Matr.–Nr.: ☐☐☐☐☐☐ Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik für E-Techniker

Prof. Dr. André Schlichting

Donnerstag 14. Februar 2019

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel:

- **Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.**
- **Höchstens ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv–Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*.
  ACHTUNG: Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : ____________________

Sie haben insgesamt 90 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. **Achtung: Fehlende Begründungen führen zu Punktabzügen!** Sie können Ihre Klausur am **Freitag, den 22. Februar 2019,** im Raum 149 einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko–Blätter.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv-Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, Smartwatch, MP3-Player usw. bei mir habe.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	BP:	$\sum$:

Verständnisfragen-Teil (36 Punkte)

Jeder der 4 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 9 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 7 Punkte; für 8 richtige 5, für 7 richtige 3 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. **Rechenwege werden nicht gewertet.**

Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\mathrm{MAX}}, -x_{\mathrm{MIN}}] \cup [x_{\mathrm{MIN}}, x_{\mathrm{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	In $\mathbb{M}(10, 8, -2, 4)$ gilt: $x_{\mathrm{MIN}} = 0.001$.	
2.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \leq$ eps und $\mathrm{fl}(x) = x + \epsilon$.	
3.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \leq$ eps und $\mathrm{fl}(x) = x(1 + \epsilon)$.	
4.	Die Zahl 0.375 ist in $\mathbb{M}(2, 2, -1, 2)$ exakt darstellbar.	
5.	Geben Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(5, 2, -4, 3)$ als nicht normalisierte Dezimalzahl an.	
6.	In $\mathbb{M}(10, 3, -8, 8)$ gilt $\left\lvert\frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x}\right\rvert = (1 + \varepsilon)x$ mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq 10^{-3}\ \forall x \in \mathbb{D}$.	
7.	Eine gute Kondition eines Problems bewirkt eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur Lösung dieses Problems.	
8.	Die Funktion $f(x, y) = x + y^2$ ist gut konditioniert für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$.	
9.	Die Funktion $f(x, y) = x(3y^2 + 2)$ ist in der Nähe von $(0, 0)$ gut konditioniert.	
10.	Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y\, e^{x^2}$. Geben Sie die relative Konditionszahl κ_{rel} für $x = 4$ und $y = 2$ an.	

VF-2: Es seien $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine untere normierte Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix.

1.	Mit $A = Q\,R$ gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Euklidischen Norm ist.	
2.	Mit $A = Q\,R$ gilt $A^{-1} = R^{-1}Q$.	
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Zerlegung $A = Q\,R$ der Matrix A über Householder-Transformationen ist etwa $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	
4.	Die Zerlegung $A = Q\,R$ der Matrix A sei berechnet über Givens-Transformationen. Dann gilt $Q^{-1} = Q$.	
5.	Es sei $A = \begin{pmatrix} \cos(0.2) & \sin(0.2) \\ -\sin(0.2) & \cos(0.2) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\|A\|_2$.	
6.	Zeilenäquilibrierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.	
7.	Wenn A symmetrisch und positiv definit ist, dann existiert eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$, wobei alle Diagonalelemente von D positiv sind.	
8.	Ist A symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.	
9.	Es sei $A = Q\,R$ eine QR-Zerlegung von A. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$.	
10.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1.7 & -2.1 & 1.2 \\ -1.5 & -1.1 & 1.4 \\ 2.2 & 0.3 & -1.5 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\det(D)$.	

VF-3: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$, $Rang(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien gegeben: Die $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ mit $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q^T b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{(m-n)}$. Zudem sei $x^* = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\arg\min} \|A\,x - b\|_2$ die Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichproblems.

1.	x^* ist Lösung von $A^T A\,x^* = A^T b$.	
2.	Die Matrix $A^T A$ ist symmetrisch positiv definit.	
3.	Der Vektor $A\,x^* - b$ steht senkrecht auf Ax^*.	
4.	Es sei $\tilde{x}^*$ die Lösung des linearen Ausgleichsproblems bei gestörten Daten $\tilde{b}$. Für die Kondition des linearen Ausgleichsproblems bezüglich Störungen in b gilt: $\frac{\|\tilde{x}^*-x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \kappa_2(A)^2 \frac{\|\tilde{b}-b\|_2}{\|b\|_2}$.	
5.	Es sei $\hat{x} = \underset{x\in\mathbb{R}}{\arg\min} \left\| \begin{pmatrix} \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 \\ 6\,x-2 \end{pmatrix} \right\|_2$. Geben Sie $\hat{x}$ an.	
6.	Es gilt $\det R \neq 0$.	
7.	Das Residuum des zugehörigen linearen Ausgleichproblems ist $\|b_1\|_2$.	
8.	Es gilt $\|Ax-b\|_2 = \|Rx - Q^T b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
9.	Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist gegeben durch $x^* = R^{-1}Q^T b$.	
10.	Es sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2\,x-3 \\ 3\,y-2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestimmen Sie für $(x_0,y_0) = (0,0)$ (x_1,y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren und geben Sie x_1 an.	

VF-4: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f\|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ interpoliert.		
1.	Das Polynom $P(f\|x_0, \dots, x_n)$ ist eindeutig.	
2.	Das Verfahren von Neville-Aitken ist eine effiziente Methode zur Bestimmung des Polynoms $P(f\|x_0, \dots, x_n)$.	
3.	Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n, so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.	
4.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.	
5.	Es seien $f(x_0) = 2$ und $f(x_1) = -1$. Berechnen Sie $P(f\|x_0, x_1)(\frac{x_0+x_1}{2})$.	
Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Dazu seien $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ die Newton-Cotes-Quadraturformel mit $a \le x_0 < \dots < x_m \le b$ und $G_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m \tilde{\omega}_j f(\tilde{x}_j)$ die Gauß-Quadraturformel mit $a \le \tilde{x}_0 < \dots < \tilde{x}_m \le b$.		
6.	Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
7.	Die Stützstellen $\tilde{x}_j$ sind bei der Gauß-Quadraturformel äquidistant verteilt.	
8.	Die Gewichte ω_j können bei der Newton-Cotes-Quadraturformel für große m auch negativ werden.	
9.	$G_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{2m+1}$.	
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_1^9 \frac{1}{x}$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel.	

Aufgabe 1 (5+2+4=11 Punkte)
Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & \alpha & -5 \\ -4 & 1 & -16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit einer beliebigen Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von α kann die LR-Zerlegung **ohne Pivotisierung** durchgeführt werden? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie für diese Werte die Zerlegung $A = LR$ und geben Sie L und R explizit in Abhängigkeit von α an.

b) Zeigen Sie unter Verwendung der LR-Zerlegung, dass A für alle solchen Werte von α invertierbar ist.

c) Nun sei $\alpha = 4$, sodass

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und weiterhin sei

$$b = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$ belieblig gegeben. Lösen Sie das lineare Gleichunssystem $Ax = b$ unter Verwendung der LR-Zerlegung und geben Sie die Lösung x in Abhängigkeit von β an.
Achtung: Lösen mit einem anderen Verfahren gibt keine Punkte!

Aufgabe 2 (2+4+3=9 Punkte)

Gegeben sei das Ausgleichsproblem

$$\min_{x\,\in\,\mathbb{R}^3} ||Ax-b||_2 = \min_{x\,\in\,\mathbb{R}^3} \left\| \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 3 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -4 & 4 & 2 \\ -6 & -3 & -6 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \right\|_2 .$$

Es sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung der Matrix A mit

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ von A.
b) Berechnen Sie die Ausgleichslösung mit kleinster 2-Norm.
c) Geben Sie die Menge aller Lösungen des Ausgleichsproblems an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (3+8+3+2=16 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2\,x\,y + 3\,y + 7 &= 0 \\ 2\,x^2 + y^2 - 18 &= 0 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage aller Lösungen mit $y < 0$ verdeutlicht und geben Sie zu allen eine *gute* ganzzahlige Näherung (Toleranz ± 0.5) an.

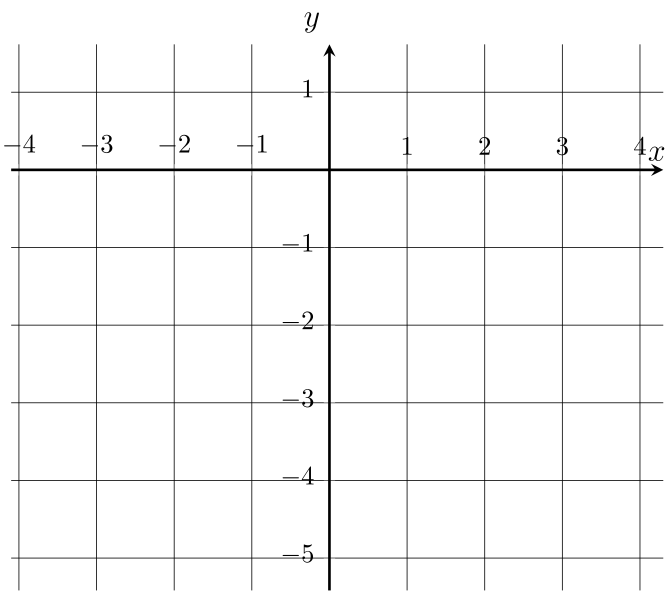
b) Eine Lösung liegt im Bereich $[2,3] \times [-1,0]$. Geben Sie hierfür eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen.

c) Eine weitere Lösung liegt in $[-1,0] \times [-5,-4]$. Für diese ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{7 + 3\,y}{2\,y} \\ -\sqrt{18 - 2\,x^2} \end{pmatrix}$$

eine geeignete Fixpunktiteration mit Kontraktionszahl (bzgl. der 1-Norm) $L = 0.5$. Wieviele Schritte sind ausgehend von dem ganzzahligen Startwert $(x_0, y_0) = (-1, -5)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 2.4 \cdot 10^{-4}$ zu erzielen? Geben Sie einen möglichst kleinen Wert an.

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an.



Aufgabe 4 (2+2+2+2=8 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	2	-3	-1

a) Berechnen Sie die zwei fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$\begin{array}{r|ccccc}
x_0 = -2 & 2 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_1 = 0 & -3 & \rightarrow & -2.5 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_2 = 1 & -1 & \rightarrow & [x_1, x_2]f & \rightarrow & [x_0, x_1, x_2]f
\end{array}$$

b) Stellen Sie für das Interpolationspolynom $p_2(x)$ vom Grad 2 die **Newton-Darstellung** auf und werten Sie diese mittels des **Horner-artigen Schemas** an der Stelle $\hat{x} = -1$ aus.

c) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $|p_2(\hat{x}) - f(\hat{x})|$ an der Stelle $\hat{x} = -1$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen von f gelte: $|f^{(2)}(x)| \leq 0.15$, $|f^{(3)}(x)| \leq 0.75$, $|f^{(4)}(x)| \leq 0.125$, $\forall x \in [-2, 1]$.

d) Die obige Wertetabelle wird um ein weiteres Datenpaar $(x_3, f(x_3)) = (2, 0)$ ergänzt.
Berechnen Sie mit der hinzugenommenen Stützstelle das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 mit dem Newton-Schema und geben Sie dieses in der **Newton-Darstellung** an.