

Matr.-Nr.:

Platz-Nr.:

## Klausur zur Numerischen Mathematik (für Elektrotechniker)

Prof. Dr. Wolfgang Dahmen

Donnerstag, 4. August 2016

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

- Hilfsmittel:
  - dokumentenechtes Schreibgerät (nicht mit Bleistift oder Rotstift schreiben)
  - die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung – bitte mit Name und Matrikelnummer versehen
  - ein Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der “Positiv-Liste” steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*. **ACHTUNG:** Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten
- Deckblatt ausfüllen und unterschreiben
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben (Verständnisfragen und 5 Rechenaufgaben)
- Rechnen Sie, falls nicht anders angegeben, mit mindestens 4 signifikanten Ziffern
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten

Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. Sie können Ihre Klausuren am 15. August 2016 in Raum 149 (Hauptgebäude) einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen, auf dem Befundtatsachen sowie Datum und genaue Uhrzeit der Untersuchung aufgeführt werden. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen und wird von dort an den zuständigen Prüfungsausschuss weitergeleitet. Der Prüfungsausschuss entscheidet über die Anerkennung des Attestes. Bei Feststellung der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung gilt zusätzlich: Aus dem Attest muss sich ergeben, warum die/der Studierende nicht in der Lage war, die Beeinträchtigung früher zu erkennen. Der Prüfungsausschuss entscheidet ggf. unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den unten eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der “Positiv-Liste” befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, PDA, MP3-Player usw. bei mir habe.

Benutzer Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : \_\_\_\_\_

Name: \_\_\_\_\_

Vorname: \_\_\_\_\_

Unterschrift: \_\_\_\_\_

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\Sigma$ :
------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------------

**Verständnisfragen-Teil**

(25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

<b>Verständnisfragenblock 1:</b> Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$ .	
1.	Ist $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$ ?
2.	Der Aufwand für die Berechnung über die Lagrange-Darstellung ist $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen.
3.	Was ist $P(Q \mid x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6)(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 1$ für $Q = 7x^2 - 1$ ?
4.	Ist $P(g \mid x_0, \dots, x_n) = g$ für alle Polynome $g$ ?
5.	Wird der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]}  P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) $ für wachsendes $n$ immer kleiner?

<b>Verständnisfragenblock 2:</b> Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , mit $\text{Rang}(A) = n \leq m$ , und $b \in \mathbb{R}^m$ . Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $A = QR$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2$ .	
1.	Ist $\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Q^T b\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ?
2.	Kann die Matrix $R$ durch Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmt werden?
3.	Ist die Matrix $AA^T$ immer symmetrisch positiv definit?
4.	Sei $\kappa_2(A) = 4$ . Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems über Normalgleichungen muss ein Gleichungssystem der Form $Mx = f$ gelöst werden. Was ist $\kappa_2(M)$ ?
5.	Steht der Vektor $Ax^*$ stets senkrecht auf $b$ ?

<b>Verständnisfragenblock 3:</b> Es seien $A, B, P, L, R, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $P$ Permutationsmatrix, $R$ obere Dreiecksmatrix, $L$ normierte untere Dreiecksmatrix und $D$ Diagonalmatrix.	
1.	Sei $A = LDL^T$ . Ist dann stets $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$ ?
2.	Es seien $A, B$ symmetrisch positiv definit. Ist dann $A + B$ immer symmetrisch positiv definit?
3.	Existiert für $A$ symmetrisch positiv definit stets eine $LR$ -Zerlegung $A = LR$ ?
4.	Sei $A$ regulär. Existiert dann stets eine $LDL^T$ -Zerlegung, so dass $A = LDL^T$ ?
5.	Es sei $\kappa_2(A) = 5$ und $PA = LR$ . Was ist $\kappa_2(P)$ ?

<b>Verständnisfragenblock 4:</b> Wir betrachten Nullstellenprobleme.	
1.	Beim Sekantenverfahren wird die Steigung der Funktion durch einen Differenzenquotienten approximiert.
2.	Ist die Newton-Methode immer global quadratisch konvergent?
3.	Für eine quadratische Funktion liefert das Newton-Verfahren für beliebige Startwerte die Lösung nach einer Iteration
4.	Wie viele LR-Zerlegungen müssen für die Durchführungen von 4 Schritten des Newton-Verfahrens (für Systeme) berechnet werden, wenn alle auftretenden Gleichungssysteme mittels LR-Zerlegung gelöst werden?
5.	Das vereinfachte Newtonverfahren benötigt keine Ableitungen.

<b>Verständnisfragenblock 5:</b> Es seien $x_{\text{MIN}}$ bzw. $x_{\text{MAX}}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie $\text{eps}$ die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$ . Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.	
1.	Was ist $x_{\text{MAX}}$ in $\mathbb{M}(7, 2, -1, 2)$ ?
2.	Was ist $x_{\text{MIN}}$ in $\mathbb{M}(7, 2, -1, 2)$ ?
3.	Was ist die relative Konditionszahl $\kappa_{\text{rel}}(x)$ für die Auswertung der Funktion $f(x) = x^2 - 1$ an der Stelle $x = 0.9$ ?
4.	Ist die Zahl $\frac{1}{8}$ in $\mathbb{M}(2, 32, -99, 99)$ exakt darstellbar?
5.	Gilt für alle $x \in \mathbb{D}$ , dass $ \text{fl}(x) - x  \leq \text{eps}  x $ ?

**Aufgabe 1**

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

und eine rechte Seite

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Wir betrachten für  $0 < \varepsilon < 1$  eine Störung von  $A$ ,

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

1. Berechnen Sie die Lösung  $x_\varepsilon$  des gestörten Gleichungssystems  $A_\varepsilon x_\varepsilon = b$  und die Lösung  $x$  des exakten Gleichungssystems  $A_0 x = b$  sowie die Konditionszahl  $\kappa_\infty(A_\varepsilon)$ .
2. Wie lautet der Satz, der bei exakter rechter Seite eine Abschätzung des relativen Fehlers der Lösung,  $\frac{\|x_\varepsilon - x\|}{\|x\|}$ , liefert?
3. Geben Sie alle Werte von  $\varepsilon > 0$  an, für die man diesen Satz anwenden kann?
4. Schätzen Sie den relativen Fehler der Lösung des Gleichungssystems  $A_\varepsilon x_\varepsilon = b$  in der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm unter den Annahme, dass die rechte Seite  $b$  exakt gegeben ist, ab.

**3+1+2+4=10 Punkte**

NAME:

MATR:

---

**Aufgabe 2**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. Berechnen Sie die LR-Zerlegung von  $A$  mit Spaltenpivotisierung und *ohne* Äquilibration. Geben Sie  $L$ ,  $R$  und die Permutationsmatrix  $P$  explizit an.
2. Lösen Sie das System mit Hilfe der LR-Zerlegung.
3. Berechnen Sie die Determinante von  $A$  mit Hilfe der LR-Zerlegung.
4. Wir betrachten  $A$  jetzt als eine Störung von einer Matrix  $A_U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Das ungestörte Problem lautet: Finde  $x_U$  sodass  $A_U x_U = b$  gilt. Sei  $x$  die Lösung des gestörten Problems  $Ax = b$  und  $r := b - A_U x$  das Residuum. Wir betrachten  $x$  als eine Approximation von  $x_U$  und wollen diese Approximation durch einen Nachiterationsschritt verbessern. Wie lautet das Gleichungssystem, das man dazu lösen muss, und wie wird die verbesserte Approximation berechnet?

**4+3+1+3=11 Punkte**

NAME:

MATR:

---

**Aufgabe 3**

Gesucht sei der Fixpunkt der Funktion

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^3+y^3}{12} + \frac{1}{2} \\ \frac{x^3-y^3}{12} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode für ein Programm, das die Fixpunktiteration zu einem vorgegeben Startwert  $n$  Mal ausführt.
2. Zeigen Sie, dass die Funktion genau ein Fixpunkt in dem Gebiet  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  hat.
3. Berechnen Sie zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens ausgehend von dem Startvektor  $(1/2, 1/2)^T$ .
4. Wieviel Schritte des Fixpunktverfahrens genügen, um eine Lösung mit der Genauigkeit von  $10^{-8}$  zu erhalten?

**Hinweis:** Verwenden Sie die  $\infty$ -Norm. Sollten Sie in Teil 2) kein  $L$  herausgefunden haben, so verwenden Sie  $L = 1/2$  in Teil 4.)

**1+7+2+2=12 Punkte**

NAME:

MATR:

---

**Aufgabe 4**

1. Gegeben seien folgende Stützstellen  $t_i$  und Messwerte  $f_i$

$$\begin{array}{c|c|c|c} t_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta + t}.$$

genügen. Die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  sollen optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem.

2. Das nichtlineare Ausgleichsproblem soll jetzt über das Gauß-Newton-Verfahren gelöst werden. Seien  $(\alpha_k, \beta_k)$  die Werte der  $k$ -ten Iterierten. Bestimmen Sie das lineare Ausgleichsproblem, das im  $k$ -te Schritt des Verfahrens gelöst werden muss.
3. Gegeben sei nun das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^2}, \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 0 & 144 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die  $QR$ -Zerlegung mit Givensrotationen.

**2+3+8=13 Punkte**

*NAME:*

*MATR:*

---

**Aufgabe 5**

Der Teilraum  $U \subset \mathbb{R}^4$  sei gegeben durch

$$U = \text{span}\{\phi_1, \phi_2\} \quad \text{mit} \quad \phi_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass  $\phi_1, \phi_2$  bezüglich des Standardskalarprodukts

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \sum_{j=1}^4 v_j w_j,$$

eine Orthonormalbasis von  $U$  bilden.

b) Sei  $v = (2, 2, 1, 1)^T$ . Bestimmen Sie  $u^* \in U$  mit

$$\|u^* - v\|_2 = \min_{u \in U} \|u - v\|_2.$$

**4+5 = 9 Punkte**

NAME:

MATR:

---



*NAME:*

*MATR:*

---

