Verständnisfragen-Teil (25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1: Eine skalare Funktion $f(x)$ soll mittels Interpolation an paarweise verschiedenen Stützstellen im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ durch ein Polynom $p(x)$ approximiert werden.		
1.	Kann man zu gegebenen Stützstellen $\{x_0, \ldots, x_n\}$ das zugehörige Interpolationspolynom durch ein lineares Ausgleichsproblem festlegen?	**ja**
2.	Berechnet das Neville-Aitken-Verfahren für einen gegebenen Wert y den Wert $p(y)$, ohne das Polynom $p(x)$ allgemein für beliebige x aufzustellen ?	**ja**
3.	Welche Dimension hat der Raum Π_3 der Polynome von höchstens Grad 3 ?	**4**
4.	Stimmt es, dass die Wahl der Stützstellen keinen Einfluss auf den Interpolationsfehler hat?	**nein**
5.	Ist das Interpolationspolynom vom Grad n zu den Stützstellen $x_0, ..., x_n$ eindeutig?	**ja**

Verständnisfragenblock 2: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.		
1.	Welche Konvergenzordnung hat die Gauß-Newton-Methode in aller Regel wenn sie konvergiert?	**1**
2.	Gilt $F'(x^*)^T F(x^*) = 0$?	**ja**
3.	Hat die Systemmatrix des linearen Ausgleichsproblems beim Levenberg-Marquardt-Verfahren in jedem Schritt stets vollen Rang?	**ja**
4.	Ist ein lokales Maximum für die Gauß-Newton-Methode immer abstoßend?	**ja**
5.	Kann ein lokales Minimum für die Gauß-Newton-Methode abstoßend sein?	**ja**

Verständnisfragenblock 3:		
1.	Ist die Nachiteration auch für nicht symmetrisch positiv definite Matrizen sinnvoll?	**ja**
2.	Ist das Ziel der Nachiteration die Verbesserung einer nicht exakten Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$?	**ja**
3.	Lassen sich mit der Nachiteration die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ mit $\tilde{L}\tilde{R} \approx A$ so verbessern, dass $\|\tilde{L}\tilde{R} - A\|_2$ kleiner wird?	**nein**
4.	Das Gleichungssystem $Ax = b$ soll mittels $LR-$Zerlegung gelöst und die so bestimmte Lösung mittels 2 Nachiterationsschritten verbessert werden. Wie viele $LR-$Zerlegungen müssen dazu insgesamt berechnet werden?	**1**
5.	Lassen sich mittels Nachiteration auch Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $\det(A) = 0$ eindeutig lösen?	**nein**

Verständnisfragenblock 4: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 2\cos(\frac{x}{3})$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Bestimmen Sie das kleinste $L \in \mathbb{R}$ so, dass $\lvert\Phi(x) - \Phi(y)\rvert \leq L\lvert x - y\rvert$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.	$\frac{2}{3} \approx 0.666\ldots$
2.	Es existiert genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.	**ja**
3.	Für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lvert x_3 - x^*\rvert \leq \frac{8}{9}\lvert x_1 - x_0\rvert$ für einen Fixpunkt x^* von Φ.	**ja**
4.	Sei $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und y^* ein Fixpunkt, d.h. $\Theta(y^*) = y^*$. Gilt dann immer $\lvert\Theta'(y^*)\rvert < 1$?	**nein**
5.	Die Fixpunktiteration konvergiert für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.	**ja**

Verständnisfragenblock 5:		
1.	Was ist $\kappa_{rel}^{\infty}(5, 3)$ für $f(x, y) = x^2 e^{-y}$?	3
2.	Ist die Auswertung der Funktion xe^x für alle $x \in \mathbb{R}$ gut konditioniert?	**nein**
3.	Stimmt es, dass Störungen der Eingabedaten bei einem schlecht konditionierten Problem kaum ins Gewicht fallen, da hier die durch den Algorithmus verursachten Fehler dominieren?	**nein**
4.	Kann bei einem stabilen Algorithmus der relative Ausgabefehler viel größer als der relative Eingabefehler sein?	**ja**
5.	Ist die Funktion $f : (x, y) \mapsto x + y$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gut konditioniert?	**nein**

Aufgabe 1

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

1. Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an.
2. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist A positiv definit?
3. Berechnen Sie die Determinante von A. Benutzen Sie dabei die Cholesky-Zerlegung.
4. Es sei nun

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $LDL^T x = b$. Berechnen Sie dabei weder LD noch DL^T.

6+1+1+3=11 Punkte

Musterlösung

1. Cholesky-Zerlegung

$$\begin{aligned}
\text{1.Spalte:} \quad d_{11} &= a_{11} = 1 \\
l_{21} &= \frac{a_{21}}{d_{11}} = \beta \\
l_{31} &= \frac{a_{31}}{d_{11}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{2.Spalte:} \quad d_{22} &= a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = \alpha - \beta^2 \\
l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31} d_{11} l_{21}}{d_{22}} = \frac{1}{\alpha - \beta^2} \quad (\text{d.h. } \alpha \overset{!}{\neq} \beta^2)
\end{aligned}$$

$$\text{3.Spalte:} \quad d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{32}^2 d_{22} = 1 - 0 - \left(\frac{1}{\alpha - \beta^2}\right)^2 \cdot \alpha - \beta^2 = 1 - \frac{1}{\alpha - \beta^2}$$

   Somit ergibt sich dann also:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha-\beta^2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\alpha-\beta^2} \end{pmatrix}$$

2. A ist genau dann positiv definit, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind, d.h., genau dann wenn $\alpha - \beta^2 > 0$ aus $d_{2,2}$ und $\alpha - \beta^2 > 1$ aus $d_{3,3}$ gilt. Insgesamt also $\alpha - \beta^2 > 1$.
3. $\det A = \det(LDL^T) = \det(D) = 1 \cdot (\alpha - \beta^2) \cdot (1 - \frac{1}{\alpha-\beta^2}) = \alpha - \beta^2 - 1$
4. Gleichungssystem lösen

   L (Vorwärtseinsetzen): $Ax = b \;\Leftrightarrow\; L\underbrace{DL^T x}_{=:z} = b$. Also $Lz = b \;\Rightarrow\; z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

   D (Diagonale): $D\underbrace{L^T x}_{=:y} = z$. Also $Dy = z \;\Rightarrow\; y = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

   L^T (Rückwärtseinsetzen): $L^T x = y \;\Rightarrow\; x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min_{x\in\mathbb{R}^2}, \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen.
2. Bestimmen Sie die Norm des Residuumsvektors.

8+1=9 Punkte

Musterlösung

1. Für die erste Spalte ergibt sich (s. Tableau):

$$\alpha_1 = 3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{2}{v_1^T v_1} = \frac{1}{12}$$

$$Q_{v_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[A_1|b_1] = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Für die 2. Spalte:

$$\alpha_2 = 5$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \frac{2}{v_2^T v_2} = \frac{1}{40}$$

$$Q_{v_2} = \begin{pmatrix} -0.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$[A_2|b_2] = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Insgesamt also:

$$[R|Q^T b] = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich $x^* = \begin{pmatrix} -1.8 \\ -2.4 \end{pmatrix}$

2. Die Norm des Residualvektors ist 6, den Betrag der letzten Komponente von $Q^T b$.

Aufgabe 3
Gegeben sei die Fixpunktgleichung

$$\Phi(x,y) := \begin{pmatrix} \Phi_1(x,y) \\ \Phi_2(x,y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(y+\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{6}\sin(x)\cos(y-\frac{1}{2})+\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1. Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode für ein Programm, dass die Fixpunktiteration zu einem vorgegeben Startwert n Mal ausführt.
2. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt sind, wenn man die ∞-Norm verwendet.
3. Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.2, 0.9)$ zwei Fixpunktschritte durch.
4. Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.2, 0.9)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der ∞-Norm bis auf einen Fehler von $\epsilon = 10^{-6}$ anzunähern? Nehmen Sie an, dass die Kontraktionskonstante $L = \frac{1}{2}$ ist.

1+8+2+2=13 Punkte

Musterlösung

1.
   - Input: (x_0, y_0)
   - For $i = 1, .., n-1$
   - $\quad (x_{i+1}, y_{i+1}) \longleftarrow \Phi(x_i, y_i)$
   - End
   - Return (x_n, y_n)
2.
   - D ist abgeschlossen und somit vollständig.
   - Selbstabbildung. $\ln(y + 0.5)$ ist monoton steigend:

     $$\ln(0.5+0.5) = 0 \quad \text{und} \quad 0.5\ln(1+0.5) \approx 0.2027 < 0.25.$$

     Da $\sin(x)$ und $\cos(y-\frac{1}{2})$ auf D nur Werte aus $[0,1]$ annehmen und sin monoton und zudem $\sin(\frac{1}{4}) < \frac{1}{4}$, gilt zudem

     $$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} \leq \frac{1}{6}\sin(x)\cos(y-\frac{1}{2}) + \frac{3}{4} < \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4} = \frac{19}{24} < 1$$

     Also ist Φ selbstabbildend.
   - Kontraktion. Da D konvex ist, rechne

     $$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{1}{y+0.5} \\ \frac{1}{6}\cos(x)\cos(y-\frac{1}{2}) & -\frac{1}{6}\sin(x)\sin(y-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

     Wie oben gilt $\sin(x), \cos(y-1/2) \in [0,1]$

     Deshalb folgt

     $$|\Phi'(x,y)|. \leq . \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \Rightarrow \|F'(x,y)\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$

     (Wobei $|...|.$ komponentenweise Beträge und $\leq .$ komponentenweise $\leq$ bedeutet.)

     Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit $L := 1/2$ erfüllt.
3.
   $$\mathbf{x}^1 = \Phi(0.2, 0.9) = \begin{pmatrix} 0.168236118310606 \\ 0.780497761883331 \end{pmatrix}$$

   $$\mathbf{x}^2 = \Phi(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} 0.123624439405010 \\ 0.776816593273819 \end{pmatrix}$$
4.
   $$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{L^k}{1-L}\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_\infty \overset{!}{\leq} \epsilon = 10^{-6}$$

$$\frac{L^k}{1-L}\|\mathbf{x}^1-\mathbf{x}^0\|_\infty \leq \epsilon \Rightarrow L^k \leq \frac{\epsilon(1-L)}{\|\mathbf{x}^1-\mathbf{x}^0\|}$$

Folglich, da $\log(L) < 0$

$$k \geq \frac{\log\left(\frac{\epsilon(1-L)}{\|\mathbf{x}^1-\mathbf{x}^0\|}\right)}{\log(L)}$$

$$k \geq \frac{\log\left(\frac{10^{-6}(1-0.5)}{0.123651644125223}\right)}{\log(0.5)} = 17.915921896983399,$$

ist nach 18 Iterationen sichergestellt, dass die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Aufgabe 4

Gegeben sei das Ausgleichsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|Ax-b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^3} \left\| \begin{pmatrix} 12 & 6 & 8 \\ -8 & 6 & 8 \\ 4 & -3 & -4 \\ -1 & 12 & 16 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 24 \\ -21 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix} \right\|_2$$

und von der auftretenden Matrix die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 6 & 12 & -6 & -3 \\ 6 & -8 & -11 & 2 \\ -3 & 4 & -2 & 14 \\ 12 & -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösung mit der kleinste 2-Norm sowie die Menge sämtliche Lösungen des Ausgleichsproblems.

11 Punkte

Musterlösung

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 8 \\ -8 & 6 & 8 \\ 4 & -3 & -4 \\ -1 & 12 & 16 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 24 \\ -21 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Pseudoinverse von A ist $A^+ = V\Sigma^+U^T$. Und die Lösung mit der kleinste 2-Norm ist $x^* = V\Sigma^+U^Tb$.

$$x^* = V\Sigma^+ \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}V\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 50 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Wegen der Struktur von Σ wissen wir, dass A den Rang 2 hat. Wir wissen auch, dass $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}^T$ (Vielfaches der letzten Spalte von V) den 1-dimensionalen Kern von A aufspannt.

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Menge alle Lösungen ist

$$\{x^* + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}^T \,|\gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x-2}{x-4}$$

und die Stützstellen $x_0 = 5$, $x_1 = 6$ und $x_2 = 7$.

1. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in Newton-Darstellung.
2. Werten Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit dem Horner-Schema an der Stelle $x = 6.5$ aus.
3. Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\max\limits_{x\in[x_0,x_2]} |P(f|x_0, x_1, x_2)(x) - f(x)|$ möglichst genau ab.

   Hinweis: Für $\omega(x) := (x-5)(x-6)(x-7)$ gilt $\max\limits_{x\in[x_0,x_2]} |w(x)| < \frac{1}{2}$.

4+2+5=11 Punkte

Musterlösung

1. Tableau der dividierten Differenzen:

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i-1}]f$	$[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]f$
5	3	–	–
6	2	$\frac{2-3}{6-5} = -1$	–
7	$\frac{5}{3}$	$\frac{\frac{5}{3}-2}{7-6} = -\frac{1}{3}$	$\frac{-\frac{1}{3}-(-1)}{7-5} = \frac{1}{3}$

   Das Interpolationspolynom in Newton-Darstellung lautet

$$P(f|5,6,7)(x) = 3 - 1(x-5) + \frac{1}{3}(x-5)(x-6).$$

2. Wende das Horner-Schema an:

$$\begin{aligned} P(f|5,6,7)(1) &= 3 + (x-5)[-1 + \frac{1}{3}(x-6)]_{x=6.5} \\ &= 3 + (6.5-5)[-1 + \frac{1}{3}(6.5-6)] \\ &= 3 + \frac{3}{2}[-1 + \frac{1}{6}] \\ &= 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

3. Schätze den Interpolationsfehler ab:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x-2}{x-4} \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{2}{(x-4)^2} \\ &\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{4}{(x-4)^3} \\ &\Rightarrow \quad f'''(x) = \frac{-12}{(x-4)^4} \end{aligned}$$

   $|f'''(x)|$ ist monoton steigend auf dem Intervall $I = [5, 7]$, also nimmt $|f'''(x)|$ sein Maximum am linken Rand des Intervalls an

$$\max_{x\in I} |f'''(x)| = |f'''(5)| = 12.$$

   Somit gilt also

$$\max_{x\in I} |P(f|x_0,x_1,x_2)(x) - f(x)| \leq \underbrace{\max_{x\in I} |w(x)|}_{<\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\max_{x\in I} \frac{|f'''(x)|}{3!}}_{=\frac{12}{3!}=2} = 1.$$