1$ für alle $x \in E$ und Φ eine Selbstabbildung auf E ist?	
3.	Sei $x^* = \Phi(x^*)$ Fixpunkt von $\Phi : E \rightarrow E$ und E sowie Φ erfüllen die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit Kontraktionskonstante $L := \frac{1}{3}$. Weiter gelte für die k -te und $(k+1)$ -te Iterierte des Fixpunktverfahrens, dass $\ x_k - x_{k-1}\ = 0.002$. Wie groß ist der Fehler $\ x_k - x^*\ $ maximal?	
4.	Sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x^* und es gelte $\ x_{k+2} - x^*\ \leq 0.5\ x_{k+1} - x^*\ ^p$ für alle $k \geq 27$. Hat die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dann Konvergenzordnung p ?	
5.	Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar auf \mathbb{R} und $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$. Ist dann das Newton-Verfahren lokal quadratisch konvergent?	

Verständnisfragenblock 5: Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .

1.	Kann man eine Darstellung des Interpolationspolynoms $P(f x_0, \dots, x_n)$ mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas bestimmen?	
2.	Sei $g(x) = 27x^2 + 5x + 3, x_0 := 1, x_1 := 2, x_2 := 3, x_3 := 4$. Was ist $[x_0, x_1, x_2, x_3]g$?	
3.	Ist $[x_0, x_1, x_2]f + [x_0, x_1, x_2]g = [x_0, x_1, x_2](f + g)$?	
4.	Stimmt es, dass das Problem der Polynominterpolation in der Monombasis besser konditioniert ist als mittels Newton-Interpolation, dafür aber die Auswertung eines Polynoms in der Monombasis instabil ist?	
5.	Sei $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion auf $I = [a, b]$. Wird dann der Fehler $\max_{x \in [a, b]} h(x) - P(h x_0, \dots, x_n)(x) $ stets kleiner für wachsende Stützstellenanzahl und damit wachsenden Polynomgrad n ?	

Aufgabe 1

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10000 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 + \epsilon \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wobei $|\epsilon| \ll 1$.

- a) Mit welchem relativen Fehler in der ∞ -Norm muss man rechnen, wenn man statt $Ax = b$ das gestörte lineare Gleichungssystem $Ax = \tilde{b}$ löst? Hinweis: Es ist $A^{-1} = \frac{1}{50001} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 10000 \end{pmatrix}$.
- b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so, dass die Konditionszahl der Matrix DA in der ∞ -Norm minimal wird. Mit welchem relativen Fehler in der ∞ -Norm muss man rechnen, wenn man statt $DAx = Db$ das gestörte lineare Gleichungssystem $DAx = D\tilde{b}$ löst?

3+5 = 8 Punkte

Aufgabe 2

a) Gegeben sei die LR -Zerlegung $PA = LR$ mit

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sowie } b := \begin{pmatrix} 28 \\ 17 \\ 44 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ (ohne das Produkt LR oder das Produkt $P^{-1}LR$ explizit zu bestimmen).

b) Gegeben sei $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Rotationsmatrizen G_1, G_2 und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$G_2 G_1 x = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4+6=10 Punkte

Aufgabe 3

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte f_i :

t_i	0	5	10
f_i	0.14	0.41	-0.91

Aus theoretischen Überlegungen gehe hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \sin(\omega t + \phi)$$

genügen.

- Zu bestimmen sind die optimalen Parameter ω, ϕ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem.
- Für das Gauß-Newton-Verfahren seien die Startwerte $\omega_0 = 2, \phi_0 = 3$ gegeben. Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf. (Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.)
- Lösen Sie das folgende lineare Ausgleichsproblem mittels Householder-Transformationen:
Finde $x^* \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Norm des Residuums.

3+5+7 = 15 Punkte

Aufgabe 4

Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\sin(y) + e^x = \sin(2) + 1$$

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 3$$

mittels zweier Iterationen des vereinfachten Newton-Verfahrens für Systeme. Benutzen Sie als Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9 Punkte

Aufgabe 5

Gegeben sei die Wertetabelle

x	-3	-2	-1	0
f(x)	5	2	3	6

a) Bestimmen Sie die drei fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f$
$x_0 = -3$	5			
$x_1 = -2$	2	$[x_0, x_1]f = \underline{\hspace{2cm}}$		
$x_2 = -1$	$[x_2]f = \underline{\hspace{2cm}}$	1	$[x_1, x_2, x_3]f = \underline{\hspace{2cm}}$	
$x_3 = 0$	6	3		$-\frac{1}{3}$

b) Stellen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x)$ vom Grad 3 in Newton- oder Horner-artiger Form auf.

c) Geben Sie eine möglichst gute Abschätzung für den maximalen Fehler $|p_3(x) - f(x)|$ in Intervall $[-2.5, -0.5]$ an.

Hinweis: Für die Ableitung von f gelte $|f^{(3)}(x)| \leq 7.8$, $|f^{(4)}(x)| \leq 6.4$, $|f^{(5)}(x)| \leq 8.2$ für alle $x \in [-3, 0]$ und das Knotenpolynom erfüllt $\omega'(x) = 0$ für $x \in \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} - \frac{3}{2}\}$.

d) Zusätzlich zu den obigen Stützstellen ist bekannt, dass $f(x_4) = 5$ mit $x_4 = -0.5$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_2, x_3, x_4)(x)$ vom Grad 2.

Erweitern Sie dazu das Newton-Schema aus a) geeignet (berechnen Sie möglichst wenig weitere Werte) und stellen Sie $P(f|x_2, x_3, x_4)(x)$ in Newton- oder Horner-artiger Form auf.

e) Welcher Fehler ist bei Auswertung in $x^* = -0.5$ voraussichtlich geringer, $|f(x^*) - P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x^*)|$ oder $|f(x^*) - P(f|x_2, x_3, x_4)(x^*)|$? Begründen Sie ihre Antwort ohne die Polynome explizit auszuwerten!

3+1+5+3+1=13 Punkte