Verständnisfragen-Teil (25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = xe^{8y^2}$. (Der relative Fehler der Eingabe wird bezüglich der 1-Norm gemessen)		
1.	Was ist die relative Konditionszahl κ_{rel} von f an der Stelle $(x,y) = (5,-10)$?	**1600**
2.	Was ist die relative Konditionszahl κ_{rel} von f an der Stelle $(x,y) = (3, \frac{1}{10})$?	**1**
3.	Ist die Addition zweier Zahlen stets gut konditioniert?	**nein**
4.	Ist bei einem stabilen Lösungsverfahren der relative Ausgabefehler stets in der gleichen Größenordnung wie der relative Eingabefehler?	**nein**
5.	Gibt die Konditionszahl einer Funktion an, wie stark sich der Eingabefehler durch Verwendung von Gleitpunktarithmetik bei Auswertung der Funktion verstärkt?	**nein**

Verständnisfragenblock 2: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.		
1.	Sei $A = LDL^T$ mit $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normierte untere Dreiecksmatrix und D Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $d_{i,i} > 0$ für alle $i = 1, ..., n$. Ist A dann stets symmetrisch positiv definit?	**ja**
2.	Sollte vor der Durchführung des Cholesky-Algorithmus eine Zeilenskalierung durchgeführt werden?	**nein**
3.	Gegeben sei $A = LDL^T$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Was ist $\det(A)$?	**18**
4.	Sei A regulär. Existiert dann stets eine Zerlegung $PA = LR$ mit Permutationsmatrix P, normierter unterer Dreiecksmatrix L und oberer Dreiecksmatrix R ?	**ja**
5.	Sei A symmetrisch und invertierbar. Ist A dann auch positiv definit?	**nein**

Verständnisfragenblock 3: Gegeben sei das Lineare Ausgleichsproblem: Finde $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$, $Rang(A) = n$.		
1.	Ist AA^T regulär?	**nein**
2.	Ist das obige lineare Ausgleichsproblem eindeutig lösbar?	**ja**
3.	Was ist $(Ax^*)^T(Ax^* - b)$?	**0**
4.	Seien A, b so, dass $\frac{\|Ax^*\|_2}{\|b\|_2} \approx 0$. Ist das lineare Ausgleichsproblem dann gut konditioniert?	**nein**
5.	Kann die zugehörige Normalengleichung mittels Cholesky-Zerlegung gelöst werden?	**ja**

Verständnisfragenblock 4:		
1.	Kann jede Fixpunktgleichung in ein Nullstellenproblem umgeformt werden?	**ja**
2.	Konvergiert die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ mit Startwert $x_0 \in E$ genau dann, wenn E eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, Φ stetig differenzierbar mit $\|\Phi'(x)\| \leq c < 1$ für alle $x \in E$ und Φ eine Selbstabbildung auf E ist?	**nein**
3.	Sei $x^* = \Phi(x^*)$ Fixpunkt von $\Phi : E \to E$ und E sowie Φ erfüllen die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit Kontraktionskonstante $L := \frac{1}{3}$. Weiter gelte für die k-te und $(k+1)$-te Iterierte des Fixpunktverfahrens, dass $\|x_k - x_{k-1}\| = 0.002$. Wie groß ist der Fehler $\|x_k - x^*\|$ maximal?	**0.001**
4.	Sei $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x^* und es gelte $\|x_{k+2} - x^*\| \leq 0.5\|x_{k+1} - x^*\|^p$ für alle $k \geq 27$. Hat die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dann Konvergenzordnung p ?	**ja**
5.	Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$. Ist dann das Newton-Verfahren lokal quadratisch konvergent?	**ja**

Verständnisfragenblock 5: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Kann man eine Darstellung des Interpolationspolynoms $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas bestimmen?	**nein**
2.	Sei $g(x) = 27x^2 + 5x + 3$, $x_0 := 1, x_1 := 2, x_2 := 3, x_3 := 4$. Was ist $[x_0, x_1, x_2, x_3]g$?	**0**
3.	Ist $[x_0, x_1, x_2]f + [x_0, x_1, x_2]g = [x_0, x_1, x_2](f + g)$?	**ja**
4.	Stimmt es, dass das Problem der Polynominterpolation in der Monombasis besser konditioniert ist als mittels Newton-Interpolation, dafür aber die Auswertung eines Polynoms in der Monombasis instabil ist?	**nein**
5.	Sei $h : I \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion auf $I = [a, b]$. Wird dann der Fehler $\max_{x\in n[a,b]} \lvert h(x) - P(h \mid x_0, \ldots, x_n)(x)\rvert$ stets kleiner für wachsende Stützstellenanzahl und damit wachsenden Polynomgrad n ?	**nein**

Aufgabe 1

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10000 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+\epsilon \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wobei $|\epsilon| \ll 1$.

a) Mit welchem relativen Fehler in der ∞-Norm muss man rechnen, wenn man statt $Ax = b$ das gestörte lineare Gleichungssystem $Ax = \tilde{b}$ löst ? Hinweis: Es ist $A^{-1} = \frac{1}{50001}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 10000 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie eine Diagonalmartix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass die Konditionszahl der Matrix DA in der ∞-Norm minimal wird. Mit welchem relativen Fehler in der ∞-Norm muss man rechnen, wenn man statt $DAx = Db$ das gestörte lineare Gleichungssystem $DAx = D\tilde{b}$ löst ?

3+5 = 8 Punkte

Musterlösung

a) Es gilt

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 10001 \cdot \frac{10001}{50001} \approx 2000.4\,.$$

Damit gilt für den relativen Fehler

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} &\le \kappa_\infty(A) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \\ &= \kappa_\infty(A) \cdot \frac{|\epsilon|}{\max\{2, 3+\epsilon\}} \\ &\approx 2000.4 \cdot \frac{|\epsilon|}{3+\epsilon}\,. \end{aligned}$$

b) Die gesuchte Diagonalmatrix D ist die Zeilenäquilibirerung

$$D = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|\right)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10001} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|DA\|_\infty &= 1 \qquad \text{nach Konstruktion} \\ \|(DA)^{-1}\|_\infty &= \|A^{-1}D^{-1}\|_\infty = \frac{1}{50001} \left\| \begin{pmatrix} 50005 & -6 \\ 10001 & 60000 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{70001}{50001} \end{aligned}$$

und somit

$$\kappa_\infty(DA) = \|DA\|_\infty \|(DA)^{-1}\|_\infty = 1 \cdot \frac{70001}{50001} \approx 1.4000\,,$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \|Db - D\tilde{b}\|_\infty &= \|D(b - \tilde{b})\|_\infty = \frac{|\epsilon|}{6} \\ \|Db\|_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{10001} \\ \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{6} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{6}\,. \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt für den relativen Fehler

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} &\le \kappa_\infty(DA) \cdot \frac{\|Db - D\tilde{b}\|_\infty}{\|Db\|_\infty} \\ &= \frac{70001}{50001} \cdot \frac{\frac{|\epsilon|}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{6}} \approx 1.4000 \cdot \frac{|\epsilon|}{3+\epsilon}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Gegeben sei die LR-Zerlegung $PA = LR$ mit

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sowie } b := \begin{pmatrix} 28 \\ 17 \\ 44 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ (ohne das Produkt LR oder das Produkt $P^{-1}LR$ explizit zu bestimmen).

b) Gegeben sei $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Rotationsmatrizen G_1, G_2 und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$G_2 G_1 x = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4+6=10 Punkte

Musterlösung

a) Es gilt

$$Ax = b \qquad \Leftrightarrow \qquad LRx = Pb\,.$$

Löse $Ly = Pb$ mittels Vorwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 44 \\ 0 & 1 & 0 & 28 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 17 \end{array} \right) \qquad \rightsquigarrow \qquad y = \begin{pmatrix} 44 \\ 28 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Löse $Rx = y$ mittels Rückwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 0 & 44 \\ 0 & 4 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \qquad \rightsquigarrow \qquad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Lösung des Gleichungssystems ist also $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Wähle eine Givens-rotationsmatrix G_1 so, dass die dritte Komponente von $G_1 x$ Null ist:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,, \qquad c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,, \qquad s_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\,,$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$G_1 x = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wähle nun eine Rotationsmatrix G_2 so, dass die erste Komponente von $G_2 G_1 x$ Null ist. Beachte dabei:

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca + bs \\ -sa + cb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

für $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}, s = -\frac{a}{r}, c = \frac{b}{r}$.

Damit ergibt sich

$$r_2 = \sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2} = 3\,, \qquad c_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\,, \qquad s_2 = -\frac{2}{3}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_2 G_1 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\alpha = 1$.

Aufgabe 3

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte f_i:

t_i	0	5	10
f_i	0.14	0.41	-0.91

Aus theoretischen Überlegungen gehe hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \sin(\omega t + \phi)$$

genügen.

a) Zu bestimmen sind die optimalen Parameter ω, ϕ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem.

b) Für das Gauß-Newton-Verfahren seien die Startwerte $\omega_0 = 2, \phi_0 = 3$ gegeben. Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf. (Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.)

c) Lösen Sie das folgende lineare Ausgleichsproblem mittels Householder-Transformationen: Finde $x^* \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2 \,,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Norm des Residuums.

3+5+7 = 15 Punkte

Musterlösung

a) Finde $(\omega^*, \phi^*) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\|F(\omega^*, \phi^*)\|_2 = \min_{(\omega,\phi)\in\mathbb{R}^2} \|F(\omega, \phi)\|_2 \,,$$

wobei

$$F(\omega, \phi) := \begin{pmatrix} \sin(\phi) - 0.14 \\ \sin(5\omega + \phi) - 0.41 \\ \sin(10\omega + \phi) + 0.91 \end{pmatrix}$$

b) Es ist

$$DF(\omega, \phi) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\phi) \\ 5\cos(5\omega + \phi) & \cos(5\omega + \phi) \\ 10\cos(10\omega + \phi) & \cos(10\omega + \phi) \end{pmatrix}$$

und damit

$$DF(2,3) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(3) \\ 5\cos(13) & \cos(13) \\ 10\cos(23) & \cos(23) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.98999 \\ 4.5372 & 0.90745 \\ -5.3283 & -0.53283 \end{pmatrix}, \qquad F(2,3) = \begin{pmatrix} \sin(3) - 0.14 \\ \sin(13) - 0.41 \\ \sin(23) + 0.91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0011200 \\ 0.010167 \\ 0.063780 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt des Gauß-Newton Verfahrens: Finde $s^* \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\|DF(2,3)s^* + F(2,3)\|_2 = \min_{s\in\mathbb{R}^2} \|DF(2,3)s + F(2,3)\|_2 \,.$$

c) Householder-Transformationen im Tableau:

	2	1	-3	
	1	4	-2	
	2	3	1	$\alpha_1 = sgn(2) \cdot \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3$
$v_1^T = (5, 1, 2)$	15	15	-15	$\beta_1 = \frac{2}{v^T v} = 0.066667$
0.33333	5	5	-5	
$r_1 = \beta_1 v_1 =$ 0.066667	1	1	-1	
0.13333	2	2	-2	
	-3	-4	2	
	0	3	-1	
	0	1	3	$\alpha_2 = sgn(3) \cdot \sqrt{3^2+1^2} = 3.1623$
$v_2^T = (6.1623, 1)$		19.487	-3.1623	$\beta_2 = \frac{1}{10+3\sqrt{10}} = 0.051317$
$r_2 = \beta_2 v_2 =$ 0.31628		6.1623	-1	
0.051317		1	-0.16228	
	-3	-4	2	
	0	-3.1623	0	
	0	0	3.1623	

Mit Rückwärtseinsetzen ergibt sich daraus:

$$x^* = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Norm des Residuums ist $\|Ax^* - b\|_2 = \sqrt{10} = 3.1623$.

Aufgabe 4
Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\sin(y) + e^x = \sin(2) + 1$$
$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 3$$

mittels zweier Iterationen des vereinfachten Newton-Verfahrens für Systeme. Benutzen Sie als Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9 Punkte

Musterlösung Gesucht ist die Nullstelle der Funktion

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(y) + e^x - \sin(2) - 1 \\ \frac{1}{4}x^2 + y^2 - 3 \end{pmatrix}$$

mit Jacobi-Matrix

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & \cos(y) \\ \frac{1}{2}x & 2y \end{pmatrix}.$$

Für den Startwert $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist damit das zu lösende Gleichungssystem für den ersten Schritt des vereinfachten Newton-Verfahrens:

$$\left(\; Df(x_0,y_0) \; \middle| \; -f(x_0,y_0) \; \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -0.41615 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{array} \right)$$

Daraus ergibt sich die Lösung

$$s_y^1 = -\frac{1}{4}, \qquad s_x^1 = \frac{\cos(2)}{4}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(2)}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.10404 \\ 1.75 \end{pmatrix}.$$

Das zu lösende Gleichungssystem für den zweiten Schritt des vereinfachten Newton- Verfahrens lautet

$$\left(\; Df(x_0,y_0) \; \middle| \; -f(x_1,y_1) \; \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \cos(2) & \sin(\frac{7}{4}) + e^{\frac{\cos(2)}{4}} - \sin(2) - 1 \\ 0 & 4 & \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(2)}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -0.41615 & 0.024119 \\ 0 & 4 & -0.065206 \end{array} \right).$$

Die Lösung hiervon ist

$$s_y^2 = -0.016302, \qquad s_x^2 = 0.017335$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.086705 \\ 1.7337 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Gegeben sei die Wertetabelle

x	-3	-2	-1	0
f(x)	5	2	3	6

a) Bestimmen Sie die drei fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f$
$x_0 = -3$	5			
		$\mathbf{[x_0, x_1]f} =$ ________		
$x_1 = -2$	2		2	
		1		$-\frac{1}{3}$
$x_2 = -1$	$\mathbf{[x_2]f} =$ ________		$\mathbf{[x_1, x_2, x_3]f} =$ ________	
		3		
$x_3 = 0$	6			

b) Stellen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x)$ vom Grad 3 in Newton- oder Horner-artiger Form auf.

c) Geben Sie eine möglichst gute Abschätzung für den maximalen Fehler $|p_3(x) - f(x)|$ in Intervall $[-2.5, -0.5]$ an.
Hinweis: Für die Ableitung von f gelte $|f^{(3)}(x)| \leq 7.8$, $|f^{(4)}(x)| \leq 6.4$, $|f^{(5)}(x)| \leq 8.2$ für alle $x \in [-3, 0]$ und das Knotenpolynom erfüllt $\omega'(x) = 0$ für $x \in \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} - \frac{3}{2}\}$.

d) Zusätzlich zu den obigen Stützstellen ist bekannt, dass $f(x_4) = 5$ mit $x_4 = -0.5$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_2, x_3, x_4)(x)$ vom Grad 2.
Erweitern Sie dazu das Newton-Schema aus a) geeignet (berechnen Sie möglichst wenig weitere Werte) und stellen Sie $P(f|x_2, x_3, x_4)(x)$ in Newton- oder Horner-artiger Form auf.

e) Welcher Fehler ist bei Auswertung in $x^* = -0.5$ voraussichtlich geringer, $|f(x^*) - P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x^*)|$ oder $|f(x^*) - P(f|x_2, x_3, x_4)(x^*)|$? Begründen Sie ihre Antwort ohne die Polynome explizit auszuwerten!

3+1+5+3+1=13 Punkte

Musterlösung

a) Die fehlenden dividierten Diferenzen sind:

	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f$
$x_0 = -3$	5			
		$\mathbf{[x_0, x_1]f = -3}$		
$x_1 = -2$	2		2	
		1		$-\frac{1}{3}$
$x_2 = -1$	$\mathbf{[x_2]f = 3}$		$\mathbf{[x_1, x_2, x_3]f = 1}$	
		3		
$x_3 = 0$	6			

b) Das Interpolationspolynom vom Grad 3 in Newton-Darstellung lautet

$$P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x) = 5 + (x+3)\left(-3 + (x+2)\left(2 + (x+1)\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right).$$

c) Es gilt

$$\max_{x\in[-2.5,-0.5]} |P(f|x_0,x_1,x_2,x_3)(x) - f(x)| \le \max_{x\in[-2.5,-0.5]} |\omega(x)| \frac{1}{4!} \max_{\xi\in[-3,0]} |f^{(4)}(\xi)|\,,$$

wobei laut Hinweis $\max_{\xi\in[-3,0]} |f^{(4)}(\xi)| \le 6.4$.

Die einzige Nullstelle von $\omega'(x)$ die in $[-2.5,-0.5]$ liegt ist $-\frac{3}{2}$. Damit nimmt $\omega(x)$ sein betragsmäßiges Maximum auf $[-2.5,-0.5]$ entweder in $-\frac{3}{2}$ oder am Rand von $[-2.5,-0.5]$ an. Es gilt $\omega(x) = (x+3)(x+2)(x+1)x$ und damit

$$\omega(-2.5) = -0.9375\,, \qquad \omega(-0.5) = -0.9375\,, \qquad \omega\left(-\frac{3}{2}\right) = 0.5625\,,$$

also $\max_{x\in[-2.5,-0.5]} |\omega(x)| \le 0.9375$.

Damit gilt insgesamt

$$\max_{x\in[-2.5,-0.5]} |P(f|x_0,x_1,x_2,x_3)(x) - f(x)| \le 0.9375 \cdot \frac{1}{4!} \cdot 6.4 = 0.2500\,.$$

d) Zu dem obigen Newton-Schema müssen die ersten drei Einträge einer weiteren Zeile hinzugefügt werden:

$$\begin{array}{l|ccccccc}
 & [x_i]f & & [x_i,x_{i+1}]f & & [x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f & & [x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]f \\ \hline
x_0=-3 & 5 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
 & & & \mathbf{[x_0,x_1]f=-3} & & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & \\
x_1=-2 & 2 & & & & 2 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & 1 & & & & -\frac{1}{3} \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
x_2=-1 & \mathbf{[x_2]f=3} & & & & \mathbf{[x_1,x_2,x_3]f=1} & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & & 3 & & & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & \\
x_3=0 & 6 & & & & \mathbf{-2} & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & & \mathbf{2} & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
\mathbf{x_4=-0.5} & \mathbf{5} & & & & & &
\end{array}$$

Das gesuchte Interpolationspolynom lautet dann

$$P(f|x_2,x_3,x_4)(x) = 3 + (x+1)\,(3 + x\,(-2))$$

e) Da $x_4 = x^* = -0.5$ Stützstelle von $P(f|x_2,x_3,x_4)(x)$ ist, ist $|f(x^*) - P(f|x_2,x_3,x_4)(x^*)| = 0$, wohingegen $P(f|x_0,x_1,x_2,x_3)(x^*)$ keine Stützstelle in $x^* = -0.5$ hat und deshalb dort voraussichltich nicht exakt ist. Damit ist $|f(x^*) - P(f|x_2,x_3,x_4)(x^*)|$ voraussichtlich geringer.