Verständnisfragen-Teil (32 Punkte)

Es gibt zu jeder der 8 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit "wahr" bzw. "falsch" zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 1.0 Punkte.

Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1:		
1.	Die Addition zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.	
2.	Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur Lösung dieses Problems.	
3.	Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist gut konditioniert für $x \to \infty$.	
4.	Die Funktion $f(x, y) = xe^{4y^2}$ ist gut konditioniert für alle (x, y) mit $x^2 + y^2 \leq 0.1$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber mit $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.		
1.	Sei $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich $\|\cdot\|$. Es gilt $\|x - \tilde{x}\| \leq \kappa(A)\|b - \tilde{b}\|$.	
2.	Zeilenäquilibrierung verbessert die Kondition der Matrix A bezüglich der 2-Norm.	
3.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung $A = LR$ von A.	
4.	Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann mit dem Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung stabil berechnet werden.	

VF-3: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $G_1, \ldots, G_k$ Givens-Rotationen, so dass $G_k \ldots G_2 G_1 A = R$, mit einer oberen Dreiecksmatrix R.		
1.	Die Produktmatrix $G_k \ldots G_1$ ist orthogonal.	
2.	Die Produktmatrix $G_k \ldots G_1$ ist symmetrisch.	
3.	Die Matrizen G_i, $1 \leq i \leq k$, haben die Dimension $n \times m$.	
4.	Sei $m = n$ und $\det(A) \neq 0$. Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$, wobei $\kappa_2(.)$ die Konditionszahl bez"uglich der euklidischen Norm ist.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.		
1.	Der Vektor $Ax^\star$ steht senkrecht auf b.	
2.	$\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Es gilt $A^T A x^\star = b$.	
4.	Die Matrix R kann man über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.	

VF-5: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $U^T AV = \Sigma$ die Singulärwertzerlegung von A mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots \sigma_p = 0$, $p = \min\{m, n\}$. Die Matrix U hat Spalten u_i, $i = 1, \ldots, m$, und die Matrix V hat Spalten v_i, $i = 1, \ldots, n$.		
1.	U und V sind orthogonale Matrizen.	
2.	Es gilt $\mathrm{Rang}(A) = p$.	
3.	Es gilt $Av_i = \sigma_i u_i$, $i = 1, \ldots, p$.	
4.	Sei $m = n$ und $\det(A) \neq 0$. Es gilt $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$.	

VF-6: Sei $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ ein Fixpunktverfahren zur Bestimmung eines Fixpunktes $x^\star = \Phi(x^\star)$.		
1.	Das Sekantenverfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
2.	Das Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
3.	Fixpunktverfahren konvergieren immer für Startwerte aus einer hinreichend kleinen Umgebung des Fixpunktes.	
4.	Falls $\|\Phi'(x^\star)\| > 1$, so existiert kein $x_0 \neq x^\star$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star$.	

VF-7: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.		
1.	In jeder Iteration der Gauß-Newton-Methode ergibt sich ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	
2.	Die Gauß-Newton-Methode ist ein Fixpunktverfahren.	
3.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, ist die Konvergenzordnung in der Regel 1.	
4.	In jeder Iteration der Levenberg-Marquardt-Methode ergibt sich ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	

VF-8: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt: $P(\Phi\mid x_0, \ldots, x_n) = \Phi$ für alle Polynome Φ vom Grad n.	
2.	Es gilt $\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
3.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\|$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	
4.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\|$ wird für hinreichend großes n beliebig klein.	

Numerik ET H12

Aufgabe 1 (6+2+4+4=16 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 2.8 & -0.7 \\ 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ -0.4 & 0.0 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 3.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung (Skalierung nicht nötig). Geben Sie die LR-Zerlegung und alle in ihr auftretenden Matrizen explizit an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung die Determinante von A.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

d) Betrachten Sie nun das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Wie groß darf der relative Fehler $\|b - \tilde{b}\|_\infty / \|b\|_\infty$ höchstens sein, damit der relative Fehler $\|x - \tilde{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$ nicht größer als 0.05 ist? (**Hinweis:** Es gilt $||A^{-1}||_\infty \approx 2.604$)

Numerik ET H12

Aufgabe 2 (2+8+3+3=16 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x &= \sin(x+y), \\ 4y &= \cos(x-y) \end{aligned} \qquad \text{auf } B = \{(x,y):\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

1. Skizzieren Sie B.
2. Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass dieses Gleichungssystem auf B genau eine Lösung x^* besitzt. Verwenden Sie für den Kontraktivitätsbeweis die $||.||_\infty$-Norm.
3. Führen Sie einen Schritt der entsprechenden Fixpunktiteration mit dem Startwert $(0.7, -0.2)^T$ aus und geben Sie an, wie viele Schritte höchstens notwendig sind, um die Lösung mit der Genauigkeit $\epsilon = 10^{-4}$, gemessen in der $||.||_\infty$-Norm, zu approximieren.
4. Führen Sie zwei weitere Schritte der entsprechenden Fixpunktiteration aus und geben Sie eine möglichst gute Abschätzung für Ihre Lösung $(x_3, y_3)^T$ in der $||.||_\infty$-Norm an.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei die Ebene

$$E \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Gesucht ist der Punkt x^* der Ebene E, welcher den kürzesten Abstand zu $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ in der euklidischen Norm hat.

1. Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem.
2. Hat das unter a) formulierte Ausgleichsproblem eine eindeutige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Lösen Sie das unter a) formulierte Ausgleichsproblem durch Anwendung von Householder-Transformationen.
4. Geben Sie den Abstand zwischen x^* und y an.

Numerik ET H12