**Matr.–Nr.:** ☐☐☐☐☐☐ Platz–Nr.:

# Klausur zur Numerischen Mathematik für E-Techniker
## Prof. Dr. Benjamin Berkels
## Dienstag 11. Februar 2020

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- **Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.**
- **Höchstens ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv–Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt.*
  **ACHTUNG:** Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

**Benutzter Taschenrechner** (genaue Typenbezeichnung) : ________________________

Sie haben insgesamt 90 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. **Achtung: Fehlende Begründungen führen zu Punktabzügen!** Sie können Ihre Klausur am **Mittwoch, den 11. März 2020,** im Raum 149 einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Bitte geben Sie numerische Endergebnisse in Dezimaldarstellung auf mindestens 5 signifikante Stellen genau an (Brüche sind als Endergebnis also z.B. nicht erlaubt).

*Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko–Blätter.*

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv-Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, Smartwatch, MP3-Player usw. bei mir habe.

**Name:** ________________________

**Vorname:** ________________________

**Unterschrift:** ________________________

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VFr: | A1: | A2: | A3: | A4: | BP: | $\sum$ : |

**Verständnisfragen-Teil** (36 Punkte)

Jeder der 4 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 9 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 7 Punkte; für 8 richtige 5, für 7 richtige 3 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. **Rechenwege werden nicht gewertet.**

**Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge**

**VF-1:** Es seien $x_{\text{MIN}}$ bzw. $x_{\text{MAX}}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | In $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ gilt $\text{eps} = b^{1-m}$. | |
| 2. | Die Zahl $\frac{1}{10}$ ist in $\mathbb{M}(2, 16, -10, 10)$ exakt darstellbar. | |
| 3. | Die Abbildung $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ ist stetig. | |
| 4. | Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl $\epsilon$ mit $\lvert\epsilon\rvert \le \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x(1 + \epsilon)$. | |
| 5. | Geben Sie $x_{\text{MIN}}$ für $\mathbb{M}(2, 10, -2, 2)$ als Dezimalzahl an. | |
| 6. | Zu schlecht konditionierten Problemen gibt es keine stabilen Algorithmen. | |
| 7. | Die Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$ ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gut konditioniert. | |
| 8. | Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert. | |
| 9. | Die Konditionszahl $\kappa_{rel}(x)$ der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$, $x > 0$, ist konstant. | |
| 10. | Berechnen Sie $\kappa_{rel}(1, 2)$ für die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$. | |

**VF-2:** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär und es seien $A = LR_1$ eine LR-Zerlegung von $A$ und $A = QR_2$ eine QR-Zerlegung von $A$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Für die Konditionszahl bezüglich der Euklidischen Norm gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R_1)$. | |
| 2. | Für jede Matrixnorm $\\|\cdot\\|$ gilt $\\|QR_2\\| = \\|R_2\\|$. | |
| 3. | Es sei $Q_v$ die Matrix einer elementaren Householder-Transformation. Dann ist $Q_v$ eine symmetrische Matrix. | |
| 4. | Um $A = QR_2$ mittels Givens-Rotationen zu berechnen, sind maximal $n$ Givens-Rotationen nötig. | |
| 5. | Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Eintrag $B_{1,1}$. | |
| 6. | Für die zeilenäquilibrierte Matrix $B = DA$ gilt $\kappa_\infty(B) \leq \kappa_\infty(A)$. | |
| 7. | Für die Konditionszahl $\kappa(A)$ der Matrix $A$ gilt $\kappa(A^{-1}) = \kappa(A)^{-1}$. | |
| 8. | Ist $A$ symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix $L$ und eine obere Dreiecksmatrix $R$, so dass $A = LR$. | |
| 9. | Wenn $A = QR_2$ über Givens-Rotationen gemäß Vorlesung berechnet wurde, gilt $\det(A) = \det(R_2)$. | |
| 10. | Es seien $\sigma_1 = 5$ der größte und $\sigma_n = 0.2$ der kleinste Singulärwert von $A$. Berechnen Sie $\kappa_2(A)$. | |

**VF-3:** Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$, $\mathrm{R}ang(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien gegeben: Die $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ mit $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und $Q^\top b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{(m-n)}$. Zudem sei $x^* = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\arg\min}\ \|A\,x - b\|_2$ die Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichproblems.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Die Matrix $A^\top A$ ist symmetrisch positiv definit. | |
| 2. | Die Normalgleichung $A^\top Ax = A^\top b$ hat unendlich viele Lösungen. | |
| 3. | Es gilt $\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Q^\top b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. | |
| 4. | Der Vektor $A\,x^*$ steht senkrecht auf $b$. | |
| 5. | Es sei $Q^\top b = (3, 1, 2, -2)$ und $n = 1$. Berechnen Sie das Residuum $\|Ax^* - b\|_2$. | |
| 6. | Es gilt $x^* = (A^\top A)^{-1} A^\top b$. | |
| 7. | Je kleiner der Winkel zwischen $Ax^*$ und $b$, desto besser ist das lineare Ausgleichsproblem konditioniert. | |
| 8. | Es gilt $\|Ax - b\|_2^2 = \|\tilde{R}x - b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. | |
| 9. | Es sei $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die Pseudoinverse von $A$. Dann gilt $x^* = A^+ b$. | |
| 10. | Es seien $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $x^*$. | |

**VF-4:** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad $n$, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert. Außerdem sei $\delta_n$ der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung $n$ von $f$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Es gilt $P(f\|x_0, \ldots, x_n)^{(n)}(x) = n!\delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. | |
| 2. | Es gilt $[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{[x_1,\ldots,x_n]f - [x_0,\ldots,x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$. | |
| 3. | Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation. | |
| 4. | Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ lässt sich $P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x)$ als Konvexkombination der Werte $P(f\|x_1, \ldots, x_n)(x)$ und $P(f\|x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ darstellen. | |
| 5. | Es seien $f(1) = 3$ und $f(3) = 1$. Berechnen Sie $[1, 3]f$. | |

Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll über die $n$-fach summierte Newton-Cotes Formel $I_m^n(f)$ numerisch approximiert werden. Mit $h := \frac{b-a}{n}$ sei die entsprechende Schrittweite bezeichnet.

| | | |
|---|---|---|
| 6. | Für $f(x) = x^3 + 20x^2 + 2x + 11$ gilt $I(f) = I_2^n(f)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. | |
| 7. | Der Fehler $\|I(f) - I_2^n(f)\|$ verhält sich für beliebiges $f \in C^\infty([a, b])$ wie $\mathcal{O}(h^5)$. | |
| 8. | Die Gewichte einer beliebigen Newton-Cotes-Quadraturformel sind stets positiv. | |
| 9. | Es existiert eine Quadraturformel $\int_c^d f(x) \approx (d - c) \sum_{i=0}^2 w_i f(x_i)$, $x_i \in (c, d)$, $w_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$, welche alle Polynome aus $\Pi_5$ exakt integriert. | |
| 10. | Berechnen Sie $I_2^n(f)$ für $f(x) = x^4$, $a = 0$, $b = 2$ und $n = 1$. | |

**Aufgabe 1** (3+1+5=9 Punkte)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ 2\alpha & -1 & -3 \\ \alpha & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{mit} \qquad \alpha \neq 0.$$

a) Berechnen Sie eine LR-Zerlegung ohne Spaltenpivotisierung von $A$, d.h. geben Sie $L$ und $R$ in Abhängigkeit von $\alpha \neq 0$ an, sodass

$$A = LR.$$

b) Berechnen Sie $\det(A)$ in Abhängigkeit von $\alpha \neq 0$.

c) Es sei nun $\alpha \geq 2$.

(i) Zeigen Sie, dass $\kappa_1(A) \leq 20\alpha$ gilt.
**Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\|A^{-1}\|_1 = \frac{4}{\alpha} + 3$ gilt.

(ii) Es sei $b \in \mathbb{R}^3$ und $x$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, sowie $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ mit

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|_1}{\|A\|_1} \leq (8000\alpha)^{-1} \qquad \text{und} \qquad \frac{\|b - \tilde{b}\|_1}{\|b\|_1} \leq (8000\alpha)^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass der durch die Kondition unvermeidbare relative Fehler $\|x - \tilde{x}\|_1 / \|x\|_1$ dann für alle $\alpha \geq 2$ durch $10^{-2}$ abgeschätzt werden kann.

**Aufgabe 2** (3+1+5+3=12 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Ausgleichsproblem: Finde $x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \|Ax - b\|_2$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 12 & -16 \\ 24 & 18 \\ 32 & 24 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 31 \\ 39 \\ 31 \\ 41 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $A = U\Sigma V^\top$ mit

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Singulärwertzerlegung von $A$ ist.

b) Begründen Sie, dass obiges lineares Ausgleichsproblem eindeutig lösbar ist.

c) Berechnen Sie die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^2$ des linearen Ausgleichsproblems unter Verwendung der Singulärwertzerlegung aus a) und berechnen Sie das zugehörige Residuum $\|Ax^* - b\|_2$.

d) Es sei nun $\tilde{b} \in \mathbb{R}^4$ eine gestörte rechte Seite und $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ die Lösung des entsprechend gestörten linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - \tilde{b}\| \to \min$. Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Faktor $C \geq 0$, sodass

$$\frac{\|x^* - \tilde{x}\|_2}{\|x^*\|_2} \leq C \frac{\|b - \tilde{b}\|_2}{\|b\|_2}$$

eine gültige Abschätzung für den durch die Kondition bedingten relativen Fehler in $x^*$ ist.

**Aufgabe 3** (9+4+2=15 Punkte)

Gesucht ist die Lösung $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ des nichtlinearen Gleichungssystems

$$x = \frac{1}{4}\cos(x^2 - y^2)$$
$$y = \frac{1}{4}\sin(x^2 + y^2)$$

a) Zeigen Sie mit dem Fixpunktsatz von Banach, dass genau eine Lösung in $E = [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$ existiert. Verwenden Sie für den Kontraktivitätsbeweis die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

b) Es seien $(x_k, y_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, die Iterierten einer Fixpunktiteration zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Verwenden Sie die **A-priori**-Abschätzung, um die Anzahl der Schritte abzuschätzen, welche höchstens benötigt werden, bis der Fehler kleiner als $10^{-2}$ ist, d.h. bestimmen Sie $k \in \mathbb{N}$ (möglichst klein), sodass

$$\|(x_k, y_k) - (x^*, y^*)\|_\infty < 10^{-2}$$

gilt. Verwenden Sie für die Abschätzung die Kontraktionskonstante $L = \frac{1}{4}$.

c) Berechnen Sie $(x_2, y_2)$ und zeigen Sie, dass der Fehler $\|(x_2, y_2) - (x^*, y^*)\|_\infty$ bereits kleiner als $10^{-2}$ ist.

**Aufgabe 4** (1+1+3+3=8 Punkte)

Für die Funktion $f$ sei die Wertetabelle

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $-1$ | $1$ |

$(i = 0, 1, 2, 3, 4)$

bekannt. Außerdem sei $f$ beliebig oft differenzierbar mit $|f^{(n)}(x)| \leq \pi^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, für $x \in [-2, 2]$.

a) Gegeben sei das Neville-Aitken Schema für die Auswertung von $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ an der Stelle $x = 0.5$:

| $i$ | $x_i$ | $P_{i,0}$ | $P_{i,1}$ | $P_{i,2}$ | $P_{i,3}$ | $P_{i,4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-2$ | 1 | | | | |
| 1 | $-1$ | $-1$ | $-4$ | | | |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 3.5 | | |
| 3 | 1 | $-1$ | 0 | 0.5 | 1 | |
| 4 | 2 | 1 | $-2$ | $-0.5$ | 0 | $\boxed{\phantom{0}}$ |

Bestimmen Sie den fehlenden Wert $P_{4,4}$ im Schema und tragen Sie diesen ins Schema ein.
**Gewertet wird das Ergebnis, welches im Kästchen steht.**

b) Bestimmen Sie $P(f|x_1, x_2, x_3)(0.5)$ anhand des Schemas.

c) Schätzen Sie den Interpolationsfehler

$$|f(0.5) - P(f|x_1, x_2, x_3)(0.5)|$$

bestmöglich ab.

d) Berechnen Sie das Polynom $P(f|x_2, x_3, x_4)$ in der Newtonschen Darstellung mithilfe dividierter Differenzen.