Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 6 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit "wahr" bzw. "falsch" zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 1.0 Punkte.
Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1:		
1.	Ist ein Problem gut konditioniert, so sind Algorithmen zu seiner Lösung stets stabil.	
2.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der relative Ausgabefehler von der selben Größenordnung wie der relative Eingabefehler.	
3.	Die relative Kondition der Funktion $f(x,y) = x/y$ ist gut für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$.	
4.	Die relative Konditionszahl der Funktion $f(x) = e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch $\kappa_{rel}(x) = x$.	

VF-2: Mit $A, L, R, P, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien R bzw. L eine rechte obere bzw. normierte linke untere Dreiecksmatrix, P eine Permutationsmatrix und D eine reguläre Diagonalmatrix.		
1.	Ist A regulär, so existiert stets eine $L\,R$–Zerlegung mit Permutationsmatrix P, so dass $P\,A = L\,R$ gilt.	
2.	Ist A regulär, so existiert stets eine $L\,R$–Zerlegung mit Permutationsmatrix P, so dass $P\,D\,A = L\,R$ gilt.	
3.	Aus $P\,D\,A = L\,R$ folgt, dass A genau dann positiv definit ist, wenn A symmetrisch ist und alle Diagonalelemente von D positiv sind.	
4.	Beschreibt die Diagonalmatrix D eine Zeilenäquilibrierung, so folgt aus $B := D\,A$ die Ungleichung $\kappa_\infty(B) \geq \kappa_\infty(A)$ für die Konditionszahlen von A und B bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.	

VF-3: Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ betrachten wir das lineare Ausgleichsproblem: bestimme x^* mit minimaler 2-Norm so, dass $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$.		
1.	Es sei $A = U \Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von A. Ist A regulär, so gilt $A^{-1} = V \Sigma^+ U^T$.	
2.	Es seien σ_1 der größte und σ_r der kleinste (positive) Singulärwert von A. Dann gilt: $\|A\|_2 = \sigma_1/\sigma_r$.	
3.	Die Lösung x^* des linearen Ausgleichsproblems mit minimaler 2-Norm ist immer eindeutig.	
4.	Es seien $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale Matrizen. Dann haben A und $Q_1\,A\,Q_2$ die selben Singulärwerte.	

VF-4: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.		
1.	Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann existiert in [a, b] genau eine Nullstelle von f.	
2.	Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann gilt zu dem Startwert $x_0 = a$ für alle Iterationswerte x_i des Newton-Verfahrens $x_i \geq a$.	
3.	Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ sowie $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = b$ eine monoton fallende Folge.	
4.	Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann konvergiert die Bisektion stets schneller als das Sekantenverfahren, da sie den Einschluss der Nullstelle garantiert.	

VF-5: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.		
1.	Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Falls $F'(x)$ Rang n hat, so ist $F'(x)^T F'(x)$ symmetrisch positiv definit.	
2.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, so ist die Konvergenzordnung in der Regel 1.	
3.	Es gilt $F'(x^*)^T F(x^*) = 0$.	
4.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat die Systemmatrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.	

VF-6: Es sei $I := \int_c^d f(x)\,dx$, $h := d - c$, $m > 0$ und $x_j = c + \frac{j\,h}{m}$ für $j = 0, \ldots, m$. Wir definieren $I_m(f) := \int_c^d P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$ wobei $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_m))$ mit $x_0 < \ldots < x_m$ ist.		
1.	$I_m(f)$ definiert die Gauß-Quadratur zur Approximation von I.	
2.	$I_2(f) = \frac{h}{6}\big(f(c) + 4f(\frac{d+c}{2}) + f(d)\big)$.	
3.	Für alle m gilt: $I_m(f) = \sum_{i=0}^m w_i\, f(x_i)$ mit $w_i \geq 0$.	
4.	$I_m(x^k) = \int_c^d x^k\,dx$ für alle $k = 0, \ldots, m$.	

Aufgabe 1
Gegeben seien die Werte

$$\begin{array}{c||ccc} x_i & 1 & 4 & 8 \\ \hline y_i & -\frac{3}{4} & 3 & 6 \end{array}.$$

Eine Kurve $f(x) = \alpha\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) + \beta\left(x + 3 - \frac{5}{28}(x-1)(x-4)\right)$ soll durch Wahl von α und β derart an die Werte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ angepasst werden, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal ist.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem auf.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Householder-Spiegelungen. Geben Sie die Funktion $f(x)$ und die 2-Norm des Residuums explizit an.

c) Bestimmen Sie eine Rotationsmatrix $G \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $r \in \mathbb{R}$, so dass

$$G \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2+11+3=16 Punkte

Aufgabe 2

a) Gesucht sind die Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\cos(y) - 2x + 2 = 0$$
$$y^2 - \frac{71}{10}y + x + \frac{3}{10} = 0\,.$$

(i) Eine Lösung liegt im Bereich $D_1 = [0,2] \times [5,10]$. Formen Sie hierfür das Gleichungssystem in eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung um. Weisen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (mit der ∞-Norm) nach.

(ii) Die zweite Lösung des Gleichungssystems liegt im Bereich $D_2 = [0,2] \times [0,2]$. Hierfür ist eine geeignete Fixpunktgleichung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(y)}{2} + 1 \\ \frac{10}{71}y^2 + \frac{10}{71}x + \frac{3}{71} \end{pmatrix} =: \Phi(x,y)$$

Die Kontraktionskonstante der Fixpunktabbildung Φ auf D_2 ist $L = \frac{50}{71}$. Wie viele Iterationen sind mit dem Fixpunktverfahren für den Startwert $(x_0, y_0) = (1,1)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit von $\epsilon = 0.01$ in der ∞-Norm zu erreichen? Führen Sie den ersten Schritt durch. Welche Genauigkeit hat die so bestimmte Näherungslösung?

(iii) Verbessern Sie die in (ii) bestimmte Näherung mittels eines Schrittes des Newton-Verfahrens. Führen Sie dann einen weiteren Schritt des Fixpunktverfahrens durch und geben Sie eine a-posteriori Fehlerabschätzung an.

b) Gesucht ist eine Näherung der Nullstelle der Funktion

$$g(x) = \exp(x) + x^2 - 3$$

im Intervall $[0,2]$. Zeigen Sie, dass $g(x)$ im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle hat. Wie viele Schritte des Bisektionsverfahrens mit Startwerten $a_0 = 0, b_0 = 2$ müssen durchgeführt werden, um eine Genauigkeit von $\epsilon = 0.01$ zu erreichen? Führen Sie die ersten zwei Schritte durch. Welche Genauigkeit hat die so bestimmte Näherungslösung?

18+7=25 Punkte

Aufgabe 3

a) Die Funktion $f(x) = \cos(2\pi x)$ soll mithilfe eines Interpolationspolynoms vom Grad ≤ 3 an der Stelle 0.15 ausgewertet werden. Benutzen Sie dazu das Neville-Aitken-Schema und wählen Sie aus der folgenden Tabelle 4 Stützstellen die einen möglichst kleinen Fehler ergeben. Begründen Sie Ihre Wahl.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1	0.80902	0.30902	-0.30902	-0.80902	-1

Geben Sie außerdem eine Abschätzung für den Interpolationsfehler im Punkt 0.15 an, ohne $f(0.15)$ explizit auszurechnen.

b) Gesucht ist das Polynom zweiten Grades

$$p(x) = a + bx + cx^2 \qquad \textit{mit} \qquad p(50) = 100\,, \quad p(51) = 0\,, \quad p(52) = -102\,.$$

In der klassischen Monombasis führt dies auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 50 & 2500 \\ 1 & 51 & 2601 \\ 1 & 52 & 2704 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ -102 \end{pmatrix}.$$

Angenommen, die rechte Seite ist mit einem absoluten Fehler von 0.5 in der ∞-Norm behaftet. Schätzen Sie den relativen Fehler in den Koeffizienten $(a, b, c)^T$ in der ∞-Norm ab.
Hinweis: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 50 & 2500 \\ 1 & 51 & 2601 \\ 1 & 52 & 2704 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1326 & -2600 & 1275 \\ -\frac{103}{2} & 102 & -\frac{101}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, warum es ungünstig ist, das Polynom auf diese Weise zu bestimmen, und nennen Sie eine bessere Alternative.

10+5=15 Punkte