Verständnisfragen-Teil (25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 2\cos(\frac{x}{3})$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch.

1.	Bestimmen Sie das kleinste $L \in \mathbb{R}$ so, dass $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.	$\frac{2}{3} \approx 0.666\dots$
2.	Für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\|x_3 - x^*\| \leq \frac{8}{9}\|x_1 - x_0\|$ für einen Fixpunkt x^* von Φ.	**ja**
3.	Die Fixpunktiteration konvergiert für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.	**ja**
4.	Es existiert genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $x^* = \Phi(x^*)$	**ja**
5.	Sei $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und y^* ein Fixpunkt, d.h. $\Theta(y^*) = y^*$. Gilt dann immer $\|\Theta'(y^*)\| < 1$?	**nein**

Verständnisfragenblock 2: Eine skalare Funktion $f(x)$ soll mittels Interpolation an verschiedenen Stützstellen im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ durch ein Polynom $p(x)$ approximiert werden.

1.	Ist das Interpolationspolynom vom Grad n zu den Stützstellen $x_0, ..., x_n$ eindeutig?	**ja**
2.	Welche Dimension hat der Raum Π_3 der Polynome vom Grad 3 ?	**4**
3.	Berechnet das Neville-Aitken-Verfahren für einen bekannten Wert y den Wert $p(y)$, ohne das Polynom $p(x)$ allgemein für beliebige x aufzustellen ?	**ja**
4.	Stimmt es, dass die Wahl der Stützstellen keinen Einfluss auf den Interpolationsfehler hat?	**nein**
5.	Sei $p(y)$ das Newtonpolynom zu den Stützstellen $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ausgewertet an der (festen) Stelle y und $P_{n,n}$ der Wert, den das entsprechende Neville-Aitken-Schema (mit den gleichen Stützstellen) liefert. Gilt dann stets $p(y) = P_{n,n}$?	**ja**

Verständnisfragenblock 3:

1.	Lassen sich mittels Nachiteration auch Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $\det(A) = 0$ eindeutig lösen?	**nein**
2.	Das Gleichungssystem $Ax = b$ soll mittels $LR-$Zerlegung gelöst und die so bestimmte Lösung mittels 2 Nachiterationsschritten verbessert werden. Wie viele $LR-$Zerlegungen müssen dazu insgesamt berechnet werden?	**1**
3.	Ist die Nachiteration auch für nicht symmetrisch positiv definite Matrizen sinnvoll?	**ja**
4.	Ist das Ziel der Nachiteration die Verbesserung einer nicht exakte Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$?	**ja**
5.	Lassen sich mit der Nachiteration die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ mit $\tilde{L}\tilde{R} \approx A$ so verbessern, dass $\|\tilde{L}\tilde{R} - A\|_2$ kleiner wird?	**nein**

Verständnisfragenblock 4: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

1.	Hat die Systemmatrix des linearen Ausgleichsproblems beim Levenberg-Marquardt-Verfahren in jedem Schritt stets vollen Rang?	**ja**
2.	Gilt $F'(x^*)^T F(x^*) = 0$?	**ja**
3.	Welche Konvergenzordnung hat die Gauß-Newton-Methode in aller Regel wenn sie konvergiert?	**1**
4.	Kann ein lokales Minimum für die Gauß-Newton-Methode abstoßend sein?	**ja**
5.	Ist ein lokales Maximum für die Gauß-Newton-Methode immer abstoßend?	**ja**

Verständnisfragenblock 5:

1.	Ist die Auswertung der Funktion xe^x für alle $x \in \mathbb{R}$ gut konditioniert?	**nein**
2.	Stimmt es, dass Störungen der Eingabedaten bei einem schlecht konditionierten Problem kaum ins Gewicht fallen, da hier die durch den Algorithmus verursachten Fehler dominieren?	**nein**
3.	Ist die Funktion $f : (x, y) \mapsto x + y$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gut konditioniert?	**nein**
4.	Kann bei einem stabilen Algorithmus der relative Ausgabefehler viel größer als der relative Eingabefehler sein?	**ja**
5.	Was ist $\kappa_{rel}^{\infty}(5, 3)$ für $f(x, y) = x^2 e^{-y}$?	3

Aufgabe 1
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

1. Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an.
2. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist A positiv definit?
3. Berechnen Sie die Determinante von A. Benutzen Sie dabei die Cholesky-Zerlegung.
4. Es sei nun

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $LDL^Tx = b$. Berechnen Sie dabei weder LD noch DL^T.

6+1+1+3=11 Punkte

Musterlösung

1. Cholesky-Zerlegung

$$\begin{aligned} \text{1.Spalte:} \quad d_{11} &= a_{11} = 3 \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{d_{11}} = -\frac{1}{3} \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{d_{11}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2.Spalte:} \quad d_{22} &= a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3 = \frac{8}{3} \\ l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{\beta - 0}{\frac{8}{3}} = \frac{3\beta}{8} \end{aligned}$$

$$\text{3.Spalte:} \quad d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{32}^2 d_{22} = \alpha - 0 - \left(\frac{3\beta}{8}\right)^2 \cdot \frac{8}{3} = \alpha - \frac{3}{8}\beta^2$$

Somit ergibt sich dann also:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8}\beta & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{3}{8}\beta^2 \end{pmatrix}$$

2. A ist genau dann positiv definit, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind, d.h., genau dann wenn $\alpha > \frac{3}{8}\beta^2$ gilt.
3. $\det A = \det(LDL^T) = \det(D) = 3 \cdot \frac{8}{3} \cdot (\alpha - \frac{3}{8}\beta^2) = 8\alpha - 3\beta^2$
4. Gleichungssystem lösen

L (Vorwärtseinsetzen): $Ax = b \;\Leftrightarrow\; L\underbrace{DL^Tx}_{=:z} = b$. Also $Lz = b \;\Rightarrow\; z = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

D (Diagonale): $D\underbrace{L^Tx}_{=:y} = z$. Also $Dy = z \;\Rightarrow\; y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

L^T (Rückwärtseinsetzen): $L^Tx = y \;\Rightarrow\; x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}, \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die QR-Zerlegung mit Givensrotationen.
2. Bestimmen Sie die Norm des Residuumsvektors.

8+1=9 Punkte

Musterlösung

1. Um den Eintrag $A_{2,1}$ auf Null zu bringen, betrachtet man die Einträge $A_{1,1}$ und $A_{2,1}$. Es ergibt sich:

$$r = \operatorname{sgn}(A_{1,1})\sqrt{3^2+4^2} = 5, c = \frac{A_{1,1}}{r} = \frac{3}{5}, s = \frac{A_{2,1}}{r} = \frac{4}{5}$$

$$G_{1,2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{1,2}A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, G_{1,2}b = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um den Eintrag $(G_{1,2}A)_{3,2}$ auf Null zu bringen, betrachtet man die Einträge $(G_{1,2}A)_{2,2}$ und $(G_{1,2}A)_{3,2}$. Es ergibt sich:

$$r = \operatorname{sgn}((G_{1,2}A)_{2,2})\sqrt{5^2+12^2} = 13, c = \frac{(G_{1,2}A)_{2,2}}{r} = \frac{5}{13}, s = \frac{(G_{1,2}A)_{3,2}}{r} = \frac{12}{13}$$

$$G_{2,3} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & -12 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{2,3}G_{1,2}A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_{2,3}G_{1,2}b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Als Lösung des Systems ergibt sich damit:

$$x_2 = \frac{-1}{13} = \frac{-1}{13} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{5 - (\frac{-1}{13}\cdot 0)}{5} = 1$$

2. Die Norm des Residualvektors ist 5, den Betrag der letzten Komponente von $G_{2,3}G_{1,2}b$.

Aufgabe 3
Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = e^x - x - 2,$$
$$g(x) = -10x - 7.$$

Gesucht ist der Schnittpunkt von f und g.

1. Angenommen, eine Routine $d(h,x)$ zur Berechnung der Ableitung von einer beliebigen Funktion h an der Stelle x sei gegeben. Formulieren Sie für das Newton-Verfahren einen Algorithmus zur Suche des Schnittpunktes, das n Iterationen zu einem vorgegeben Startwert ausführt.
2. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren mit dem Startwert

   $$x_0 = -1.0$$

   im Gebiet $D = [-1, 0]$ konvergiert.
3. Führen sie zwei Iterationen durch.

1+10+2=13 Punkte

Musterlösung

1.
   - Input: x_0, n
   - $h \longleftarrow f - g$
   - For $i = 1, .., n - 1$
   - $\quad x_{i+1} \longleftarrow x_i - h(x_i)/d(h, x_i)$
   - End
   - Return x_n
2. Sei $h(x) := f(x) - g(x) = e^x + 9x + 5$ und $\Phi(x) = x - h(x)/h'(x) = x - (e^x + 9x + 5)/(e^x + 9)$
   - Das Intervall ist abgeschlossen.
   - Selbstabbildung. Suche die Maxima der Funktion $\Phi(x)$

     $$\Phi'(x) = 1 - \frac{(e^x+9)^2 + (e^x + 9x + 5)e^x}{(e^x+9)^2} = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x + 9x + 5) = 0 \Leftrightarrow e^x h(x) = 0$$

     Also $\Phi'(x^*) = 0$ genau für solche x^*, für die gilt $h(x^*) = 0$. Daraus folgt, dass $\Phi(x^*) = x^*$, wenn $h'(x^*) \neq 0$. Offensichtlich ist letzteres nicht wahr, da $h'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

     Falls also die Nullstelle $x^* \in D$ folgt auch, dass $\Phi(x^*) \in D$. Es bleibt nur noch die Intervallsgrenzen zu betrachten.

     $$\Phi(-1.0) \approx -0.61228, \quad \Phi(0.0) = -0.6.$$

     Somit ist die Selbstabbildung gegeben.
   - Kontraktion.

     Da das Intervall konvex ist, benutze das Kriterium aus S. 3.9.

     $$|\Phi'(x)| = \left|1 - \frac{(e^x+9)^2 + (e^x + 9x + 5)e^x}{(e^x+9)^2}\right| = \left|\frac{h(x)e^x}{(h')^2}\right|$$

     Aus obigen Überlegungen (Ableitungen!) wissen wir, dass die Funktionen h und $(h')^2$ monoton sind. Deshalb reicht es in diesem Fall jeweils die Grenzen im Zähler und im Nenner zu betrachten.

     $$h(x)e^x \in [-1.33618, 6], \quad (h')^2 \in [87.75717, 100],$$

     woraus unmittelbar folgt, dass $|\Phi'(x)| < 1$.

   Da alle Voraussetzungen des Banachscen Fixpunktsatzes erfüllt sind, exisitert eine eindeutige Nullstelle im Intervall D.
3.

   $$x_1 = \Phi(-0.5) = -0.612279, \quad x_2 = -0.615591$$

Aufgabe 4
Gegeben sei das Ausgleichsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|Ax-b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^3} \left\| \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14 & -8 & 10 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \\ 10 & -16 & 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2$$

und von der auftretenden Matrix die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösung mit der kleinste 2-Norm sowie die Menge sämtliche Lösungen des Ausgleichsproblems.

11=11 Punkte

Musterlösung Seien

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14 & -8 & 10 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \\ 10 & -16 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir definieren

$$\Sigma^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Pseudoinverse von A ist $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$. Und die Lösung mit der kleinste 2-Norm ist $x^* = V\Sigma^\dagger U^T b$.

$$x^* = \frac{1}{3\sqrt{2}} V\Sigma^\dagger \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} V \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wegen der Struktur von Σ wissen wir, dass A nur einen Rang von 2 hat. Wir wissen auch, dass $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ (die letzte Spalte von V) in der 1-dimensionale Kern von A ist.

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Menge alle Lösungen ist

$$\{x^* + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T | \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

und die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

1. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in Newton-Darstellung.
2. Werten Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit dem Horner-Schema an der Stelle $x = 1$ aus.
3. Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\max\limits_{x\in[x_0,x_2]} |P(f|x_0, x_1, x_2)(x) - f(x)|$ möglichst genau ab.

   Hinweis: Für $\omega(x) := x(x-2)(x-3)$ gilt $\max\limits_{x\in[x_0,x_2]} |w(x)| < \frac{5}{2}$.

4+2+5=11 Punkte

Musterlösung

1. Tableau der dividierten Differenzen:

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i-1}]f$	$[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]f$
0	2	–	–
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{\frac{2}{3}-2}{2-0} = -\frac{2}{3}$	–
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{3-2} = -\frac{1}{6}$	$\frac{-\frac{1}{6}-(-\frac{2}{3})}{3-0} = \frac{1}{6}$

   Das Interpolationspolynom in Newton-Darstellung lautet

$$P(f|0,2,3)(x) = 2 - \frac{2}{3}(x-0) + \frac{1}{6}(x-0)(x-2).$$

2. Wende das Horner-Schema an:

$$\begin{aligned} P(f|0,2,3)(1) &= 2 + (x-0)[-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}(x-2)]_{x=1} \\ &= 2 + (1-0)[-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}(1-2)] \\ &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

3. Schätze den Interpolationsfehler ab:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2}{x+1} \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \\ &\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{-(-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4}{(x+1)^3} \\ &\Rightarrow \quad f'''(x) = \frac{-4\cdot 3\cdot (x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{-12}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

   $|f'''(x)|$ ist monoton fallend auf dem Intervall $I = [0,3]$, also nimmt $|f'''(x)|$ sein Maximum am linken Rand des Intervalls an

$$\max_{x\in I} |f'''(x)| = |f'''(0)| = 12.$$

   Somit gilt also

$$\max_{x\in I} |P(f|x_0,x_1,x_2)(x) - f(x)| \;\leq\; \underbrace{\max_{x\in I} |w(x)|}_{<\frac{5}{2}} \cdot \underbrace{\max_{x\in I} \frac{|f'''(x)|}{3!}}_{=\frac{12}{3!}=2} \;=\; 5.$$