Verständnisfragen-Teil (36 Punkte)

Jeder der 4 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 9 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 7 Punkte; für 8 richtige 5, für 7 richtige 3 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. **Rechenwege werden nicht gewertet.**

Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	In $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ gilt $\text{eps} = b^{1-m}$.	falsch
2.	Die Zahl $\frac{1}{10}$ ist in $\mathbb{M}(2, 16, -10, 10)$ exakt darstellbar.	falsch
3.	Die Abbildung $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ ist stetig.	falsch
4.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \leq \text{eps}$ und $\mathrm{fl}(x) = x(1 + \epsilon)$.	wahr
5.	Geben Sie x_{MIN} für $\mathbb{M}(2, 10, -2, 2)$ als Dezimalzahl an.	**0.125**
6.	Zu schlecht konditionierten Problemen gibt es keine stabilen Algorithmen.	falsch
7.	Die Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$ ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gut konditioniert.	wahr
8.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	falsch
9.	Die Konditionszahl $\kappa_{rel}(x)$ der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$, $x > 0$, ist konstant.	wahr
10.	Berechnen Sie $\kappa_{rel}(1, 2)$ für die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$.	**1.6**

VF-2: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär und es seien $A = LR_1$ eine LR-Zerlegung von A und $A = QR_2$ eine QR-Zerlegung von A.

1.	Für die Konditionszahl bezüglich der Euklidischen Norm gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R_1)$.	falsch
2.	Für jede Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt $\|QR_2\| = \|R_2\|$.	falsch
3.	Es sei Q_v die Matrix einer elementaren Householder-Transformation. Dann ist Q_v eine symmetrische Matrix.	wahr
4.	Um $A = QR_2$ mittels Givens-Rotationen zu berechnen, sind maximal n Givens-Rotationen nötig.	falsch
5.	Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Eintrag $B_{1,1}$.	**-0.4**
6.	Für die zeilenäquilibrierte Matrix $B = DA$ gilt $\kappa_\infty(B) \leq \kappa_\infty(A)$.	wahr
7.	Für die Konditionszahl $\kappa(A)$ der Matrix A gilt $\kappa(A^{-1}) = \kappa(A)^{-1}$.	falsch
8.	Ist A symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.	wahr
9.	Wenn $A = QR_2$ über Givens-Rotationen gemäß Vorlesung berechnet wurde, gilt $\det(A) = \det(R_2)$.	wahr
10.	Es seien $\sigma_1 = 5$ der größte und $\sigma_n = 0.2$ der kleinste Singulärwert von A. Berechnen Sie $\kappa_2(A)$.	**25**

VF-3: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m > n$, $\mathrm{R}ang(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien gegeben: Die QR-Zerlegung $A = QR$ mit $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und $Q^\top b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{(m-n)}$.
Zudem sei $x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min} \|A\,x - b\|_2$ die Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichproblems.

1.	Die Matrix $A^\top A$ ist symmetrisch positiv definit.	wahr
2.	Die Normalgleichung $A^\top Ax = A^\top b$ hat unendlich viele Lösungen.	falsch
3.	Es gilt $\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Q^\top b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	wahr
4.	Der Vektor $A\,x^*$ steht senkrecht auf b.	falsch
5.	Es sei $Q^\top b = (3, 1, 2, -2)$ und $n = 1$. Berechnen Sie das Residuum $\|Ax^* - b\|_2$.	**3**
6.	Es gilt $x^* = (A^\top A)^{-1} A^\top b$.	wahr
7.	Je kleiner der Winkel zwischen Ax^* und b, desto besser ist das lineare Ausgleichsproblem konditioniert.	wahr
8.	Es gilt $\|Ax - b\|_2^2 = \|\tilde{R}x - b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	wahr
9.	Es sei $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die Pseudoinverse von A. Dann gilt $x^* = A^+ b$.	wahr
10.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie x^*.	**0.6**

VF-4: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0,\dots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$ interpoliert. Außerdem sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0,\dots,x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt $P(f\|x_0,\dots,x_n)^{(n)}(x) = n!\delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
2.	Es gilt $[x_0,\dots,x_n]f = \frac{[x_1,\dots,x_n]f-[x_0,\dots,x_{n-1}]f}{x_n-x_0}$.	wahr
3.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.	falsch
4.	Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ lässt sich $P(f\|x_0,\dots,x_n)(x)$ als Konvexkombination der Werte $P(f\|x_1,\dots,x_n)(x)$ und $P(f\|x_0,\dots,x_{n-1})(x)$ darstellen.	wahr
5.	Es seien $f(1) = 3$ und $f(3) = 1$. Berechnen Sie $[1,3]f$.	**-1**

Es sei $f \in C^\infty([a,b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll über die n-fach summierte Newton-Cotes Formel $I_m^n(f)$ numerisch approximiert werden. Mit $h := \frac{b-a}{n}$ sei die entsprechende Schrittweite bezeichnet.

6.	Für $f(x) = x^3 + 20x^2 + 2x + 11$ gilt $I(f) = I_2^n(f)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.	wahr
7.	Der Fehler $\|I(f) - I_2^n(f)\|$ verhält sich für beliebiges $f \in C^\infty([a,b])$ wie $\mathcal{O}(h^5)$.	falsch
8.	Die Gewichte einer beliebigen Newton-Cotes-Quadraturformel sind stets positiv.	falsch
9.	Es existiert eine Quadraturformel $\int_c^d f(x) \approx (d-c)\sum_{i=0}^2 w_i f(x_i)$, $x_i \in (c,d)$, $w_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2$, welche alle Polynome aus Π_5 exakt integriert.	wahr
10.	Berechnen Sie $I_2^n(f)$ für $f(x) = x^4$, $a = 0$, $b = 2$ und $n = 1$.	**6.6667**

Aufgabe 1 (3+1+5=9 Punkte)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ 2\alpha & -1 & -3 \\ \alpha & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{mit} \qquad \alpha \neq 0.$$

a) Berechnen Sie eine LR-Zerlegung ohne Spaltenpivotisierung von A, d.h. geben Sie L und R in Abhängigkeit von $\alpha \neq 0$ an, sodass

$$A = LR.$$

b) Berechnen Sie $\det(A)$ in Abhängigkeit von $\alpha \neq 0$.

c) Es sei nun $\alpha \geq 2$.

(i) Zeigen Sie, dass $\kappa_1(A) \leq 20\alpha$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\|A^{-1}\|_1 = \frac{4}{\alpha} + 3$ gilt.

(ii) Es sei $b \in \mathbb{R}^3$ und x die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, sowie $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Systems $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ mit

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|_1}{\|A\|_1} \leq (8000\alpha)^{-1} \qquad \text{und} \qquad \frac{\|b - \tilde{b}\|_1}{\|b\|_1} \leq (8000\alpha)^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass der durch die Kondition unvermeidbare relative Fehler $\|x - \tilde{x}\|_1 / \|x\|_1$ dann für alle $\alpha \geq 2$ durch 10^{-2} abgeschätzt werden kann.

Musterlösung

a) LR-Zerlegung von A:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ 2\alpha & -1 & -3 \\ \alpha & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

(für Gauß-Algorithmus höchstens 2 Punkte abziehen)

d.h.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

3 Punkte

b) Es gilt

$$\det(A) = \det(L)\det(R) = 1 \cdot \alpha \cdot 1 \cdot 2 = 2\alpha.$$

1 Punkt

c) Ab hier $\alpha \geq 2$:

(i) Es gilt $\kappa_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$, berechne also $\|A\|_1$ (Maximum der Spalten-Betragssummen von A):

$$\|A\|_1 = \max\{4|\alpha|, 4, 6\} \underset{\alpha \geq 2}{=} 4\alpha.$$

Mithilfe des Hinweises folgt $\kappa_1(A) = 16 + 12\alpha \underset{\alpha \geq 2}{\leq} 20\alpha$. **2 Punkte**

(ii) Verwende den Störungssatz

$$r_x \le \frac{\kappa_1(A)}{1-\kappa_1(A)r_A}\,(r_A + r_b)\,, \qquad \text{beachte} \quad \kappa_1(A)r_A \le 20\alpha(8000\alpha)^{-1} = \frac{1}{400} < 1,$$

($\kappa_1(A)r_A < 1$ muss geprüft werden, sonst -1 Punkt)
für lineare Gleichungssysteme mit

$$r_x = \frac{\|x-\tilde{x}\|_1}{\|x\|_1} \qquad \text{und} \qquad r_A = \frac{\|A-\tilde{A}\|_1}{\|A\|_1} \le (8000\alpha)^{-1}, \quad r_b = \frac{\|b-\tilde{b}\|_1}{\|b\|_1} \le (8000\alpha)^{-1},$$

und verwende $\kappa_1(A) \le 20\alpha$ aus (i):

$$r_x \le \frac{20\alpha}{1-20\alpha\cdot(8000\alpha)^{-1}} \cdot 2 \cdot (8000\alpha)^{-1} = \frac{400}{399}\cdot 2 \cdot \frac{1}{400} = \frac{2}{399} \le \frac{2}{200} = 10^{-2}.$$

3 Punkte

Aufgabe 2 (3+1+5+3=12 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Ausgleichsproblem: Finde $x^* = \underset{x\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}}\|Ax-b\|_2$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 12 & -16 \\ 24 & 18 \\ 32 & 24 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 31 \\ 39 \\ 31 \\ 41 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $A = U\Sigma V^\top$ mit

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Singulärwertzerlegung von A ist.

b) Begründen Sie, dass obiges lineares Ausgleichsproblem eindeutig lösbar ist.

c) Berechnen Sie die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^2$ des linearen Ausgleichsproblems unter Verwendung der Singulärwertzerlegung aus a) und berechnen Sie das zugehörige Residuum $\|Ax^* - b\|_2$.

d) Es sei nun $\tilde{b} \in \mathbb{R}^4$ eine gestörte rechte Seite und $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ die Lösung des entsprechend gestörten linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - \tilde{b}\| \to \min$. Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Faktor $C \geq 0$, sodass

$$\frac{\|x^* - \tilde{x}\|_2}{\|x^*\|_2} \leq C\frac{\|b - \tilde{b}\|_2}{\|b\|_2}$$

eine gültige Abschätzung für den durch die Kondition bedingten relativen Fehler in x^* ist.

Musterlösung

a) Ausmultiplizieren von $U\Sigma V^\top$ liefert (Spalten 3, 4 in U stoßen auf Nullzeilen in Σ):

$$U\Sigma V^\top = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 12 & -16 \\ 24 & 18 \\ 32 & 24 \end{pmatrix} = A,$$

(für die Überprüfung $A = U\Sigma V^\top$ höchstens 2 Punkte abziehen)

außerdem sind U, V orthogonale Matrizen und Σ eine Diagonalmatrix. Damit ist $U\Sigma V^\top$ eine Singulärwertzerlegung von A.

3 Punkte

b) Da beide Singulärwerte $\sigma_1 = 50, \sigma_2 = 25$ von Null verschieden sind, ist $\text{Rang}(A) = 2$, d.h. A hat vollen Rang, und somit ist das lineare Ausgleichsproblem eindeutig lösbar. **1 Punkt**

c) Die Lösung x^* des linearen Ausgleichsproblems erhält man mithilfe der Pseudoinversen $A^+ = V\Sigma^+U^\top$ als $x^* = A^+b$, wobei $\Sigma^+ \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $\sigma_1^{-1} = 1/50$, $\sigma_2^{-1} = 1/25$ ist:

(Für die Lösung mittels Normalgleichung gibt es 0 Punkte)

$$x^* = V\Sigma^+ U^\top b = \frac{1}{25^2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 31 \\ 39 \\ 31 \\ 41 \end{pmatrix} = \frac{1}{25^2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 257 \\ -249 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25^2} \begin{pmatrix} 1261 \\ -610.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0176 \\ -0.9768 \end{pmatrix}.$$

3 Punkte

Residuum:

$$\|Ax^* - b\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 12 & -16 \\ 24 & 18 \\ 32 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.0176 \\ -0.9768 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 31 \\ 39 \\ 31 \\ 41 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 29.88 \\ 39.84 \\ 30.84 \\ 41.12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 31 \\ 39 \\ 31 \\ 41 \end{pmatrix} \right\|_2 \tag{1}$$
$$= \sqrt{(-1.12)^2 + 0.84^2 + (-0.16)^2 + 0.12^2} = \sqrt{2} \approx 1.4142$$

2 Punkte

<u>Alternativ:</u> Wegen $\|Ax^* - b\|_2 = \|U\Sigma V^\top V\Sigma^+ U^\top b - b\|_2 = \|\Sigma\Sigma^+ U^\top b - U^\top b\|_2$ *und* $\Sigma\Sigma^\top = \operatorname{diag}(1,1,0,0) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ *lässt sich das Residuum als die Euklidische Norm der letzten beiden Komponenten des Vektors* $U^\top b$ *bestimmen:*

$$U^\top b = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 31 \\ 39 \\ 31 \\ 41 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \left(\begin{array}{c} 257 \\ -249 \\ \hline -1 \\ -7 \end{array} \right), \tag{2}$$

d.h. $\|Ax^* - b\|_2 = \frac{1}{5} \cdot \|(-1,-7)\|_2 = \sqrt{2} \approx 1.4142.$

d) Für die Kondition des linearen Ausgleichsproblems bzgl. Störungen in b gilt:

$$\frac{\|x^* - \tilde{x}\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \underbrace{\frac{\kappa_2(A)}{\cos(\Theta)}}_{=:C} \frac{\|b - \tilde{b}\|_2}{\|b\|_2},$$

wobei Θ der Winkel zwischen Ax^* und b ist. Berechne also $\kappa_2(A)$ und $\cos(\Theta)$:

$$\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_2 = 50/25 = 2$$
$$\cos(\Theta) = \frac{\|Ax^*\|_2}{\|b\|_2} \underset{(??)}{=} \frac{\sqrt{29.88^2 + 39.84^2 + 30.84^2 + 41.12^2}}{\sqrt{31^2 + 39^2 + 31^2 + 41^2}} \geq 0.9998$$
$$\underline{\textit{Alternativ:}}\ \cos(\Theta) = \frac{\|Ax^*\|_2}{\|b\|_2} = \frac{\|U\Sigma V^\top V\Sigma^+ U^\top b\|_2}{\|b\|_2} = \frac{\|\Sigma\Sigma^+ U^\top b\|_2}{\|b\|_2} \underset{(??)}{=} \frac{1}{5}\sqrt{\frac{257^2 + 249^2}{31^2 + 39^2 + 31^2 + 41^2}},$$

d.h.

$$C = \frac{\kappa_2(A)}{\cos(\Theta)} \leq \frac{2}{0.9998} \leq 2.00041, \quad \text{bzw.}$$
$$C = \frac{\kappa_2(A)}{\cos(\Theta)} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{31^2 + 39^2 + 31^2 + 41^2}{257^2 + 249^2}} \leq 2.0004.$$

3 Punkte

Aufgabe 3 (9+4+2=15 Punkte)

Gesucht ist die Lösung $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ des nichtlinearen Gleichungssystems

$$x = \frac{1}{4}\cos(x^2 - y^2)$$
$$y = \frac{1}{4}\sin(x^2 + y^2)$$

a) Zeigen Sie mit dem Fixpunktsatz von Banach, dass genau eine Lösung in $E = [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$ existiert. Verwenden Sie für den Kontraktivitätsbeweis die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

b) Es seien (x_k, y_k), $k = 0, 1, 2, \ldots$, die Iterierten einer Fixpunktiteration zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Verwenden Sie die **A-priori**-Abschätzung, um die Anzahl der Schritte abzuschätzen, welche höchstens benötigt werden, bis der Fehler kleiner als 10^{-2} ist, d.h. bestimmen Sie $k \in \mathbb{N}$ (möglichst klein), sodass

$$\|(x_k, y_k) - (x^*, y^*)\|_\infty < 10^{-2}$$

gilt. Verwenden Sie für die Abschätzung die Kontraktionskonstante $L = \frac{1}{4}$.

c) Berechnen Sie (x_2, y_2) und zeigen Sie, dass der Fehler $\|(x_2, y_2) - (x^*, y^*)\|_\infty$ bereits kleiner als 10^{-2} ist.

Musterlösung

a) Das Gleichungssystem ist eine Fixpunktgleichung $(x, y) = \Phi(x, y)$ mit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert als

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos(x^2 - y^2) \\ \sin(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

$E = [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}] \subset \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen (also vollständig). Zeige also

1. $\Phi(E) \subseteq E$ (Selbstabbildung) und
2. $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty$ für ein $L < 1$ (Kontraktivität).

1 Punkt (Anwendung Banachscher Fixpunktsatz)

Zu 1.: Für $0 \leq x, y \leq \frac{1}{4}$ gilt $z_1 := x^2 - y^2 \in [-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}] \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $z_2 := x^2 + y^2 \in [0, \frac{1}{8}] \subseteq [0, \pi]$ und es ist $0 \leq \cos(z_1) \leq 1$ für $z_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sowie $0 \leq \sin(z_2) \leq 1$ für $z_2 \in [0, \pi]$, d.h.

$$0 \leq \Phi_1(x, y) = \frac{1}{4}\cos(z_1) \leq \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad 0 \leq \Phi_2(x, y) = \frac{1}{4}\sin(z_2) \leq \frac{1}{4},$$

was $\Phi(x, y) \subseteq [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}] = E$ impliziert.

4 Punkte (Selbstabbildung)

(jeweils 1 Punkt pro Abschätzung von $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$, $\cos(\cdots)$, $\sin(\cdots)$)

Zu 2.: Φ ist stetig differenzierbar mit

$$D\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x \cdot \sin(x^2 - y^2) & y \cdot \sin(x^2 - y^2) \\ x \cdot \cos(x^2 + y^2) & y \cdot \cos(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

(für die Berechnung von $D\Phi(x, y)$ höchstens 2 Punkte abziehen)

und $\|D\Phi(x, y)\|_\infty = \frac{1}{2}\max\{(x+y)|\sin(x^2-y^2)|,\ (x+y)|\cos(x^2+y^2)|\} \leq \frac{1}{2}(x+y) \leq \frac{1}{4}$ und E ist konvex.

(Falls „E konvex“ fehlt: −1 Punkt)

Es folgt (Mittelwertsatz), dass Φ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $L = \frac{1}{4}$ ist.

4 Punkte (Kontraktion)

b) Berechne (x_1, y_1) und verwende die **a-priori** Abschätzung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \|(x_k, y_k) - (x^*, y^*)\|_\infty \leq \frac{L^k}{1 - L}\|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)\|_\infty = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot 0.25 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}.$$

Wenn k so gewählt wird, dass $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} < 10^{-2}$ gilt, ist die geforderte Fehlerschranke also erfüllt:

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} < 10^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{\log(\frac{3}{4}\cdot 10^{-2})}{\log(\frac{1}{4})} - 1 = 2.5\ldots,$$

d.h. ab $k = 3$ ist die Fehlerschranke erfüllt. **4 Punkte**

c)

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos(x_1^2 - y_1^2) \\ \sin(x_1^2 + y_1^2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.24951 \\ 0.015615 \end{pmatrix}.$$

Die **a-posteriori** Abschätzung liefert:

$$\|(x_2, y_2) - (x^*, y^*)\|_\infty \le \frac{L}{1-L}\|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\|_\infty \le \frac{1}{3}\cdot 0.016 \le 0.0054 \le 10^{-2}.$$

2 Punkte

Aufgabe 4 (1+1+3+3=8 Punkte)

Für die Funktion f sei die Wertetabelle

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	-1	1	-1	1

$(i = 0, 1, 2, 3, 4)$

bekannt. Außerdem sei f beliebig oft differenzierbar mit $|f^{(n)}(x)| \le \pi^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, für $x \in [-2, 2]$.

a) Gegeben sei das Neville-Aitken Schema für die Auswertung von $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ an der Stelle $x = 0.5$:

i	x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$P_{i,3}$	$P_{i,4}$
0	-2	1				
1	-1	-1	-4			
2	0	1	2	3.5		
3	1	-1	0	0.5	1	
4	2	1	-2	-0.5	0	$\boxed{}$

Bestimmen Sie den fehlenden Wert $P_{4,4}$ im Schema und tragen Sie diesen ins Schema ein.
Gewertet wird das Ergebnis, welches im Kästchen steht.

b) Bestimmen Sie $P(f|x_1, x_2, x_3)(0.5)$ anhand des Schemas.

c) Schätzen Sie den Interpolationsfehler

$$|f(0.5) - P(f|x_1, x_2, x_3)(0.5)|$$

bestmöglich ab.

d) Berechnen Sie das Polynom $P(f|x_2, x_3, x_4)$ in der Newtonschen Darstellung mithilfe dividierter Differenzen.

Musterlösung

a) $P_{4,4} = P_{4,3} + \frac{0.5-x_4}{x_4-x_0}(P_{4,3} - P_{3,3}) = 0 + \frac{0.5-2}{2-(-2)}(0-1) = \boxed{0.375}$ *(muss oben im Kästchen stehen.)* **1 Punkt**

b) Das Schema enthält das Neville-Aitken Schema für $P(f|x_1, x_2, x_3)(0.5) = P_{3,2} = 0.5$. **1 Punkt**

i	x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$P_{i,3}$	$P_{i,4}$
0	-2	1				
1	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-1}$	-4			
2	**0**	**1**	**2**	3.5		
3	**1**	$\mathbf{-1}$	**0**	$\boxed{\mathbf{0.5}}$	1	
4	2	1	-2	-0.5	0	0.375

c) Mithilfe der Restglieddarstellung ($\xi \in [x_1, x_3] = [-1, 1] \subseteq [-2, 2]$) und $|f^{(3)}(\xi)| \le \pi^3$:

$$|f(0.5) - P(f|x_1, x_2, x_3)(0.5)| = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\right| \cdot |0.5 - x_1| \cdot |0.5 - x_2| \cdot |0.5 - x_3| \le \frac{\pi^3}{3!} \cdot 1.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \le 1.9379$$

3 Punkte

d) Dividierte Differenzen für $P(f|x_2, x_3, x_4)$:

i	x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_2, x_3, x_4]f$
2	0	1		
			-2	
3	1	-1		2
			2	
4	2	1		

2 Punkte

Folglich ist $P(f|x_2, x_3, x_4) = [x_2]f + [x_2, x_3]f \cdot x + [x_2, x_3, x_4]f \cdot x(x-1) = 1 - 2x + 2x(x-1).$ **1 Punkt**