Matr.–Nr.: ☐☐☐☐☐☐ Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik (für Elektrotechniker)

Prof. Dr. Wolfgang Dahmen

16. Februar 2018

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

- Hilfsmittel:
  - dokumentenechtes Schreibgerät (nicht mit Bleistift oder Rotstift schreiben)
  - die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung – bitte mit Name und Matrikelnummer versehen
  - **ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv–Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*. **ACHTUNG:** Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten
- Deckblatt ausfüllen und unterschreiben
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben (Verständnisfragen und 5 Rechenaufgaben)
- Rechnen Sie, falls nicht anders angegeben, mit mindestens 4 signifikanten Ziffern
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten

Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. Sie können Ihre Klausuren am 2. März 2018 in Raum 149 (Hauptgebäude) einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.
Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen, auf dem Befundtatsachen sowie Datum und genaue Uhrzeit der Untersuchung aufgeführt werden. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen und wird von dort an den zuständigen Prüfungsausschuss weitergeleitet. Der Prüfungsausschuss entscheidet über die Anerkennung des Attestes. Bei Feststellung der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung gilt zusätzlich: Aus dem Attest muss sich ergeben, warum die/der Studierende nicht in der Lage war, die Beeinträchtigung früher zu erkennen. Der Prüfungsausschuss entscheidet ggf. unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den unten eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv–Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, PDA, MP3-Player usw. bei mir habe.

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : ____________________

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\sum$:

Verständnisfragen-Teil (25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1: Eine skalare Funktion $f(x)$ soll mittels Interpolation an paarweise verschiedenen Stützstellen im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ durch ein Polynom $p(x)$ approximiert werden.		
1.	Kann man zu gegebenen Stützstellen $\{x_0, \ldots, x_n\}$ das zugehörige Interpolationspolynom durch ein lineares Ausgleichsproblem festlegen?	
2.	Berechnet das Neville-Aitken-Verfahren für einen gegebenen Wert y den Wert $p(y)$, ohne das Polynom $p(x)$ allgemein für beliebige x aufzustellen ?	
3.	Welche Dimension hat der Raum Π_3 der Polynome von höchstens Grad 3 ?	
4.	Stimmt es, dass die Wahl der Stützstellen keinen Einfluss auf den Interpolationsfehler hat?	
5.	Ist das Interpolationspolynom vom Grad n zu den Stützstellen $x_0, ..., x_n$ eindeutig?	

Verständnisfragenblock 2: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.		
1.	Welche Konvergenzordnung hat die Gauß-Newton-Methode in aller Regel wenn sie konvergiert?	
2.	Gilt $F'(x^*)^T F(x^*) = 0$?	
3.	Hat die Systemmatrix des linearen Ausgleichsproblems beim Levenberg-Marquardt-Verfahren in jedem Schritt stets vollen Rang?	
4.	Ist ein lokales Maximum für die Gauß-Newton-Methode immer abstoßend?	
5.	Kann ein lokales Minimum für die Gauß-Newton-Methode abstoßend sein?	

Verständnisfragenblock 3:		
1.	Ist die Nachiteration auch für nicht symmetrisch positiv definite Matrizen sinnvoll?	
2.	Ist das Ziel der Nachiteration die Verbesserung einer nicht exakten Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$?	
3.	Lassen sich mit der Nachiteration die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ mit $\tilde{L}\tilde{R} \approx A$ so verbessern, dass $\|\tilde{L}\tilde{R}-A\|_2$ kleiner wird?	
4.	Das Gleichungssystem $Ax = b$ soll mittels $LR-$Zerlegung gelöst und die so bestimmte Lösung mittels 2 Nachiterationsschritten verbessert werden. Wie viele $LR-$Zerlegungen müssen dazu insgesamt berechnet werden?	
5.	Lassen sich mittels Nachiteration auch Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $\det(A) = 0$ eindeutig lösen?	

Verständnisfragenblock 4: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 2\cos(\frac{x}{3})$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.		
1.	Bestimmen Sie das kleinste $L \in \mathbb{R}$ so, dass $\lvert\Phi(x) - \Phi(y)\rvert \leq L\lvert x - y\rvert$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.	
2.	Es existiert genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.	
3.	Für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lvert x_3 - x^*\rvert \leq \frac{8}{9}\lvert x_1 - x_0\rvert$ für einen Fixpunkt x^* von Φ.	
4.	Sei $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und y^* ein Fixpunkt, d.h. $\Theta(y^*) = y^*$. Gilt dann immer $\lvert\Theta'(y^*)\rvert < 1$?	
5.	Die Fixpunktiteration konvergiert für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.	

Verständnisfragenblock 5:		
1.	Was ist $\kappa_{rel}^{\infty}(5, 3)$ für $f(x, y) = x^2 e^{-y}$?	
2.	Ist die Auswertung der Funktion xe^x für alle $x \in \mathbb{R}$ gut konditioniert?	
3.	Stimmt es, dass Störungen der Eingabedaten bei einem schlecht konditionierten Problem kaum ins Gewicht fallen, da hier die durch den Algorithmus verursachten Fehler dominieren?	
4.	Kann bei einem stabilen Algorithmus der relative Ausgabefehler viel größer als der relative Eingabefehler sein?	
5.	Ist die Funktion $f : (x, y) \mapsto x + y$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gut konditioniert?	

Aufgabe 1

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

1. Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an.
2. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist A positiv definit?
3. Berechnen Sie die Determinante von A. Benutzen Sie dabei die Cholesky-Zerlegung.
4. Es sei nun

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $LDL^T x = b$. Berechnen Sie dabei weder LD noch DL^T.

6+1+1+3=11 Punkte

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}, \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen.
2. Bestimmen Sie die Norm des Residuumsvektors.

8+1=9 Punkte

Aufgabe 3

Gegeben sei die Fixpunktgleichung

$$\Phi(x,y) := \begin{pmatrix} \Phi_1(x,y) \\ \Phi_2(x,y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(y+\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{6}\sin(x)\cos(y-\frac{1}{2})+\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1. Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode für ein Programm, dass die Fixpunktiteration zu einem vorgegeben Startwert n Mal ausführt.
2. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt sind, wenn man die ∞-Norm verwendet.
3. Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.2, 0.9)$ zwei Fixpunktschritte durch.
4. Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.2, 0.9)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der ∞-Norm bis auf einen Fehler von $\epsilon = 10^{-6}$ anzunähern? Nehmen Sie an, dass die Kontraktionskonstante $L = \frac{1}{2}$ ist.

1+8+2+2=13 Punkte

Aufgabe 4

Gegeben sei das Ausgleichsproblem

$$\min_{x\,\in\,\mathbb{R}^3} \|Ax-b\|_2 = \min_{x\,\in\,\mathbb{R}^3} \left\| \begin{pmatrix} 12 & 6 & 8 \\ -8 & 6 & 8 \\ 4 & -3 & -4 \\ -1 & 12 & 16 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 24 \\ -21 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix} \right\|_2$$

und von der auftretenden Matrix die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 12 & -6 & -3 \\ 6 & -8 & -11 & 2 \\ -3 & 4 & -2 & 14 \\ 12 & -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösung mit der kleinste 2-Norm sowie die Menge sämtliche Lösungen des Ausgleichsproblems.

11 Punkte

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Funktion
$$f(x) = \frac{x-2}{x-4}$$
und die Stützstellen $x_0 = 5$, $x_1 = 6$ und $x_2 = 7$.

1. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in Newton-Darstellung.
2. Werten Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit dem Horner-Schema an der Stelle $x = 6.5$ aus.
3. Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\max_{x\in[x_0,x_2]} |P(f|x_0, x_1, x_2)(x) - f(x)|$ möglichst genau ab.

   Hinweis: Für $\omega(x) := (x-5)(x-6)(x-7)$ gilt $\max_{x\in[x_0,x_2]} |w(x)| < \frac{1}{2}$.

4+2+5=11 Punkte